

LES LIEUX FONDAMENTAUX
 DES FONCTIONS INVERSES DES INTÉGRALES ABÉLIENNES
 ET EN PARTICULIER
 DES FONCTIONS INVERSES DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES
 DE 2^{me} ET 3^{me} ESPÈCE
 (Deuxième Mémoire)

PAR

F. CASORATI

à PAVIE.

Pour atteindre plus aisément le but que nous nous étions proposé en publiant le Mémoire précédent, nous n'avons considéré que les deux plus simples intégrales dont l'inversion engendrait des fonctions périodiques.

Dans ce second Mémoire nous allons considérer particulièrement les intégrales elliptiques, en énonçant en même temps les résultats analogues qui se rapportent aux intégrales Abéliennes les plus générales. Nous ne nous occupons ici que de la forme des *lieux fondamentaux* pour les fonctions inverses de ces intégrales;¹ ce qui n'est qu'un premier chapitre de la théorie de ces fonctions. Notre but est de familiariser les jeunes

¹ Ces fonctions peuvent être aussi caractérisées en disant, que, chacune d'elles (que je désignerai toujours ici par Z , en désignant par z la variable indépendante) est une intégrale d'une équation différentielle de la forme

$$F\left(\frac{dZ}{dz}, Z\right) = 0,$$

où F signifie une fonction rationnelle et entière, à coefficients constants, de Z et de sa dérivée. En appliquant ici la notion de lieu fondamental exclusivement à cette classe de fonctions, nous remarquerons qu'elle est utilement applicable dans une plus grande étendue.

géomètres¹ avec ce genre de considérations, et de les porter, par la simplicité et l'évidente fécondité des résultats qu'ils trouveront dans ce Mémoire, à l'étude de ces fonctions; lesquelles se présentent tout naturellement dès les premiers pas dans le calcul intégral, et qui réclament à être dédommagées du demi-siècle d'abandon, où on les a laissées à la suite de conclusions célèbres, mais pas complètement légitimes.²

§ 5.

Les intégrales (1) et (2) du 1^{er} Mémoire ne présentent que des *infinis logarithmiques*.

Prenons maintenant des intégrales de différentielles rationnelles qui n'ont que des *infinis algébriques*. Ces intégrales sont des fonctions rationnelles de Z . Leurs fonctions inverses sont donc des fonctions algébriques de z . Néanmoins il convient de les considérer aussi un peu sous notre point de vue.

Prenons les cas suivants

$$(5) \quad z = \int^z \frac{A}{(Z-a)^2} dZ = -\frac{A}{Z-a} + \text{Const.}$$

$$(6) \quad z = \int^z \left[\frac{A}{(Z-a)^2} + B \right] dZ = -\frac{A}{Z-a} + BZ + \text{Const.}$$

Ces intégrales étant monodromes, sans restriction, sur le plan Z , notre surface monodromique sera, dans l'un et l'autre cas, un plan sans coupures, étendu sur le plan Z , chaque point duquel est censé *porter* la valeur de Z avec la valeur correspondante de l'intégrale.

En étendant cette surface sur le plan z , on obtient, dans le cas (5),

¹ Qui voudront bien nous pardonner s'ils ne trouveront pas toute remarque à la place qui lui serait la plus propre, et s'ils rencontreront quelques répétitions, qui dans une rédaction plus soignée auraient pu être évitées.

² Si ces conclusions avaient été vraies, la plupart des équations différentielles n'auraient pas admis, comme intégrales, des fonctions analytiques de la variable complexe indépendante; et par conséquent, l'introduction des fonctions d'une variable complexe dans l'Analyse, qui a paru si féconde, aurait perdu presque toute son opportunité.

évidemment une seule couche illimitée, c'est-à-dire, encore un plan; et dans le cas (6), deux plans, qui se continuent l'un dans l'autre le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points de ramification. C'est la surface Riemannienne représentative de la fonction algébrique Z .

On remarquera, que, dans le cas (5) le lieu fondamental est formé d'un seul plan, car l'intégrale a un seul infini (algébrique du 1^{er} ordre). L'intégrale (6) ayant deux infinis, l'un pour $Z = a$ et l'autre pour $Z = \infty$, son lieu fondamental est composé de deux plans, dont chacun porte à l'infini une de ces deux valeurs de Z .¹ L'infini de l'un de ces plans représente le couple $z = \infty$, $Z = a$; l'infini de l'autre le couple $z = \infty$, $Z = \infty$.

Revenons un moment aux intégrales (1) et (2). La première devient *infinie logarithmiquement* pour $Z = a$ et $Z = \infty$; la deuxième pour $Z = a$, $Z = b$ et $Z = \infty$, si $A + B$ n'est pas zéro. Nous avons obtenu la monodromie pour l'intégrale (1) au moyen d'une coupure de l'un à l'autre point d'infini. Dans ce cas, le lieu fondamental est résulté *une seule bande*, que nous nommerons *logarithmique*, dont les côtés sont les lignes transformées des bords de la coupure. Dans le cas (2), nous avons formé notre surface monodromique en coupant le plan suivant *deux* lignes, chacune terminée à deux points d'infini, et nous avons obtenu, comme lieu fondamental, *deux* bandes logarithmiques, chacune contournée par les lignes transformées des bords d'une coupure.

Prenons, maintenant, l'intégrale

$$(7) \quad z = \int^z \left[\frac{A}{Z-a} + \frac{B}{(Z-b)^2} \right] dZ.$$

Cette intégrale a un infini algébrique du 1^{er} ordre au point $Z = b$, et deux infinis logarithmiques aux points $Z = a$ et $Z = \infty$. La surface monodromique est la même que pour le cas (1). Mais le lieu fondamental n'est pas simplement une bande logarithmique (comme la fig. 1'); il

¹ Nous recommandons au lecteur de concevoir le plan (lorsqu'on l'emploie, dans l'étude des fonctions d'une variable complexe, comme lieu représentatif des valeurs de cette variable) comme une surface fermée à l'infini, de manière à ne voir à l'infini qu'un point. Ce point représente la *valeur* de la variable que l'on dit *infinie* et que l'on désigne par le symbole ∞ . Cette valeur est caractérisée par la valeur infinie du module, quel que

se compose d'une bande et d'un plan entier.¹ Ces deux couches se continuent l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points de ramification. S'il est

$$\frac{A}{Z-a} + \frac{B}{(Z-b)^2} = A \frac{(Z-\eta)(Z-\eta')}{(Z-a)(Z-b)^2},$$

η et η' seront les valeurs de Z dans les points de ramification,² dont les positions, ou valeurs ζ et ζ' de z , seront données par l'intégrale (7).

L'infini algébrique et un des deux infinis logarithmiques peuvent

soit l'argument; de même que la valeur 0 est caractérisée, n'importe l'argument, par la valeur zéro du module.

On peut se figurer au lieu du plan une sphère finie, comme lieu représentatif des valeurs de la variable; se réservant de se figurer de nouveau le plan chaque fois que cela convient pour mieux concevoir les valeurs ou les chemins de la variable (voir les §§ 14 et 19 de notre *Teorica delle funzioni di variabili complesse*).

¹ Si l'on conçoit Z se mouvant infiniment près du point $Z = b$ dans la surface monodromique, le mouvement correspondant de z dans le lieu fondamental sera déterminé presque exclusivement par le terme $\frac{BdZ}{(Z-b)^2}$ de la différentielle dz . Si Z décrit un cercle inf. petit autour de b , on pourra poser

$$Z - b = re^{i\omega}, \quad dZ = re^{i\omega} \cdot i d\omega$$

et regarder dz comme exprimée par

$$dz = \frac{B}{r} e^{-i\omega} i d\omega.$$

Cette formule nous dit que z décrira un grand cercle, de rayon $\frac{B}{r}$. Aux cercles de plus en plus petits autour de b de la surface monodromique correspondent dans le lieu fondamental des cercles de plus en plus grands, dont la limite est l'infini, qui doit être conçu comme un point unique, portant le couple $z = \infty$, $Z = a$, et comme étant le transformé du point de la surface monodromique portant le même couple.

² Il faut se rappeler un théorème de CAUCHY, ou, en d'autres termes, il faut se rappeler, que, autour d'un couple (z_1, Z_1) de valeurs finies de z et Z , il ne peut y avoir de ramification dans la surface représentative, soit-elle étendue sur le plan z ou sur le plan Z , à moins que les différences $z - z_1$, $Z - Z_1$ ne soient infiniment petites du même ordre, c'est-à-dire, que si la dérivée d'une variable par rapport à l'autre est nulle ou infinie. Car, la dérivée n'étant ni nulle ni infinie, à un tour de z autour de z_1 sur le plan z il correspond aussi un tour de Z autour de Z_1 sur le plan Z . En d'autres termes, en tournant autour du point (z_1, Z_1) de la surface représentative, étendue sur l'un ou l'autre plan, on revient au point-couple de départ après l'accroissement 2π de l'angle du rayon tournant.

tomber au même point de la surface monodromique. Le lieu fondamental ne cessera pas d'être composé d'un plan et d'une bande. C'est ce que l'on reconnaît bien aisément en supposant $a = b$ (d'où $\eta = a$, $\zeta = \infty$) dans la formule (7). Mais, au lieu de (7), prenons, pour varier, l'intégrale

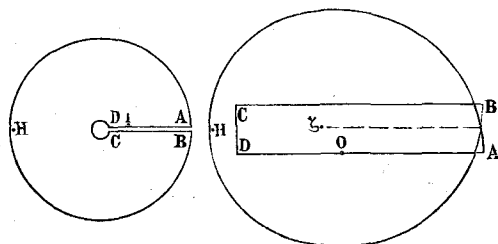
$$(8) \quad z = \int^Z \left(\frac{1}{Z} + 1 \right) dZ,$$

dont l'infini algébrique et l'un des infinis logarithmiques tombent au point $Z = \infty$. L'autre infini logarithmique tombant au point $Z = 0$, nous formerons notre surface monodromique en coupant le plan de $Z = 0$ à $Z = \infty$.

Pour faire un exercice plus complet, nous allons déterminer en détail le chemin de z pendant que Z décrit le contour exprimé par la fig. 5, qui est formé par un petit cercle CD autour de $Z = 0$, par un grand

cercle AHB et par les bords BC, DA de la coupure, que nous supposons faite suivant l'axe réel positif. Cette figure deviendra exactement notre surface monodromique lorsque les cercles se réduiront respectivement aux points $Z = 0$ et $Z = \infty$, et les droites BC, AD coïncideront entre elles sur l'axe réel.

Fig 5 (sur le plan Z). Fig 5' (sur le plan z).



Prenons comme limite inférieure, ou point de départ de Z , pour l'intégrale (8) le point $Z = 1$ du bord DA .

Z allant de 1 à A , z marchera sur son axe réel (fig. 5') de son zéro (marqué 0 dans la figure) au point désigné par A ; dont la distance de 0 est $\log R + R - 1$, si R est le rayon du cercle AHB de la surface monodromique.

Z décrivant ce cercle AHB , z décrit la courbe AHB (de la fig. 5'), dont les bouts B et A ont une différence de position, $B - A$, égale à $2\pi i$.¹

Z décrivant ensuite le bord BC , le petit cercle CD et la portion $D \dots 1$ du bord DA , z décrira les chemins marqués par les mêmes lettres dans la fig. 5', et reviendra au point de départ, c'est-à-dire à son 0.

¹ En posant $Z = Re^{i\Omega}$, d'où $dZ = Re^{i\Omega} i d\Omega$, on suivra très-aisément les variations simultanées des parties, réelle et imaginaire, de z le long de ce chemin AHB .

Notre lieu sur le plan z est donc formé de deux couches, qui se continuent l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage allant du point ζ à l'infini. Dans ce point ζ , de ramification, la valeur de Z est -1 , pour laquelle le rapport $dz:dZ$ est nul. Et la valeur de z est donnée par l'intégrale

$$\zeta = \int_1^{-1} \left(\frac{1}{Z} + 1 \right) dZ.$$

Prenant pour chemin d'intégration, dans la surface monodromique, le demi-cercle qui va du point 1 à -1 , on trouve sur-le-champ $\zeta = -2 + \pi i$.

Lorsque les deux cercles de la fig. 5 se réduisent respectivement aux points 0 et ∞ , la bande $BCDA$ de la fig. 5' devient une bande logarithmique complète, et l'autre couche devient un plan entier.

Les cas particuliers, que nous venons de considérer, suffisent pour faire entrevoir que, dans le cas général d'une différentielle rationnelle quelconque $R(Z)dZ$, le lieu fondamental de la fonction Z , inverse de l'intégrale

$$(9) \quad z = \int^z R(Z) dZ,$$

pourra être conçu comme composé par autant de plans que l'intégrale a d'infinis algébriques et par autant de bandes logarithmiques que l'intégrale a d'infinis logarithmiques moins un. Toutes ces couches se continueront l'une dans l'autre autour de points de ramification où les valeurs de Z sont déterminées algébriquement par les coefficients de $R(Z)$.

Un infini algébrique de l'ordre n doit être compté comme n infinis du 1^{er} ordre. Il cause dans le lieu fondamental n plans, dont les infinis constituent un seul point (de ramification) correspondant au point de la surface monodromique où cet infini algébrique a lieu.

Le nombre des bandes logarithmiques sera égal au nombre des infinis logarithmiques moins un, comme nous l'avons dit, si, pour obtenir la monodromie de l'intégrale,¹ l'on coupera le plan en suivant autant de lignes

¹ Nous dirons ailleurs de la meilleure manière de réaliser cette monodromie en vue de la théorie de la fonction inverse de l'intégrale.

qu'il y a de ces infinis moins un; chaque ligne allant d'un infini à un autre sans rencontrer les autres lignes analogues.¹

Passons maintenant à considérer les intégrales de différentielles irrationnelles.

§ 6.

Nous allons faire l'inversion des intégrales elliptiques, en commençant par l'intégrale de 1^{re} espèce

$$(10) \quad z = \int_0^Z \frac{dZ}{\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}.$$

Après avoir traité ce cas très-connu, nous n'aurons que peu de choses à ajouter pour l'inversion des intégrales de 2^{me} et 3^{me} espèce.

Ici, au lieu d'un plan ou couche simple, il faut imaginer (étendue sur le plan Z) une surface Riemannienne, qui représente la manière de se comporter du radical

$$\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}.$$

¹ Si, pour former la surface monodromique, on coupait le plan en suivant des lignes qui, en partant d'un point où z n'est pas infinie (et où je désignerai par Q la valeur de Z), vont respectivement, sans se rencontrer, aux divers points d'infini logarithmique; le lieu fondamental aurait autant de bandes qu'il y a de ces points, et chacune de ces bandes s'étendrait sur le plan z , non plus de l'infini à l'infini, mais du fini à l'infini. Figurons-nous sur le plan z le polygone dont les sommets sont les valeurs de z correspondant à la valeur Q de Z ; cette valeur se trouvant en autant de points du contour de la surface monodromique qu'on a tiré de lignes de coupure. Les côtés de ce polygone représentent respectivement les résultats de l'intégration de la différentielle $R(Z)dZ$ autour de chaque point d'infini. La somme de ces résultats étant toujours zéro (il faut compter aussi, lorsqu'il existe, l'infini au point où $Z = \infty$), le polygone est fermé. Maintenant, imprimons à chaque côté un mouvement de *translation*, par lequel le côté, en commençant à glisser vers l'intérieur, va à l'infini dans une direction finale égale à celle de la normale intérieure au côté même (du polygone). Chaque côté engendrera précisément une bande du lieu fondamental, si les mouvements de translation sont réglés de manière que les extrémités de chaque côté décrivent les transformées des bords de la coupure aboutissant à l'infini correspondant.

Il est à propos de rappeler ici que la nature géométrique de chaque ligne de coupure est arbitraire. L'élément essentiel d'une bande logarithmique est la *différence* de position des côtés congruents, c'est-à-dire la *période*; d'où dépend aussi, comme on l'a dit, la direction de la bande à l'infini.

Cette surface est constituée par deux plans, ou, en d'autres termes, est une surface à deux couches, dont chacune s'étend sur tout le plan Z , et qui se continuent l'une dans l'autre autour des points de ramification

$$0, 1, \frac{1}{k^2}, \infty.$$

Chaque point de cette surface est censé *porter* la valeur de Z (qui est représenté par le point qui est au dessous de lui dans le plan Z) avec une des deux valeurs du radical.

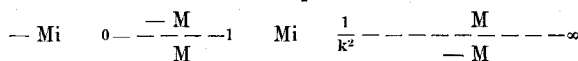
Pour tracer nos figures, nous supposerons que k est positif et plus petit que 1, et que les deux couches se connectent, c'est-à-dire, se continuent l'une dans l'autre, le long de deux *lignes de passage*, dont l'une s'étend sur la portion $0 \dots 1$ et l'autre sur la portion $\frac{1}{k^2} \dots \infty$ de l'axe réel positif.

Pour des valeurs réelles de Z la fonction sous le radical sera toujours réelle, et le radical même sera tantôt réel et tantôt purement imaginaire. Sa valeur sera donc de la forme $\pm M$ ou $\pm Mi$, en désignant par M le module, ou valeur absolue, du radical.

La fig. 6 servira à nous rappeler à chaque instant la nature des valeurs, réelles ou imaginaires, du radical le long

Fig. 6 (sur le plan Z).

Couche supérieure.

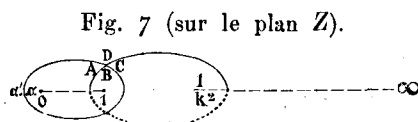


de l'axe réel dans l'une des couches. Pour fixer les idées, nous regarderons la couche, à laquelle cette figure se rapporte, comme située *au dessus* de l'autre. Dans cette autre, que nous nommerons couche *inférieure*, la valeur du radical est dans chaque point contraire¹ de celle qui se trouve dans le point qui lui est au dessus, dans la couche supérieure. Conformément à cela, notre fig. 6 nous présente deux valeurs, contraires entre elles, le long de chaque ligne de passage. En regardant comme direction positive de ces lignes la direction positive de l'axe réel, nous pourrions dire, par exemple, que le long du *côté gauche* de la ligne de passage $0 \dots 1$, les valeurs du radical sont négatives dans la couche supérieure et positives dans l'inférieure. Etc.

Cette surface Riemannienne est triplement connexe. En y faisant

¹ Je dis ici que deux valeurs sont *contraires* entre elles lorsque leur somme est nulle.

des coupures de manière à la rendre simplement connexe, on aura une *surface monodromique* pour notre intégrale de 1^{ère} espèce.¹ Suivant une manière usuelle, nous ferons une *première coupure* le long d'une ligne fermée, tracée arbitrairement dans la couche supérieure autour des points de ramification 0 et 1; et ensuite, une *deuxième coupure* suivant une autre ligne ayant ses bouts dans un même point de la ligne précédente. Nous indiquerons par la fig. 7 la surface monodromique que l'on vient d'ob-



tenir. Les lignes continues appartiennent à la couche supérieure, les ponctuées à l'inférieure. Les lignes de passage sont indiquées, ici comme ailleurs, par des traits.

Le contour de cette surface est constitué par les bords AB et CD de la première coupure et par les bords BC et DA de la deuxième. Pour parcourir tout le contour en *direction positive*, en partant de A , on doit marcher sans interruption tout le long des bords AB , BC , CD , DA , c'est-à-dire, parcourir le chemin $AB + BC + CD + DA$.

Imaginons-nous maintenant que l'on dépose sur chaque point de la surface monodromique la valeur que l'on obtient pour l'intégrale (10), c'est-à-dire pour z , en intégrant la différentielle

$$(11) \quad dz = \frac{dZ}{\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}$$

depuis 0 jusqu'au point susdit le long d'un chemin quelconque tracé dans cette surface. Partant, chaque point de cette surface monodromique est censé *porter* dorénavant une *terne de valeurs correspondantes* de Z , du radical et de z .

Il s'agit à présent de trouver quelle forme prend la surface ainsi *chargée* lorsqu'on la transporte sur le plan z , c'est-à-dire, lorsqu'on se la représente étendue sur ce plan de manière que chaque valeur de z tombe au dessus du point qui la représente dans le dit plan. Car, la surface ainsi transformée est le *lieu fondamental* de Z considérée comme fonction de la variable indépendante z .

Dans ce cas (10) on sait déjà bien que la surface prend la forme d'un parallélogramme. Notre lieu fondamental n'est autre chose que le

¹ Car la valeur de cette intégrale prise tout le long du contour d'une portion quelconque de cette surface est zéro.

parallélogramme des périodes de la fonction Z ; qui dans ce cas est doublement périodique et uniforme.

Néanmoins, nous allons déterminer le contour du lieu fondamental, comme s'il nous était inconnu; car, le même procédé sert dans les cas successifs.

Pour reconnaître plus promptement le chemin que z décrit sur son plan pendant que Z parcourt le contour de la surface monodromique, il est bon d'imaginer que les lignes des coupures, représentées par la fig. 7, se restreignent de manière à se réduire tout-à-fait sur l'axe réel entre les points 0 et 1, 1 et $\frac{1}{k^2}$. De cette manière, nous n'aurons à faire qu'avec des valeurs réelles de Z et les valeurs du radical déjà exprimées par la fig. 6.

Notre surface monodromique sera donc dorénavant ce que devient la surface Riemannienne en coupant ses deux couches en ligne droite du point de ramification 0 jusqu'au point de ramification $\frac{1}{k^2}$. Toutefois, pour plus de clarté, nous continuerons à nous en rapporter à la fig. 7, dont cependant nous supposons toujours les bords AB , BC , CD , DA dans leur *position finale*, au dessus de l'axe réel.

Au dessus du point 0 de cet axe nous voyons deux points α et α' ¹ du contour de notre surface monodromique. L'un appartient au bord AB et l'autre au bord CD . Dans chacun de ces points la valeur de Z est 0. Lequel des deux prenons-nous comme point de départ, ou limite inférieure, de l'intégrale (10)? Celui qui appartient au bord AB . Partant, la valeur de z en ce point sera aussi 0. Quelle sera la valeur de z en α' ? Pour la trouver directement, il faudrait faire marcher Z de α à α' par un chemin entièrement contenu dans la surface monodromique, et faire l'addition ou intégration des valeurs que la formule (11) continuerait de donner pour dz . Nous verrons bientôt que cette valeur est $2P'i$, en désignant par P et P' les intégrales rectilignes²

$$(12) \quad P = \int_0^1 \frac{dZ}{M}, \quad P' = \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dZ}{M}.$$

¹ Nous tenons à répéter que par α , α' , A , B , C , D on doit entendre, non pas les points dans les positions marquées dans la fig. 7, mais les points dans les positions finales.

² D'après les notations de JACOBI ces intégrales seraient désignées par $2K$, $2K'$. On verra dans la suite pourquoi nous n'adoptons pas ces notations en ce moment.

Au dessus du point 1, du plan Z , il y a quatre points du contour; les points A, B, C, D . En eux, la valeur de Z est donc 1 et la valeur du radical est zéro; quelles sont les valeurs de z ? Pour obtenir la valeur de z en A , faisons marcher Z de α à A le long de la portion αA du bord BA . Pendant ce mouvement, le radical a les valeurs indiquées au côté gauche de la ligne de passage de 0 à 1 dans la fig 6, c'est-à-dire, des valeurs négatives. Par conséquent, dz [formule (11)] est aussi toujours négative, et la valeur de z en A est $-P$.

Nous trouverons les valeurs de z en B, C, D et aussi en α' , en faisant décrire à Z le contour de la surface monodromique; ce que nous allons faire tout-de-suite, mais dans le but principal de déterminer le contour du lieu fondamental.

Nous ferons partir Z du point A . Quel sera le point de départ de z sur le plan z ? Nous venons de voir que, pendant le passage de α à A le long du bord BA , toutes les valeurs de dz sont négatives et leur somme est égale à $-P$. Cela signifie que, pendant ce passage, z aura marché sur l'axe réel négatif, du point 0 au point $-P$. Voilà le point de départ de z .

Z partant du point A et décrivant la moitié $A\alpha$ du bord AB , z partira du point $-P$ sur son plan et reviendra à 0.

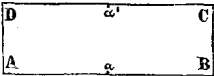
Z décrivant la seconde moitié αB du bord AB , z marchera de 0 au point $+P$; car le long de αB la valeur du radical (fig. 6) est positive.

Z parcourant le bord BC , z décrira une droite représentative de la grandeur imaginaire positive $2Pi$. En effet, tout le long de la première moitié (contenue dans la couche inférieure) du chemin, les valeurs de dZ étant positives et celles du radical étant imaginaires négatives, les valeurs de dz seront toujours imaginaires positives et leur somme résultera égale à Pi . Le long de la seconde moitié, qui est dans la couche supérieure, les valeurs de dZ et du radical ayant des signes contraires aux précédentes, les valeurs de dz continueront à être imaginaires positives, et leur somme sera de même égale à Pi .

De la même manière on reconnaît que, Z décrivant les bords CD et DA , z décrira deux droites qui représentent respectivement les grandeurs $-2P$ et $-2Pi$.

Le contour du lieu fondamental est donc le rectangle représenté par la fig. 7', dont les sommets sont marqués par les mêmes lettres

Fig. 7' (sur le plan z).

	Dans les points	Z et z ont les valeurs
	A	1 $-P$
	B	1 P
	C	1 $P + 2P'i$
	D	1 $-P + 2P'i$
	α	0 0
	α'	0 $2P'i$

que leurs points correspondants dans la surface monodromique.

Dans le cas de la relation (10) il n'y a pas de points de ramification dans le lieu fondamental; ce lieu est donc complètement déterminé par son contour; c'est-à-dire, ce lieu est

tout simplement le rectangle $ABCD$.

§ 7.

Cherchons le lieu fondamental pour la fonction Z inverse de l'intégrale de 2^{me} espèce

$$(13) \quad z = \int_0^z \frac{Z dZ}{\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}.$$

Cette intégrale est monodrome, comme celle de première espèce, dans la surface représentée par la fig. 7.

En conservant donc cette même surface comme monodromique pour le cas (13), il s'agit encore ici de trouver le chemin de z sur le plan z , pendant que Z parcourt les quatre bords des coupures. Le chemin de z sera donc encore un rectangle, que nous pourrions représenter par la même fig. 7', avec la seule différence qu'à présent les symboles P et P' doivent désigner les valeurs des intégrales

$$(14) \quad P = \int_0^1 \frac{Z dZ}{M}, \quad P' = \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{Z dZ}{M}.$$

Mais, bien que le contour du rectangle soit encore ici *le contour complet* du lieu fondamental, le rectangle ne constitue pas à lui seul *tout* ce lieu. L'intégrale (13) devient infinie lorsque Z va à l'infini. En d'autres termes, la valeur de z , qui se trouve déposée au point $Z = \infty$ de notre surface monodromique, est ∞ . Le lieu fondamental doit donc s'étendre sur le plan z à l'infini.

Effectivement, ce lieu est constitué par le rectangle et par un plan entier. Ce sont deux couches que, pour fixer les idées, je nommerai *supérieure* et *inférieure*, en regardant le rectangle comme superposé au plan. Ces couches se continuent l'une dans l'autre le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points de ramification.

On reconnaît tout cela en cherchant les points de ramification. On trouve qu'il n'y a de ramification dans notre lieu fondamental qu'autour des points où $Z = 0$. En effet, si de l'équation

$$(15) \quad dz = \frac{ZdZ}{\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}$$

on tire le développement de $z - z_1$ suivant les puissances de $Z - Z_1$,¹ et de celui-ci on tire le développement réciproque, c'est-à-dire, de $Z - Z_1$ suivant les puissances ascendantes de $z - z_1$; on voit que ce développement ne contient de puissances fractionnaires que si $Z_1 = 0$. Dans ce cas, le premier terme du développement contient la puissance $(z - z_1)^{\frac{2}{3}}$. Par conséquent, si l'on tournait autour de ce point $(z_1, Z_1 = 0)$ du lieu fondamental, on ne retrouverait un même couple de valeurs de z, Z qu'après trois tours.² En d'autres termes, ce point est un *point* de ramification *double*.

Il ne reste qu'à trouver les valeurs de z pour $Z = 0$. Pour cela, on n'a qu'à comparer le lieu fondamental (fig. 7') avec la surface mo-

¹ z_1 et Z_1 étant supposées un couple de valeurs finies correspondantes de z et Z . Quant aux valeurs infinies, il n'y en a qu'un couple, qui dans la surface monodromique est représenté par un point de ramification. Mais on voit facilement que ce point n'est plus de ramification dans le lieu fondamental.

² On verra dans la suite comment on pourra faire trois tours, pendant que notre lieu fondamental, isolément considéré, n'a que deux couches. On éviterait cette complication et l'on trouverait *deux points* de ramification *simples*, au lieu d'un *point double*, en prenant la différentielle de seconde espèce sous une forme plus générale.

Si l'on ne réduisait pas les coupures de la surface monodromique à passer par le point où $Z = 0$, le transport de cette surface sur le plan z donnerait, pour (15), un lieu fondamental recouvrant *trois fois* le plan z autour du point de ramification. Les jeunes lecteurs feront bien de s'exercer à vérifier cela; d'autant plus que de cette manière ils commenceront d'apercevoir les conditions que l'on doit remplir dans la formation d'une surface monodromique afin que le lieu fondamental soit constitué comme on dit dans ce Mémoire.

La fig. 7'' nous présente non un seul mais deux points doubles, parce que nous avons voulu que le contour passe par ces points.

nodromique (fig. 7). Dans cette surface les valeurs 0 pour Z sont dans les milieux des bords AB et CD . A ces milieux correspondent dans le lieu fondamental les milieux des côtés AB et CD . Ces milieux sont donc nos points de ramification; et les valeurs de z en eux sont 0 et $2P'i$.

En concevant comme ligne de passage de l'une à l'autre couche la droite qui joint les points de ramification,¹ nous représenterons complètement notre lieu fondamental par la fig. 7".

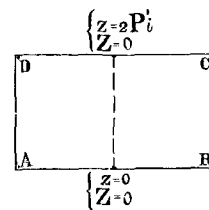
On sait combien de profit on tire dans la théorie des fonctions doublement périodiques uniformes de la considération du lieu fondamental (parallélogramme des périodes). On en tire bien plus dans l'étude des fonctions non uniformes. Le lieu fondamental est une image très-expressive de la manière de se comporter de la fonction; il offre à nos yeux, résumés dans une figure assez simple, une foule de détails que l'on ne pourrait embrasser aisément par les formules de l'Analyse.

Il est très-utile d'envisager simultanément le lieu fondamental et la surface monodromique.

Le lieu fondamental que nous venons de trouver (fig. 7") peut en fournir à lui seul bien de preuves. Mais nous nous bornons ici à quelques brèves considérations à son égard, ne voulant pas nous écarter à présent de notre question, de la détermination des lieux fondamentaux.

La surface monodromique (fig. 7) recouvre partout deux fois le plan Z ; cela nous dit qu'une quantité c quelconque se présente deux fois, dans deux points distincts (excepté les cas de $c = 0$, $c = 1$, $c = \frac{1}{k^2}$, $c = \infty$)

Fig. 7" (sur le plan z).



¹ On pourrait se borner à dire, dans ce cas et dans les autres, que les couches se continuent les unes dans les autres autour des points de ramification, sans parler de lignes de passage, dont seulement les extrémités (quelquefois même une seule des deux) sont déterminées, leurs cours restant arbitraire. Mais nous croyons gagner en clarté en considérant ces lignes et leur donnant dans nos figures une forme particulière.

Nous ferons aussi remarquer à ce propos, que toutes les surfaces à plusieurs couches, dont il est question, peuvent être réellement construites, si l'on prend au lieu du plan représentatif une surface finie (p. e. une sphère), et si l'on se contente de prendre comme surfaces des réseaux (très-épais, si l'on veut) dont les noeuds seuls représentent les points portant les valeurs, pendant que les fils servent exclusivement à exprimer qu'il y a continuité dans la succession de ces valeurs; comme c'est expliqué dans notre *Teorica* susdite.

de cette surface, comme valeur de Z . La même chose devra donc arriver dans le lieu fondamental (fig. 7'').

Dans la surface monodromique les points qui portent une même valeur pour Z sont disposés l'un au dessus de l'autre. Quelle est la disposition respective de ces points dans le lieu fondamental? Pour la reconnaître, désignons par z et z' les valeurs de z correspondant à une même valeur Z de Z .¹ Nous pourrions désigner nos deux points par (z, Z) et (z', Z) , soit qu'on les conçoive dans la surface monodromique que dans le lieu fondamental. En les concevant dans la surface monodromique nous savons que les valeurs du radical y sont contraires entre elles. Par conséquent nous aurons

$$\frac{dz}{dZ} + \frac{dz'}{dZ} = 0$$

d'où

$$z + z' = \text{Const.}$$

Pour trouver cette constante, imaginons que nos deux points superposés s'approchent p. e. du point de ramification o . Nous savons qu'aux points α et α' (fig. 7) les valeurs z et z' deviennent 0 et $2Pi$. Nous aurons donc

$$(16) \quad z + z' = 2Pi.$$

Cette relation, interprétée dans le lieu fondamental, nous dit que les points de ce lieu, qui portent la même valeur pour Z , sont disposés symétriquement par rapport au point Pi du plan z ou, ce qui est la même chose, par rapport au centre du rectangle $ABCD$.

L'un des points, soit (z, Z) , étant fixé, l'équation (16) suffit pour déterminer (z', Z) dans le cas (10); mais non dans le cas (13). Dans ce dernier cas, il faut aussi savoir dans quelle couche doit être le point (z', Z) . Or, on reconnaît tout-de-suite qu'il est dans la même couche que (z, Z) . Il suffit, à cet effet, de faire aller (z, Z) à l'infini. Le point (z', Z) , superposé à (z, Z) dans la surface monodromique, devra aller lui aussi à l'infini, et par le chemin superposé à celui qui sera décrit par (z, Z) . Dans le lieu fondamental les deux points devront aller à

¹ Pour fixer les idées, supposons que z' soit la valeur existante dans la couche supérieure,

l'infini en suivant deux chemins satisfaisant à la condition (16), c'est-à-dire par deux chemins symétriques par rapport au centre du rectangle. Si (z, Z) va, par exemple, dans le lieu fondamental à l'infini parallèlement à l'axe réel positif, (z', Z) y devra aller parallèlement à l'axe réel négatif. Cela ne serait pas possible si les deux points de départ n'étaient pas dans la même couche; car l'un des points mobiles serait arrêté par le bord BC ou DA .

Pour la fonction Z du cas (10) on sait bien déjà que, pour en représenter la continuation en dehors du lieu fondamental, on n'a qu'à imaginer les lieux congruents au fondamental, chargés des mêmes valeurs de Z dans les points homologues. Il y a quatre lieux congruents et joints au fondamental, le long respectivement des quatre côtés AB, BC, CD, DA . A chacun de ceux-ci on joindra trois autres lieux; et ainsi de suite.

Tous ces lieux congruents, en nombre infini, constituent une *surface complète* (le réseau des parallélogrammes des périodes, recouvrant une seule fois tout le plan z) qui représente complètement la relation (10); c'est-à-dire, qui a la propriété que chacun de ses points représente une solution (z, Z) de l'équation (10), et que chaque solution de cette équation y est représentée par un point.¹

Revenons à l'intégrale de 2^{me} espèce. Pour représenter sur le plan z la continuation de sa fonction inverse Z , on joindra au lieu fondamental, le long des côtés AB, BC, CD, DA , comme précédemment, quatre

¹ Cette *surface complète* peut être aussi conçue comme étendue sur le plan Z . Pour l'obtenir sous cette forme, on doit s'imaginer de joindre à notre surface monodromique le long des quatre bords AB, BC, CD, DA respectivement quatre surfaces également formées et dont les points homologues, portant les mêmes valeurs pour Z et le radical, portent pour z les valeurs que l'on obtiendrait par l'intégration de la différentielle (11) en suivant des chemins continus aboutissant à ces points homologues, mais ayant toujours pour origine le point qui a servi d'origine dans la surface monodromique fondamentale. Il va sans dire que, à chacune des quatre surfaces nouvelles, que l'on a joint à la surface monodromique fondamentale, on doit en joindre trois autres, et ainsi de suite indéfiniment. De cette manière on obtient au dessus d'un même point du plan Z une infinité de points appartenant respectivement aux innombrables couches de cette surface complète. Ces points portent les diverses valeurs de z qui correspondent, d'après (10), à une même valeur de Z . On sait que ces valeurs de z ne diffèrent des deux qui se trouvent dans la surface monodromique fondamentale que par les multiples des périodes correspondant aux nombres de fois que les chemins d'intégration auront dû traverser les lignes de coupure. Cela est en évidence dans la surface complète conçue comme étendue sur le plan z .

lieux congruents chargés des mêmes valeurs de Z dans les points homologues; et à ces quatre lieux on joindra les autres lieux successifs, et ainsi de suite jusqu'à recouvrir tout le plan z avec les rectangles homologues de $ABCD$.

Ces rectangles constituent une seule couche, un plan entier, comme précédemment. Mais à présent chacun d'eux tient avec soi (au dessous de soi, pour fixer les idées) un plan.

Par conséquent, la surface *complète* qui représente l'équation (13), est constituée par le plan ou couche des rectangles, et par l'infinité des plans appartenant à chaque rectangle. Ces derniers plans n'ont entre eux aucune connexion; chacun d'eux est *exclusivement* en connexion avec son propre rectangle le long d'une ligne de passage, que l'on peut toujours s'imaginer comme étant la ligne homologue de celle marquée dans la fig. 7".

A présent, on peut constater que chaque point de ramification appartient effectivement à trois couches. Par exemple, le point de la fig. 7" où $z = 0$ et $Z = 0$ appartient simultanément à la couche des rectangles, au plan du lieu fondamental et au plan faisant partie du lieu congruent qui est joint au fondamental le long de côté AB . On voit, tout-de-suite, que, si un point, mobile dans ces lieux réunis, tourne autour de ce point de ramification, il passe de l'une à l'autre des trois couches que nous venons de nommer et revient au point de départ après trois tours.

Au dessus d'un point quelconque du plan z nous avons dans la surface complète une infinité de points. Cela nous dit que notre fonction Z n'est pas uniforme, comme celle du cas (10), mais ∞ -forme.

Mais les valeurs de Z dans tous ces points superposés sont-elles effectivement différentes entre elles? Certainement, en général. C'est ce que l'on reconnaîtra bien vite, par exemple, de la manière suivante.

Chaque lieu congruent est entouré de lieux congruents chargés des mêmes valeurs de Z , pas autrement que s'il était le lieu fondamental. Partant, les valeurs de Z qui se trouvent au dessus d'un point quelconque du plan z sont les mêmes que celles qui se trouvent au dessus de son congruent qui est dans l'étendue du rectangle fondamental.¹ Que v soit donc un point du plan z contenu dans cette étendue. Au dessus

¹ Nous nommons fondamentaux le rectangle et le plan qui composent le lieu fondamental.

de v nous voyons, avant tout, la valeur, que je nommerai V , déposée dans le rectangle fondamental et la valeur V_{00} déposée dans le plan fondamental. Ces deux valeurs sont diverses entre elles. Et puis, nous voyons les valeurs déposées dans les plans appartenant aux lieux congruents. Soit $V_{m,n}$ celle qui est déposée dans le plan appartenant au lieu congruent qui viendrait coïncider avec le fondamental par une translation exprimée par

$$m \cdot 2P + n \cdot 2iP'.$$

Evidemment, $V_{m,n}$ sera la même valeur que l'on trouve dans le point du plan fondamental où la valeur de z est

$$v + m \cdot 2P + n \cdot 2iP'.$$

Par conséquent, les valeurs de Z , qui se trouvent au dessus du point $z = v$ dans les plans qui n'appartiennent pas au lieu fondamental, sont égales aux valeurs existantes pour Z dans tous les sommets du réseau des périodes tracé dans le plan fondamental, à partir du point-sommet qui est au dessus de $z = v$. On voit bien que ces valeurs sont, en général, diverses entre elles; la condition de l'égalité étant la symétrie de position par rapport au centre du rectangle fondamental.

§ 8.

Nous allons déterminer le lieu fondamental de la fonction Z inverse de l'intégrale de 3^{me} espèce

$$(17) \quad z = \int_0^z \frac{dZ}{(Z-a)\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}.$$

La surface (fig. 7), qui nous a servi pour les intégrales de 1^{re} et de 2^{me} espèce, n'est plus monodromique pour l'intégrale de 3^{me} espèce. Car, il y a maintenant deux points dans la surface autour de chacun desquels l'intégration de la différentielle

$$(18) \quad dz = \frac{dZ}{(Z-a)\sqrt{Z(1-Z)(1-k^2Z)}}$$

ne donne pas zéro pour résultat.

Ces points, que pour abrégé je nommerai ε' et ε , sont ceux où $Z = a$. Dans le voisinage de ε' , que je suppose dans la couche supérieure, la différentielle se comporte comme la fraction simple

$$(19) \quad \frac{i}{M_a} \frac{dZ}{Z-a};$$

et dans le voisinage de ε , comme

$$-\frac{i}{M_a} \frac{dZ}{Z-a};$$

M_a désignant le module du radical pour $Z = a$.¹ Par conséquent, si Z fait un tour positif autour de ε' , l'intégration de (18) donnera

$$-\frac{2\pi}{M_a}.$$

Un tour positif autour de ε produirait la même grandeur avec le signe contraire.

Pour changer la dite surface en surface monodromique pour l'intégrale (17), il faut donc la couper de manière à empêcher Z de tourner autour de l'un de ces points sans tourner en même temps autour de l'autre. Nous la couperons suivant une ligne qui va de ε à ε' sans atteindre nulle part les bords AB, BC, CD, DA . Il s'ensuit que le contour de notre nouvelle surface monodromique sera formé de deux parties séparées: la portion constituée par les quatre bords AB, BC, CD, DA ; et la portion constituée par les deux bords de la nouvelle (troisième) coupure. Notre surface ne sera pas simplement, mais doublement connexe.²

Maintenant, il s'agit de déterminer le chemin de z sur le plan z , pendant que Z parcourt tout le contour de cette surface.

D'après les §§ 6 et 7, nous savons déjà que, pendant que Z décrira la portion $AB + BC + CD + DA$ du contour, z décrira sur son plan

¹ La fig. 6 nous dit que les valeurs du radical en ε' et ε sont $-M_a i$ et $M_a i$. La fraction (19) est le seul terme du développement de dz suivant les puissances croissantes de $Z - a$ qui devient infini en ε' . L'intégrale y devient infinie comme $\frac{i}{M_a} \log(Z-a)$.

² Ce qui importe c'est qu'elle soit *monodromique*. On verra qu'il ne convient pas de s'en rapporter toujours à une surface monodromique à connexion simple.

un contour parallélogrammique dont les sommets, c'est-à-dire les points transformés de A, B, C, D , représentent sur le plan z les grandeurs

$$-P, P, P + 2Pi, -P + 2Pi;$$

P et P' désignant maintenant les intégrales rectilignes:

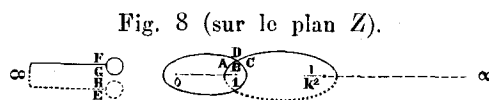
$$(20) \quad P = \int_0^1 \frac{dZ}{(Z-a)M}, \quad P' = \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dZ}{(Z-a)M}.$$

Il reste à trouver le chemin de z , pendant que Z parcourt les bords de la nouvelle coupure.

Pour fixer les idées et pour n'avoir à faire qu'avec des valeurs réelles pour Z , nous supposons maintenant que la quantité a est réelle¹ et négative et que la coupure est faite le long de l'axe réel négatif, dans l'une comme dans l'autre couche.²

Nous nous imaginerons aussi, pour plus de clarté, comme dans les figures 1 et 2, des cercles infiniment petits autour des points ε et ε' , et nous considérerons ces cercles comme faisant partie du contour de notre surface monodromique, comme si les surfaces des cercles y manquaient.

Partant, nous pourrions ex-
primer notre surface monodro-
mique par la fig. 8, où l'on doit
s'imaginer que les deux cercles



autour de ε et ε' sont l'un au dessous de l'autre, et que les lignes qui vont de ces cercles à l' ∞ sont sur l'axe réel négatif.

La portion de contour que Z doit décrire est formée par les bords EF et GH de la coupure et par les cercles FG et HE .

Concevons Z partant du point initial, a , et marchant sur l'axe réel négatif dans la couche inférieure jusqu'à atteindre le petit cercle HE ,

¹ Les côtés du rectangle $ABCD$ deviendront des droites parallèles aux axes, comme dans les paragraphes précédents.

² En partant de ε , la ligne de coupure doit donc aller, en suivant l'axe réel négatif, au point ∞ ; ici elle doit passer dans la couche supérieure et parvenir, toujours en suivant le dit axe, au point ε' .

dont je nommerai ρ le rayon. En même temps, z partira de son zéro, au milieu du côté AB du lieu fondamental (fig. 8'), et marchera suivant son axe imaginaire positif jusqu'au point (milieu de la droite HE) qui représente la grandeur

$$(21) \quad \int_0^{a+\rho} \frac{dZ}{(Z-a)Mi},$$

laquelle est imaginaire positive, dZ étant négative et $Z-a$ positive pendant le mouvement.

Z fait ensuite un demi-tour négatif autour du point ε et parvient au point E (fig. 8). En même temps, z décrit une droite représentative de la quantité négative $-\frac{\pi}{M_a}$. Ce sera la moitié de la droite HE (fig. 8') qui termine en E .

Z marchant de E à ∞ sur l'axe réel négatif, z décrira la droite $E\zeta$ (fig. 8') représentative de l'intégrale

$$(22) \quad \int_{a-\rho}^{\infty} \frac{dZ}{(Z-a)Mi};$$

qui est imaginaire négative, dZ et $Z-a$ étant réelles négatives le long de ce chemin.¹

Z marchant de ∞ au point F sur l'axe réel négatif dans la couche supérieure, z décrira la droite $\zeta F = E\zeta$; car, les valeurs de dZ et du radical étant contraires de celles qui avaient lieu dans la marche précédente (entre ∞ et E), la différentielle dz reçoit les mêmes valeurs que dans cette marche.

Z décrivant le cercle FG , c'est-à-dire, faisant un tour négatif autour

¹ Nous désignons par ζ le point et aussi (comme à l'ordinaire) la valeur de z en ce point. Pour avoir cette valeur on n'a qu'à écrire la somme des expressions des trois droites que z a parcourues en partant de 0 pour parvenir à ζ . La première droite est exprimée par l'intégrale (21), la deuxième par $-\frac{\pi}{M_a}$ et la troisième par l'intégrale (22). Mais on trouvera bientôt une expression plus simple pour ζ .

du point ε' , z décrira la droite FG qui représente, comme EH , la grandeur réelle $\frac{2\pi}{M_a}$.

Z décrivant le bord GH , dont la première moitié est dans la couche supérieure et l'autre dans l'inférieure, z décrira la droite $GH = FE$; dont le milieu ζ' correspond au point du bord GH de la surface monodromique où $Z = \infty$.¹

Enfin, Z décrivant le demi-cercle autour du point ε , pour revenir au point sur l'axe réel d'où elle a commencé à décrire la portion $EFGH$ du contour, z décrira la moitié de la droite HE , qui restait pour compléter le périmètre fermé $EFGH$ de la fig. 8'.

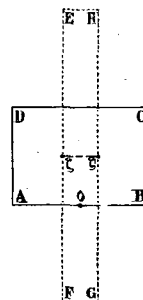
Voilà donc (fig. 8') le contour complet de notre lieu fondamental. Il est constitué par les deux périmètres séparés $ABCD$ et $EFGH$. Les côtés HE et FG de ce dernier doivent être conçus à l'infini, si l'on veut qu'ils correspondent aux deux cercles dans leur état limite, c'est-à-dire lorsque les cercles seront réduits respectivement aux points ε et ε' .

Le lieu fondamental est composé de deux couches: la couche ou parallélogramme $ABCD$, et la couche ou bande logarithmique $EFGH$. Pour s'en persuader, on n'a qu'à achever la détermination du lieu par la recherche de ses points de ramification.

Comme on sait, autour de points où les valeurs de z et Z sont finies, il ne peut y avoir de ramification que si le rapport des différentielles est nul ou infini. Pour z et Z finies, ce rapport est nul ou infini pour $Z = 0$, $Z = 1$, $Z = \frac{1}{k^2}$. Mais on voit tout-de-suite que pour ces valeurs de Z il n'y a pas de ramification.

Venons aux points où z et Z ne sont pas simultanément finies. Nous n'avons pas à nous occuper des points où $Z = a$;² lesquels, si les cercles

Fig. 8'
(sur le plan z).



¹ Dans cette surface nous avons deux points où la valeur de Z est ∞ . Ce sont les deux points placés au dessus du point ∞ du plan (sphère) Z , l'un desquels appartient au bord EF et l'autre au bord GH de la coupure. Dans la surface monodromique précédente (fig. 7) on n'avait qu'un seul point (le point de ramification) au dessus du point ∞ du plan Z .

² Nous ferons ailleurs des considérations sur cette classe de points, où l'intégrale devient infinie logarithmiquement.

autour des points ε et ε' n'étaient pas réduits à leurs centres, n'appartiendraient pas même au lieu exprimé par la fig. 8'.

Il ne reste donc qu'à considérer les points où $Z = \infty$; car, partout ailleurs, Z est finie en même temps que z .

Si l'on veut avoir à faire avec des valeurs finies, on peut poser $Z = \frac{1}{Z'}$, et chercher comment se comporte z autour de $Z' = 0$. L'équation (18) nous donnera

$$\frac{dz}{dZ'} = \frac{-Z'}{(1 - aZ')\sqrt{Z'(Z' - 1)(Z' - k^2)}} = c_0 Z'^{\frac{1}{2}} + c_1 Z'^{\frac{3}{2}} + c_2 Z'^{\frac{5}{2}} + \dots$$

Pour $Z' = 0$, c'est-à-dire pour $Z = \infty$, nous avons déjà vu que z devient ζ ou ζ' . En intégrant l'équation précédente dans le voisinage de ζ , de ce point jusqu'à un point quelconque, on obtient

$$z - \zeta = \frac{2}{3} c_0 Z'^{\frac{3}{2}} + \dots$$

d'où, si l'on veut

$$Z' = \left[\frac{3(z - \zeta)}{2c_0} \right]^{\frac{2}{3}} + \dots$$

Partant, lorsqu'on tournera autour du point ζ du lieu fondamental, on ne reviendra à une même couple de valeurs de z et Z' (ou z et Z), c'est-à-dire à une même point de ce lieu, qu'après trois tours. Ce point est donc un *point* de ramification *double*.

Même conclusion par rapport au point ζ' .

Si l'on conçoit comme ligne de passage de l'une à l'autre couche la droite $\zeta\zeta'$, le lieu fondamental de la fonction Z pour le cas (17) sera exprimé complètement par la fig. 8'; où l'on peut regarder le parallélogramme comme superposé à la bande logarithmique.

Mais il reste à justifier la position que nous avons donnée à ζ et ζ' dans cette figure. Car, nous avons vu que la partie réelle de ζ est $-\frac{\pi}{M_a}$; mais nous n'avons pas encore reconnu que sa partie imaginaire est Pi . Cette partie est la somme des intégrales (21) et (22); il faut donc démontrer que cette somme est égale à Pi .

A cet effet, il suffit de remarquer que, les lignes $MNN'M'$ et $R'S'SR$ (fig. 9) constituant le contour total d'une portion de notre surface Rie-

mannienne dans laquelle il n'y a aucun infini logarithmique pour l'intégrale (17), la valeur de cette intégrale prise le long de ce contour est nulle. Et cela est vrai, quand même la ligne $R'S'SR$ se raccourcit jusqu'à ne recouvrir que l'axe réel entre 1 et $\frac{1}{k^2}$, et la ligne $MNN'M'$ s'élargit jusqu'à recouvrir tout l'axe réel négatif. Or, supposons ces lignes dans ces positions finales. Chacune d'elles se composera de deux parties, dont l'une sera dans la couche supérieure et superposée à l'autre qui sera dans la couche inférieure. Mais plus précisément, par rapport à $MNN'M'$, les points ε et ε' devant être laissés au dehors de notre portion de surface, nous devons imaginer que la partie MN vient couvrir l'axe réel négatif de 0 à $a + \rho$ et de $a - \rho$ à ∞ , et former un demi-cercle de rayon ρ autour du point ε ; et que $M'N'$ vient couvrir l'axe réel négatif dans les mêmes étendues, et former un demi-cercle autour du point ε' . Ces demi-cercles ne sont pas superposés l'une à l'autre; ils recouvrent les deux moitiés d'un cercle du plan Z .

Maintenant, nous n'avons qu'à égaler à zéro la somme des intégrales prises le long des diverses parties du contour total que nous venons d'indiquer.

Le long des trois parties de MN , l'intégration donnera:

$$\int_0^{a+\rho} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} - \frac{\pi}{M_a} + \int_{a-\rho}^{\infty} \frac{dZ}{(Z-a)Mi};$$

le long des trois parties de $N'M'$, elle donnera:¹

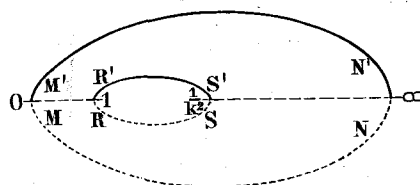
$$\int_{a-\rho}^{\infty} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} + \frac{\pi}{M_a} + \int_0^{a+\rho} \frac{dZ}{(Z-a)Mi};$$

¹ Pour la partie de $N'M'$ qui recouvre l'axe entre ∞ et $a - \rho$, l'intégration donne

$$\int_{\infty}^{a-\rho} \frac{dZ}{(Z-a)(-Mi)}.$$

Mais, on peut échanger entre elles les limites de l'intégrale en changeant en même temps le signe de la différentielle. Même remarque pour les autres intégrales.

Fig. 9 (sur le plan Z).



et le long des deux lignes $R'S'$ et SR :

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} + \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{dZ}{(Z-a)Mi}.$$

En ajoutant et égalant à zéro, on obtient, d'après (20):

$$\int_0^{a+\rho} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} + \int_{a-\rho}^{\infty} \frac{dZ}{(Z-a)Mi} = Pi.$$

§ 9.

Ce que nous venons de faire pour l'inversion des intégrales elliptiques peut se répéter relativement à toute intégrale Abélienne, c'est-à-dire, pour toute intégrale de la forme

$$(23) \quad z = \int^Z R(Z, U) dz,$$

où $R(Z, U)$ signifie une fonction rationnelle de Z et U , et U une fonction algébrique de Z dans le sens le plus général.¹

Lorsque la différentielle est rationnelle, le lieu fondamental, considéré seulement sous le point de vue de la forme, peut être conçu comme composé d'éléments de deux espèces, je veux dire (§ 5) de plans et de bandes logarithmiques. Pour composer les lieux fondamentaux des fonctions inverses des intégrales (23), une nouvelle forme d'éléments est nécessaire; mais une seule. Ce sont les parallélogrammes des couples de périodes qui naissent de la connexion multiple de la fonction algébrique.²

Le lieu fondamental de la fonction Z , définie par l'équation (23),

¹ Voir page 22 et 255, 256 de notre *Teorica delle funzioni di variabili complesse*.

² Le nombre de ces périodes est originairement toujours pair. En faisant dans la surface Riemannienne, représentative de la fonction algébrique, ce système de coupures que RIEMANN désigne par les symboles a_1 et b_1 , a_2 et b_2 , etc., dans le § 19 de sa *Theorie der Abel'schen Functionen* (dont nous omettons ici les coupures c_1 , etc.), on voit immédiatement que les quatre bords de chaque couple a et b se transforment dans les quatre côtés d'un parallélogramme.

pourra être conçu comme composé par autant de plans que l'intégrale (23) a d'infinis algébriques, par autant de bandes logarithmiques que l'intégrale a d'infinis logarithmiques moins un, et par autant de parallélogrammes que l'intégrale a de couples de périodes provenant de la connection algébrique. Ces couches se continuent l'une dans l'autre autour de points de ramification, dont le nombre (en points *simples*) égale le double du nombre des plans et parallélogrammes augmenté du nombre des bandes moins deux.

En faisant abstraction de la *charge*, ou système des valeurs portées par les points, on peut dire que ces trois formes d'éléments correspondent aux trois espèces de fonctions *Z uniformes* contenues dans la classe (23). Car, si une fonction *Z*, définie par une équation (23), est uniforme, son lieu fondamental (joint, lorsqu'il a des côtés, à tel nombre que ce soit de lieux congruents), ne pouvant avoir aucun point de ramification, sera formé d'une seule couche, c'est-à-dire, d'un plan, ou d'une bande logarithmique, ou d'un parallélogramme. Et la fonction uniforme sera rationnelle, ou simplement périodique, ou doublement périodique.

Quant à la forme des parallélogrammes, on remarquera qu'il n'y a d'essentiel que les différences de position (n'importe la nature géométrique) des côtés, c'est-à-dire, les périodes.

Ces couples de périodes et les diverses périodes logarithmiques sont, avec les différences de position des points de ramification, les données essentielles d'un lieu fondamental de la classe (23).

Si toutes les périodes d'une intégrale (23) se réduisent à zéro, les bandes et les parallélogrammes s'évanouissent, et le lieu fondamental peut être conçu comme réduit à une surface Riemannienne usuelle, représentative de la fonction *Z*, qui alors est algébrique.

Les lieux fondamentaux, que nous avons trouvés dans l'inversion des intégrales elliptiques, nous offrent les plus simples combinaisons du parallélogramme avec les plans et les bandes.¹

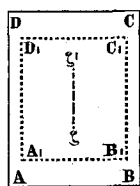
¹ Il n'en serait pas de même, si l'on prenait les intégrales de 2^{me} et 3^{me} espèce sous la forme typique de LEGENDRE.

Du reste, la forme sous laquelle nous avons pris ici les intégrales de 2^{me} et 3^{me} espèce est telle que la connection du parallélogramme avec le plan ou la bande n'est pas effectuée de la manière la plus générale, c'est-à-dire, le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points communs aux deux couches, sans d'autres particularités. Pour les

La plus simple combinaison de parallélogrammes entre eux nous est offerte par l'intégrale considérée par JACOBI dans le Mémoire qui a été l'origine de nos recherches.¹ Car, pour la fonction Z inverse de cette intégrale, le lieu fondamental est constitué seulement par *deux* parallélogrammes.

Si l'on veut supposer, avec JACOBI, que χ , λ , μ sont des quantités réelles, et si α , β sont aussi deux quantités réelles, ou deux quantités purement imaginaires; alors, Z marchant sur son axe réel, dz sera toujours réelle ou purement imaginaire, et, par conséquent, z devra toujours marcher parallèlement à l'un ou à l'autre axe de son plan. Partant, si l'on réduit la surface Riemannienne, représentative du radical, à être monodromique

Fig. 10
(sur le plan z).



pour l'intégrale par des coupures sur l'axe réel, les côtés du lieu fondamental deviendront parallèles aux axes du plan z . Ce lieu se composera donc de deux rectangles rectilignes $ABCD$ et $A_1B_1C_1D_1$ (fig. 10) également orientés, que nous pouvons concevoir se continuant l'un dans l'autre le long d'une ligne de passage aboutissant à deux points ζ et ζ' de ramification. Les grandeurs ζ et ζ' sont les valeurs de l'intégrale dans les deux points de la surface monodromique où

$\alpha + \beta Z$ est nul.

formes (13) et (17) il survient la particularité que la différence de position de ces points communs est une période. Par conséquent, dans les surfaces complètes, dont nous avons commencé de parler au § 7, ces points deviennent communs à trois couches, c'est-à-dire, se comportent en points de ramification, non *simples*, mais *doubles*.

¹ Voir cette intégrale page 346.