SUR LES UNITÉS ÉLECTRIQUES.

Extrait d'une lettre adressée à l'éditeur

PAR

J. BERTRAND
à PARIS.

MAXWELL dans son traité d'électricité et de magnetisme a, le premier je crois, appelé l'attention sur la contradiction entre les deux systèmes d'unités électriques, dits système électrodynamique et système électrostatique. Cette différence est telle, pour la caractériser par un seul exemple, que dans le premier, la résistance d'un fil conducteur est assimilée à une vitesse et dans le second à l'inverse d'une vitesse; de telles divergences qui d'ailleurs portent sur toutes les grandeurs sans exception, ne peuvent être acceptées que si considérant les unités comme arbitraires, on ne leur impose comme impérieusement nécessaire qu'une seule condition, celle d'être rigoureusement définies. Tout système alors est acceptable et l'on peut discuter sur la simplicité, non sur la légitimité de chacun.

Un système d'unités cependant doit remplir une condition oubliée jusqu'ici par les savants auteurs qui ont traité cette importante question. Les unités doivent être tellement choisies qu'il puisse exister des formules exprimant les théorèmes de la science et invariables malgré le changement des unités fondamentales. Par exemple, la surface d'un rectangle est le produit de la base par sa hauteur

$$S = B \times H.$$

Cette formule ne serait pas possible et aucune autre indépendante du choix des unités ne la remplacerait, s'il n'existait pas une dépendance convenue entre l'unité de longueur arbitraire et l'unité de surface qui s'en déduit.

En mécanique, la force centripète a pour expression

$$N = \frac{mv^2}{\rho}.$$

Cette formule ne serait plus vraie et aucune autre ne serait possible et commune à tous les choix d'unités, si l'on n'avait établi une dépendance entre l'unité de force, l'unité de vitesse et les unités qui restent arbitraires, celle de temps, de longueur et de masse. On a, d'après les notations de Maxwell

$$\text{Force} = MLT^{-2}$$

$$\text{Vitesse} = \frac{L}{T}$$

et grâce à ces conventions, on peut établir les équations de la mécanique qui restent invariables, ainsi que les formules résolvant un problème quelconque, quelles que soient les unités L, M et T. La remarque est fort importante.

Supposons qu'un problème ait été résolu, dans lequel l'inconnue soit un temps t, et les données, une force f, une longueur l, et une masse m; on aura:

$$t = F(l, m, f)$$

et si l'on change d'unités en rendant l'unité de longueur α fois, l'unité de temps β fois et l'unité de masse γ fois plus petite, nous devrons avoir, quels que soient α, β, γ

$$t\beta = F\left(l\alpha, m\gamma, f\frac{\alpha\gamma}{\beta^2}\right)$$

d'où l'on déduit sans peine,

$$F(l, m, f) = K\sqrt{\frac{ml}{f}}$$

K étant un nombre.

Si t est la durée de l'oscillation d'une pendule simple, de longueur l, de masse m et de poids p, on en conclut

$$t = \varphi(\alpha)\sqrt{\frac{lm}{p}} = \varphi(\alpha)\sqrt{\frac{l}{g}}$$

α étant l'angle d'écartement.

Si t est le temps de la vibration d'une corde de longueur l, de masse m, tendue par un poids p; on aura

$$t = K\sqrt{\frac{lm}{p}}$$

K étant un nombre, et aucune autre formule n'est possible.

Pour accepter ou rejeter un système d'unités électriques, il est important de savoir si, dans la solution des problèmes, mis en équations par la théorie, on peut, dans le système étudié, obtenir des formules indépendantes du choix des unités fondamentales. Le système électrodynamique remplit cette condition, le système électrostatique ne la remplit pas.

Sans remonter d'abord aux conventions fondamentales, pour les discuter, je prends les systèmes tels qu'ils sont acceptés et je me borne à rappeler les dimensions de deux unités importantes, l'intensité, et la résistance. On a, d'après les conventions, en nommant J l'intensité et R la résistance, dans le système électrodynamique

$$J = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}, \qquad R = \frac{L}{T}.$$

Je ne crois pas utile de rappeler la signification de ces symboles.

Pour le système électrostatique on a,

$$J = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}}{T^2}, \qquad R = \frac{T}{L}.$$

Supposons qu'un problème soit résolu dans lequel une partie mobile d'un courant étant attirée par une partie fixe du même courant, on calcule le temps T nécessaire à un certain mouvement; on aura nécessairement

$$\text{(A)} \qquad T = F(L,\ R,\ M,\ J)$$

L étant la longueur de la partie mobile, R la résistance totale du circuit, M la masse de la partie mobile et J l'intensité du courant telle que la source électrique le maintiendrait si le mouvement ne produisait pas une induction qui le trouble.

La fonction F dépendra de la définition géométrique du système.

Si l'on adopte le système électrodynamique, et que les unités de longueur, de temps et de masse, soient divisées par les facteurs arbitraires α, β, γ on devra avoir

$$\beta T = F\left(\alpha L,\ \frac{\alpha R}{\beta},\ \gamma M,\ \frac{J\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}}{\beta}\right)$$

et cette équation, on le démontre bien aisément, ne peut être satisfaite que si la fonction F est de la forme

$$F = \frac{L}{R}\,\Psi\left(\frac{LJ^2}{MR^2}\right).$$

On peut aller plus loin: Si R est très grand, l'influence de l'induction est insensible, le temps du mouvement, par conséquent la fonction F, ne dépend donc plus de R et l'on doit avoir, dans ce cas,

$$\Psi = K\sqrt{\frac{MR^2}{LJ^2}}$$

ce qui donne

$$T = K\frac{L}{R}\sqrt{\frac{MR^2}{LJ^2}} = K\sqrt{\frac{LM}{J^2}}$$

K étant une constante.

La fonction Ψ se réduisant à $\sqrt{\frac{MR^2}{LJ^2}}$ quand R est infini, peut être représentée par

$$\sqrt{\frac{MR^2}{LJ^2}}\left[1 + \Psi_1\left(\frac{LJ^2}{MR^2}\right)\right]$$

Ψ_1 devenant nul avec la variable dont elle dépend.

Telles sont les conséquences du système électrodynamique.

Acceptons maintenant le système électrostatique. Le changement des unités remplacera l'équation (A) par

$$\beta T = F\left(\alpha L,\ \frac{\beta R}{\alpha},\ \gamma M,\ \frac{J\gamma^{\frac{1}{2}}\alpha^{\frac{3}{2}}}{\beta^2}\right)$$

et cette équation n'est possible que si l'on a

$$T = KRL\,\Psi\left(\frac{J^2R^4L}{M}\right)$$

K étant un nombre.

Si l'on suppose, comme précédemment, que R soit très grand, F devant devenir indépendant de R, il faut que Ψ devienne de la forme $\sqrt[4]{\dfrac{M}{J^2R^4L}}$ et l'on aurait alors

$$T = K\frac{L^{\frac{3}{4}}M^{\frac{1}{4}}}{J^{\frac{1}{2}}}$$

et dans le cas général

$$T = K\frac{L^{\frac{3}{4}}M^{\frac{1}{4}}}{J^{\frac{1}{2}}}\left[1 + \Psi_1\left(\frac{M}{J^2R^4L}\right)\right]$$

Ψ_1 s'annulant avec la variable dont elle dépend.

Cette équation est inadmissible: quand R est infini, les forces mises en jeu ne dépendant pas de M, le temps, d'après les lois de la mécanique, doit être proportionnel à la racine carrée et non à la racine quatrième de M.

Si, confiant dans les deux systèmes, on veut concilier les deux formules et écrire

$$KLR\Psi\left(\frac{J^2R^4L}{M}\right) = K'\frac{L}{R}\Psi_1\left(\frac{LJ^2}{MR^2}\right)$$

il faut, on le démontre aisément, supposer

$$\Psi\left(\frac{J^2R^4L}{M}\right) = \sqrt[3]{\frac{M}{J^2R^4L}}$$

$$\Psi_1\left(\frac{LJ^2}{MR^2}\right) = \sqrt[3]{\frac{MR^2}{LJ^2}};$$

on aurait alors

$$T = K_1\frac{L^{\frac{2}{3}}M^{\frac{1}{3}}}{J^{\frac{2}{3}}R^{\frac{1}{3}}}$$

formule absurde qui donne par exemple T nul quand R est infini.

Il est donc démontré que l'un des deux systèmes est inacceptable et que c'est le système électrostatique.

A quoi cela tient-il?

Il eût été facile de le montrer en remontant aux conventions faites pour établir ce système et de réduire cette note à la remarque suivante.

En nommant e une quantité d'électricité statique, on *veut* que la force de répulsion de deux masses égales à e à la distance r soit représentée par $\frac{e^2}{r^2}$, sans coefficient.

Cela est parfaitement légitime, on en conclut que e est de la forme

$$e = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$$

mais on ajoute: l'intensité d'un courant est mesurée par la quantité d'électricité qui traverse une section dans l'unité de temps, l'intensité J est donc de la forme $\frac{e}{T}$, et l'on écrit

$$J = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}.$$

Il y a là une hypothèse contestable sur l'assimilation d'un courant à un flux d'électricité et une convention sur l'unité de courant. La convention assigne pour dimensions de J

$$J = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}$$

mais la formule d'Ampère, incontestée dans les conséquences pratiques, donne pour action de deux éléments de courant

$$F = \frac{kii' ds\, ds'}{r^2}\left(\cos\varepsilon - \frac{3}{2}\cos\theta\cos\theta'\right)$$

K étant un nombre. $\frac{ds\, ds'}{r^2}$ est un nombre, les cosinus aussi sont des nombres, il faut donc qui Kii' soit une force — et si ii', comme on l'exige équivaut à

$$\frac{L^3 M}{T^4},$$

ce produit ne peut représenter une force que si K est de la forme $\frac{T^2}{L^2}$.

Aucun problème ne pourra donc être résolu sans l'introduction d'un coefficient variable avec l'unité de longueur et l'unité de temps.

Le système électrostatique n'est acceptable qu'en vertu de ce principe: toute unité bien définie est légitime. Mais il ne satisfait pas à la condition principale imposée à tout système d'unités, celle de permettre des formules applicables à toutes les hypothéses en laissant indépendantes les trois unités de longueur, de temps et de masse.