UN THÉORÈME DE LA THÉORIE DES SÉRIES.

Extrait d'une lettre adressée à M. Mittag-Leffler

PAR

M. LERCH
à VINOHRADY.

Soit donnée une série de nombres entiers positifs

$$m_0, \ m_1, \ m_2, \ \ldots$$

dont chaque terme est un diviseur de tous les suivants, et soient

$$c_0, \ c_1, \ c_2, \ \ldots$$

des quantités complexes dont les parties réelles sont respectivement

$$\gamma_0, \ \gamma_1, \ \gamma_2, \ \ldots$$

et qui sont supposées positives et telles que la série $\sum \gamma_\nu$ soit divergente. Alors, dans tous les cas où la série

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu x^{m_\nu}$$

sera convergente pour chaque valeur de x moindre en valeur absolue que l'unité, elle définira une fonction de la variable x n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental $|x| \leqq 1$.

Car en posant

$$x = e^{\pi i\left(\frac{2a}{m_s} + ai\right)}$$

où a est un nombre entier et α une quantité réelle et positive on aura

$$\mathfrak{P}(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} c_\nu e^{\frac{2am_\nu}{m_s}\pi i - \alpha\pi m_\nu} + \sum_{\nu=s}^{\infty} c_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu}.$$

Or la série $\sum \gamma_\nu$ étant divergente et se composant de termes positifs il est aisé de voir que

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=s}^{\infty} \gamma_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu} = +\infty$$

d'où l'on a aussi

$$\lim_{\alpha=0} \sum_{\nu=s}^{\infty} c_\nu e^{-\alpha\pi m_\nu} = \infty$$

et par conséquent

$$\lim_{\alpha=0} \mathfrak{P}\left(e^{\pi i\left(\frac{2a}{m_s} + \alpha i\right)}\right) = \infty.$$

Donc la fonction $\mathfrak{P}(x)$ croît indéfiniment quand x s'approche d'une certaine manière des quantités de la forme $e^{\frac{2a}{m_s}\pi i}$ qui se présentent dans chaque partie de la circonférence $|x| = 1$. Par conséquent, cette ligne-ci est une ligne singulière de la fonction $\mathfrak{P}(x)$.