ZUR THEORIE DER KRUMMEN OBERFLÄCHEN

VON

R. LIPSCHITZ
in BONN.

Vor einiger Zeit wurde ich veranlasst, mich mit der Frage nach denjenigen Oberflächen zu beschäftigen, bei welchen die Differenz der Hauptkrümmungsradien in jedem Punkte denselben Werth hat. Die Methode zur Behandlung derartiger Aufgaben, welche von mir in den *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften* (Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. 14. December 1882 und 8. Februar 1883) entwickelt ist, giebt für die erwähnte Forderung eine angemessene Formulirung, und erlaubt, alle Oberflächen aufzusuchen, welche dieser Forderung und ausserdem noch einer gewissen Beschränkung genügen. Die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes einer solchen Oberfläche lassen sich mit Hülfe von elliptischen Integralen als Functionen von zwei unabhängigen Elementen darstellen. Nachdem Herr Hermite die Güte gehabt hat, die Ausdrücke in den Comptes rendus der Pariser Akademie v. 14. Februar 1887, S. 418,[1] mitzutheilen, erlaube ich mir, die Ableitung hier folgen zu lassen.

Wie in der angeführten Abhandlung denkt man sich in jedem Punkte der zu betrachtenden nicht abwickelbaren Oberfläche die Normale construirt, und werden die rechtwinkligen Coordinaten ξ, η, ζ des zu der Normale gehörenden Punktes einer Gauss'schen Kugel vermöge der Gleichungen

$$\xi = \cos\vartheta, \qquad \eta = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \zeta = \sin\vartheta\sin\varphi$$

[1] Vgl. Comptes rendus v. 21 Februar 1887, S. 534.

durch die unabhängigen Polarcoordinaten ϑ und φ ausgedrückt; es erstreckt sich ϑ von o bis π, φ von o bis 2π. Für einen Punkt der Oberfläche, dessen rechtwinklige Coordinaten x, y, z sind, bezeichnen ρ_1 und ρ_2 die Hauptkrümmungsradien, und wird die Lage der Hauptkrümmungsrichtungen durch den Stellungswinkel σ bestimmt. Zieht man durch den Punkt (x, y, z) eine Parallele zu der x-Axe, und projicirt jene auf die Tangentialebene, so bedeutet σ den Winkel, welchen die betreffende Projection mit der zu ρ_1 gehörenden Hauptkrümmungsrichtung bildet. Alsdann werden ρ_1, ρ_2, σ als Functionen der Variabeln ϑ und φ aufgefasst, und die a. a. O. in III mit (26) bezeichnete Gleichung

$$(1)\qquad \frac{\partial[\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}]}{\partial\varphi}+i\cos\vartheta[\rho_1+\rho_2+(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}]$$
$$=i\frac{\partial[\rho_1+\rho_2-(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}]}{\partial\vartheta},$$

in welcher $i=\sqrt{-1}$ ist, enthält die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Oberfläche existirt, zu welcher die Functionen ρ_1, ρ_2, σ gehören. Die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Oberfläche ergeben sich hierauf durch die Integration der a. a. O. in III, (27) aufgestellten Differentiale dx, dy, dz, bei welchen die Bedingungen der Integrabilität in Folge der befriedigten partiellen Differentialgleichung erfüllt sind. Die Ausdrücke von dx, dy, dz lassen sich nach I, (32) der Abhandlung *Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenem Ausdruck des Linearelements* (Sitzungsberichte der Berliner Akademie v. 10. Mai 1883) beziehungsweise als die reellen Theile der folgenden Verbindungen darstellen,

$$(2)\quad \left|\begin{aligned}
&-\sin\vartheta\Big(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\Big),\\
&(\cos\vartheta\cos\varphi+i\sin\varphi)\Big(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\Big),\\
&(\cos\vartheta\sin\varphi-i\cos\varphi)\Big(\frac{\rho_1+\rho_2}{2}(d\vartheta+i\sin\vartheta d\varphi)+\frac{\rho_1-\rho_2}{2}e^{-2i\sigma}(d\vartheta-i\sin\vartheta d\varphi)\Big).
\end{aligned}\right.$$

Um in der Gleichung (1) die Bestandtheile von einander zu trennen, in welchen die Summe, und diejenigen, in welchen die Differenz der

Hauptkrümmungsradien vorkommt, kann man dieselbe, nachdem sie mit $\sin\vartheta$ multiplicirt ist, in die folgende Gestalt bringen

$$(3)\qquad \frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi}\sin\vartheta - i\frac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta + \frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi} + i\frac{\partial[(\rho_1-\rho_2)e^{-2i\sigma}\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} = 0.$$

Demnach liefert die Trennung des Reellen und Imaginären die beiden partiellen Differentialgleichungen

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi}\sin\vartheta = -\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi} - \dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} \\[2ex] \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta}\sin^2\vartheta = \dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} - \dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\sin\vartheta\,\partial\varphi}. \end{cases}$$

Da die nach ϑ und φ genommenen partiellen Differentialquotienten der Summe $(\rho_1+\rho_2)$ durch die partiellen Differentialquotienten der Verbindungen $(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma$ und $(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma$ ausgedrückt sind, so leuchtet ein, dass, wenn zu der Bestimmung einer Oberfläche nur die beiden letzteren als Functionen von ϑ und φ gegeben sind, die für die Existenz der Oberfläche nothwendige und hinreichende Bedingung in einer einzigen, nur reelle Grössen enthaltenden partiellen Differentialgleichung der zweiten Ordnung besteht, welche feststellt, dass für das aus (4) abzuleitende Differential der Summe $(\rho_1+\rho_2)$ die Bedingung der Integrabilität erfüllt ist. Bei denjenigen Oberflächen, in welchen die Differenz $(\rho_1-\rho_2)$ constant ist, und die gegenwärtig ins Auge gefasst werden sollen, wird durch die so eben erwähnte partielle Differentialgleichung angegeben, in welcher Abhängigkeit der Stellungswinkel σ von den Variabeln ϑ und φ stehen muss, und sobald diese partielle Differentialgleichung erfüllt ist, erhält man zuerst $(\rho_1+\rho_2)$ und darauf x, y, z, die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes der Oberfläche, durch die Integration vollständiger Differentiale.

Ich suche jetzt die Oberflächen zu ermitteln, für welche die Differenz $(\rho_1-\rho_2)$ constant ist, ferner der Stellungswinkel σ nicht von der

Variable φ und nur von der Variable ϑ abhängt. Dann gehen die partiellen Differentialgleichungen (4) in die folgenden über

$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\varphi} = -\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta} \\[2ex] \dfrac{\partial(\rho_1+\rho_2)}{\partial\vartheta} = \dfrac{1}{\sin^2\vartheta}\,\dfrac{\partial[(\rho_1-\rho_2)\cos 2\sigma\sin^2\vartheta]}{\partial\vartheta}, \end{cases}$$

und die Bedingung der Integrabilität für das Differential $d(\rho_1+\rho_2)$ besteht in der folgenden gewöhnlichen Differentialgleichung der zweiten Ordnung, welche die Abhängigkeit des Stellungswinkels σ von der Variable ϑ charakterisirt

$$(6)\qquad \frac{d\left(\dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{d[(\rho_1-\rho_2)\sin 2\sigma\sin^2\vartheta]}{d\vartheta}\right)}{d\vartheta} = 0.$$

Die Grösse $(\rho_1-\rho_2)$ bildet, da sie constant ist, einen fortzulassenden Factor. Mit Hülfe von zwei willkürlichen Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ ergiebt sich sofort die vollständige Integration

$$(7)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sin\vartheta}\,\dfrac{d(\sin 2\sigma\sin^2\vartheta)}{d\vartheta} = -\mathfrak{M}, \\[2ex] \sin 2\sigma\sin^2\vartheta = \mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta. \end{cases}$$

Hieraus folgt, indem

$$(8)\qquad \sin^4\vartheta - (\mathfrak{L}+\mathfrak{M}\cos\vartheta)^2 = F(\cos\vartheta)$$

gesetzt wird

$$(9)\qquad \cos 2\sigma\sin^2\vartheta = \sqrt{F(\cos\vartheta)}.$$

Wegen der Gleichungen (5) erhält die Summe $(\rho_1+\rho_2)$ den Ausdruck

$$(10)\qquad \rho_1+\rho_2 = (\rho_1-\rho_2)\left(\int\frac{d(\cos 2\sigma\sin^2\vartheta)}{d\vartheta}\,\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right),$$

wo bei der auszuführenden Integration eine additive willkürliche Constante hinzukommt. Indem man über diese so wie über die schon eingeführten Constanten $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ auf alle zulässigen Arten verfügt, wird die Gesammtheit der Oberflächen, welche den aufgestellten Forderungen entsprechen, erschöpft.

Das in (10) vorkommende Integral kann durch theilweise Integration so umgeformt werden

$$(11)\qquad \int \frac{d(\cos 2\sigma \sin^2\vartheta)}{d(\cos\vartheta)} \frac{d(\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta} = \cos 2\sigma + 2\int \cos 2\sigma \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} d\vartheta$$

$$= \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + 2\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta} \cos\vartheta\, d\vartheta.$$

Vermöge dessen bekommen die Differentiale der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Oberfläche beziehungsweise die Ausdrücke

$$(12)\qquad \begin{cases} dx = \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{2} \left\{ -\left(2\displaystyle\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi \right) \sin\vartheta\, d\vartheta \right. \\ \qquad\qquad \left. + (\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta)\, d\varphi \right\}, \\[2ex] dy = \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{2} \left\{ \left[\left(2\displaystyle\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi \right) \cos\vartheta\cos\varphi \right. \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\sin\varphi \right] d\vartheta + \left[-\left(2\displaystyle\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \mathfrak{M}\varphi \right)\sin\varphi \right. \\ \qquad\qquad \left. \left. - \dfrac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\cos\varphi \right] \sin\vartheta\, d\varphi \right\}, \\[2ex] dz = \dfrac{\rho_1 - \rho_2}{2} \left\{ \left[\left(2\displaystyle\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \frac{2\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi \right) \cos\vartheta\sin\varphi \right. \right. \\ \qquad \left. - \dfrac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\varphi \right] d\vartheta + \left[\left(2\displaystyle\int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta + \mathfrak{M}\varphi \right)\cos\varphi \right. \\ \qquad\qquad \left. \left. - \dfrac{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta\sin\varphi \right] \sin\vartheta\, d\varphi \right\}. \end{cases}$$

Durch die Integration wird ausser dem auf der rechten Seite von (11) erscheinenden elliptischen Integrale noch ein zweites eingeführt; der Kürze halber will ich dieselben so bezeichnen

$$(13)\qquad \int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\cos\vartheta\, d\vartheta = P, \qquad \int \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^3\vartheta}\, d\vartheta = Q.$$

Auf diese Weise entstehen für x, y, z die Darstellungen

$$(14)\quad \begin{cases} x = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}[(2P + \mathfrak{M}\varphi)\cos\vartheta - 2Q + \mathfrak{L}\varphi] \\ y = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\left((2P + \mathfrak{M}\varphi)\sin\vartheta\cos\varphi - \frac{\mathfrak{L}\cos\vartheta + \mathfrak{M}}{\sin\vartheta}\sin\varphi\right) \\ z = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2}\left((2P + \mathfrak{M}\varphi)\sin\vartheta\sin\varphi + \frac{\mathfrak{L}\cos\vartheta + \mathfrak{M}}{\sin\vartheta}\cos\varphi\right), \end{cases}$$

und ρ_1, ρ_2, σ sind durch die Gleichungen bestimmt

$$(15)\quad \begin{cases} \sin 2\sigma \sin^2\vartheta = \mathfrak{L} + \mathfrak{M}\cos\vartheta \\ \cos 2\sigma \sin^2\vartheta = \sqrt{F(\cos\vartheta)} \\ \quad \rho_1 + \rho_2 = (\rho_1 - \rho_2)\left(2P + \frac{\sqrt{F(\cos\vartheta)}}{\sin^2\vartheta} + \mathfrak{M}\varphi\right). \end{cases}$$

Die beiden mit P und Q bezeichneten Integrale unterscheiden sich insofern von einander, als für die besondern Werthe der Constanten $\mathfrak{L} = 0$, $\mathfrak{M} \gtrless 0$ und $\mathfrak{L} \gtrless 0$, $\mathfrak{M} = 0$ das erstere die Eigenschaft, ein elliptisches Integral zu sein, verliert, während das zweite dieselbe beibehält.

Bei der Voraussetzung, dass $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ gleichzeitig verschwinden, wird

$$F(\cos\vartheta) = \sin^4\vartheta,$$

mithin

$$P = \int \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\, d\vartheta = \log\sin\vartheta + \mathfrak{A},$$

$$Q = \int \frac{d\vartheta}{\sin\vartheta} \quad = \log \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\vartheta + \mathfrak{B},$$

und daher nehmen x, y, z die Gestalt an

$$(16)\quad \begin{cases} x = (\rho_1 - \rho_2)\left((\log\sin\vartheta + \mathfrak{A})\cos\vartheta - \log\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} - \mathfrak{B}\right) \\ y = (\rho_1 - \rho_2)(\log\sin\vartheta + \mathfrak{A})\sin\vartheta\cos\varphi \\ z = (\rho_1 - \rho_2)(\log\sin\vartheta + \mathfrak{A})\sin\vartheta\sin\varphi. \end{cases}$$

Hier ist die betreffende Oberfläche eine Rotationsfläche.

Bonn d. 4. April 1887.