BEWEIS EINES SATZES AUS DER THEORIE DER SUBSTITUTIONEN

VON

R. LIPSCHITZ
in BONN.

In der Abhandlung *Sur la théorie des formes quadratiques ternaires indéfinies* (Journal für Mathematik, Bd. 47, S. 312) hat Herr HERMITE den Satz ausgesprochen, dass, wenn eine Substitution dreier Variabeln nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution hervorbringt, die zu der Substitution gehörende mit einer unbestimmten Grösse s gebildete charakteristische Determinante nur für solche Werthe von s verschwinden kann, die gleich μ^{ten} Wurzeln der Einheit sind. Dieser Satz ist von Herrn CAMILLE JORDAN in dem *Mémoire sur les équations différentielles linéaires à intégrale algébrique* (Journal für Mathematik, Bd. 84, S. 112) in der folgenden Weise auf Substitutionen von beliebig vielen Variabeln ausgedehnt worden. Jede Substitution von n Variabeln

$$(1)\qquad \left|\begin{array}{l} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{array}\right.$$

welche nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeugt, kann in die kanonische Gestalt

$$(2)\qquad t_1 = \omega_1 u_1, \qquad t_2 = \omega_2 u_2, \qquad \ldots, \qquad t_n = \omega_n u_n$$

gebracht werden, wo die sämmtlichen Constanten $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, unter denen mehrere einander gleich oder auch alle von einander verschieden sein können. Den bei der Verwandlung von (1) in die kanonische Gestalt anzuwendenden Transformationen entsprechen solche Transformationen der zu (1) gehörenden bilinearen Form

$$(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)z_1 + \ldots + (a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n)z_n, \tag{3}$$

durch welche die bilineare Form

$$y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n \tag{4}$$

in sich selbst übergeht. Wenn für die Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Substitution

$$\left|\begin{array}{l} y_1 = g_{11}u_1 + g_{12}u_2 + \ldots + g_{1n}u_n \\ y_2 = g_{21}u_1 + g_{22}u_2 + \ldots + g_{2n}u_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ y_n = g_{n1}u_1 + g_{n2}u_2 + \ldots + g_{nn}u_n \end{array}\right. \tag{5}$$

benutzt wird, und man das zu g_{hk} gehörende, durch die von Null verschiedene Determinante $|g_{hk}|$ dividirte adjungirte Element mit G_{hk} bezeichnet, so muss für die Variabeln z_h die Substitution gebraucht werden

$$\left|\begin{array}{l} z_1 = G_{11}w_1 + G_{12}w_2 + \ldots + G_{1n}w_n \\ z_2 = G_{21}w_1 + G_{22}w_2 + \ldots + G_{2n}w_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ z_n = G_{n1}w_1 + G_{n2}w_2 + \ldots + G_{nn}w_n, \end{array}\right. \tag{6}$$

damit die vorgeschriebene Gleichung

$$y_1z_1 + y_2z_2 + \ldots + y_nz_n = u_1w_1 + u_2w_2 + \ldots + u_nw_n \tag{7}$$

entsteht. Bildet man dagegen die Gleichung

$$\begin{aligned}(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n)z_1 &+ \ldots + (a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n)z_n \\ = (c_{11}u_1 + \ldots + c_{1n}u_n)w_1 &+ \ldots + (c_{n1}u_1 + \ldots + c_{nn}u_n)w_n,\end{aligned} \tag{8}$$

so leuchtet ein, dass die mit der rechten Seite correspondirende Substitution

$$(9)\qquad \begin{cases} t_1 = c_{11}u_1 + c_{12}u_2 + \ldots + c_{1n}u_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n = c_{n1}u_1 + c_{n2}u_2 + \ldots + c_{nn}u_n \end{cases}$$

hervorgebracht wird, indem man zuerst die zu (5) gehörende inverse Substitution

$$(10)\qquad \begin{cases} t_1 = G_{11}x_1 + G_{21}x_2 + \ldots + G_{n1}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n = G_{1n}x_1 + G_{2n}x_2 + \ldots + G_{nn}x_n, \end{cases}$$

hierauf (1) und zuletzt (5) anwendet. Unter der Voraussetzung des von Herrn CAMILLE JORDAN herrührenden Satzes muss die Substitution (5) so eingerichtet sein, dass (9) die Gestalt von (2) annimmt. Da nun (2) nach μ-facher Wiederholung unzweifelhaft die identische Substitution liefert, so erkennt man leicht, dass, wenn eine Substitution (1) in die kanonische Gestalt (2) gebracht werden kann, auch umgekehrt (1) die Eigenschaft haben muss, nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution zu erzeugen. Mithin folgt aus dem angeführten Satze des Herrn CAMILLE JORDAN, dass eine Substitution (2) die genannte Eigenschaft hat oder nicht hat, je nachdem sie in die kanonische Gestalt (2) verwandelt werden kann oder nicht.

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeuge, können auf verschiedene Weise ausgedrückt werden. Zu der Substitution (2) gehört die mit einer unbestimmten Grösse s gebildete charakteristische Determinante

$$(\omega_1 - s)(\omega_2 - s)\ldots(\omega_n - s),$$

und dieselbe ist ausserdem so beschaffen, dass alle ihre Elementartheiler von der ersten Ordnung sind, oder, was auf dasselbe hinauskommt, dass der grösste gemeinsame Theiler aller partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$

Ordnung, durch die Determinante dividirt, einen Bruch liefert, dessen Zähler constant ist, und dessen Nenner nur verschiedene lineare Functionen von s als Factoren enthält. Sobald eine Substitution (1) in die kanonische Form (2) gebracht werden kann, verwandelt sich die mittelst der unbestimmten Grösse s aus (3) und (4) gebildete bilineare Form

$$(11)\qquad (a_{11}y_1 + \dots + a_{1n}y_n)z_1 + \dots + (a_{n1}y_1 + \dots + a_{nn}y_n)z_n - s(y_1z_1 + \dots + y_nz_n)$$

durch die Substitutionen (5) und (6) in die bilineare Form

$$(12)\qquad \omega_1 u_1 w_1 + \dots + \omega_n u_n w_n - s(u_1 w_1 + \dots + u_n w_n),$$

Weshalb die zu (11) gehörende Determinante

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} - s, & a_{12}\quad, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}\quad, & a_{22} - s, & \dots, & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\quad, & a_{n2}\quad, & \dots, & a_{nn} - s \end{vmatrix}$$

ebenfalls die angeführten Eigenschaften der obigen Determinante

$$(\omega_1 - s)(\omega_2 - s)\dots(\omega_n - s)$$

besitzt. Auch folgt unmittelbar aus den Principien der Abhandlung, in welcher Herr Weierstrass den Begriff der Elementartheiler eingeführt hat, *Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen*, (Monatsbericht der Berliner Akademie v. 18 Mai 1868, S. 314), dass, wenn die bezeichneten Determinanten in ihren Elementartheilern übereinstimmen, die bilineare Form (11) in die Form (12) transformirt werden kann. Hiernach ist es gestattet, die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass die Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution liefert, so auszusprechen, dass die Determinante (13) nur für solche Werthe von s, die μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, verschwinde, und dass ihre sämmtlichen Elementartheiler von der ersten Ordnung seien.[1] Der zweiten Bedingung kann man nach einer oben gemachten Bemerkung

[1] S. H. Minkowski, *Über den arithmetischen Begriff der Aequivalenz und über die endlichen Gruppen linearer ganzzahliger Substitutionen*, Journal für Mathematik, Bd. 100, S. 450.

auch den Ausdruck geben, dass der grösste gemeinsame Theiler der sämmtlichen partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, durch die Determinante dividirt, gleich einem Bruche wird, dessen Zähler constant und dessen Nenner gleich einem Product aus linearen Functionen von s ist, die alle unter einander verschieden sind.

Die Kriterien für die in Rede stehende Eigenschaft einer Substitution von n Variabeln lassen sich, wie ich jetzt zeigen werde, in der zuletzt erwähnten Fassung durch sehr einfache Betrachtungen zur Evidenz bringen, bei denen von der Zerlegung der rationalen ganzen Functionen einer Veränderlichen in Factoren des ersten Grades kein Gebrauch gemacht wird.

Es möge eine gegebene Substitution (1) in μ-facher Wiederholung zur Anwendung kommen, indem man die nach einander einzuführenden Systeme von je n Variabeln mit $x_h, y_h, y_h^{(2)}, \ldots, y_h^{(\mu)}$ bezeichnet. Alsdann ergiebt das System (1) mit Benutzung einer unbestimmten Grösse s das System von Gleichungen

$$(14)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 - sy_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n - sy_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n - sy_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n - sy_n, \end{array}\right.$$

und ebenso entsteht nach einander eine Reihe von Systemen, dessen erstes ich hinschreibe

$$(15)\qquad \left\{\begin{array}{l} y_1 - sy_1^{(2)} = a_{11}y_1^{(2)} + a_{12}y_2^{(2)} + \ldots + a_{1n}y_n^{(2)} - sy_1^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n - sy_n^{(2)} = a_{n1}y_1^{(2)} + a_{n2}y_2^{(2)} + \ldots + a_{nn}y_n^{(2)} - sy_n^{(2)}. \end{array}\right.$$

Wenn man nun das System (15) mit s, die auf dasselbe folgenden beziehungsweise mit $s^2, s^3, \ldots, s^{\mu-1}$ multiplicirt, alle addirt, und die Abkürzung

$$(16)\qquad \eta_h = y_h + sy_h^{(2)} + \ldots + s^{\mu-1}y_h^{(\mu)}$$

einführt, so erhält man das System von Gleichungen

$$(17)\qquad \left\{\begin{array}{l} x_1 - s^{\mu} y_1^{(\mu)} = a_{11}\eta_1 + a_{12}\eta_2 + \cdots + a_{1n}\eta_n - s\eta_1 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ x_n - s^{\mu} y_n^{(\mu)} = a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \cdots + a_{nn}\eta_n - s\eta_n. \end{array}\right.$$

Ich mache jetzt die Voraussetzung, dass die Substitution (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution erzeuge, oder, dass, in den eingeführten Bezeichnungen, die Gleichungen

$$(18)\qquad y_1^{(\mu)} = x_1, \quad \ldots, \quad y_n^{(\mu)} = x_n$$

gelten. Dadurch wird aus (17) das System

$$(19)\qquad \left\{\begin{array}{l} (1 - s^{\mu})x_1 = (a_{11} - s)\eta_1 + a_{12}\eta_1 + \cdots + \qquad a_{1n}\eta_n \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ (1 - s^{\mu})x_n = \qquad a_{n1}\eta_1 + a_{n2}\eta_2 + \cdots + (a_{nn} - s)\eta_n. \end{array}\right.$$

Weil nun die n Verbindungen η_h nach (16) gleich homogenen linearen Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind, welche folgendermassen ausgedrückt werden sollen,

$$(20)\qquad \eta_h = q_{h1}y_1 + q_{h2}y_2 + \cdots + q_{hn}y_n,$$

so kann durch das System (19) für jeden Werth von s, welcher den Ausdruck $(s^{\mu} - 1)$ nicht zum Verschwinden bringt, nur diejenige Abhängigkeit der Variabeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$ von den Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dargestellt werden, welche ursprünglich in (1) ausgedrückt ist; oder, wenn jede der Gleichungen in (19) durch $(1 - s^{\mu})$ dividirt wird, so müssen die auf der rechten Seite befindlichen homogenen linearen Functionen von $y_1, y_2, \ldots, y_n$ respective mit denjenigen identisch sein, die in (1) auftreten. Wenn man daher die in (13) dargestellte Determinante mit $\mathfrak{S}(s)$, die zu dem System (20) gehörende Determinante $|q_{hk}|$ mit $\mathfrak{Q}(s)$, die zu der Substitution (1) gehörende $|a_{hk}|$ mit A bezeichnet, so folgt aus der hervorgehobenen Übereinstimmung zwischen (1) und (19) die Gleichung

$$(20')\qquad A(1 - s^{\mu})^n = \mathfrak{S}(s)\mathfrak{Q}(s).$$

Die Determinante A muss wegen der Gleichungen (18) so beschaffen sein, dass

$$A^{\mu} = 1 \tag{21}$$

ist. Die Gleichung (20') zeigt, dass $\mathfrak{F}(s)$ nur für solche Werthe von s verschwinden kann, die μ^{te} Wurzeln der Einheit sind, wie behauptet war, und giebt gleichzeitig an, wie die Determinante $\mathfrak{Q}(s)$ durch $\mathfrak{F}(s)$ bestimmt wird.

Wenn man annimmt, dass die Determinante $\mathfrak{F}(s)$ so gebildet werde, als ob die Elemente a_{hk} von einander unabhängig wären, so kann man die zu (13) gehörenden partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung als partielle Differentialquotienten von $\mathfrak{F}(s)$ nach den a_{hk} darstellen, und erhält aus (19) durch Auflösung für die Verbindungen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ die Ausdrücke

$$(22)\qquad \begin{cases} \eta_1 = \dfrac{\dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{11}}x_1 + \dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{21}}x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{n1}}x_n}{\mathfrak{F}(s)}(1-s^{\mu}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \eta_n = \dfrac{\dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{1n}}x_1 + \dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{2n}}x_2 + \ldots + \dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{nn}}x_n}{\mathfrak{F}(s)}(1-s^{\mu}). \end{cases}$$

Nach (16) sind die η_h gleich homogenen linearen Functionen der Variabeln $y_1, y_2, \ldots, y_n$, deren Coefficienten ganze Functionen der unbestimmten Grösse s sind; sie verwandeln sich durch Anwendung von (1) in homogene lineare Functionen von $x_1, x_2, \ldots, x_n$, deren Coefficienten ebenfalls ganze Functionen von s sind. Diese Coefficienten finden sich auf der rechten Seite von (22) individuell dargestellt. Mithin muss jeder der n^2 Ausdrücke

$$\frac{\dfrac{\partial\mathfrak{F}(s)}{\partial a_{hk}}}{\mathfrak{F}(s)}(1-s^{\mu})$$

gleich einer ganzen Function von s sein. Es hat daher der grösste gemeinsame Theiler der zu $\mathfrak{F}(s)$ gehörenden partiellen Determinanten der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung die Eigenschaft, durch $\mathfrak{F}(s)$ dividirt, und mit der

Function $(1 - s^\mu)$, die nur ungleiche Factoren enthält, multiplicirt, gleich einer ganzen Function von s zu sein, womit der zweite Theil der Behauptung bewiesen ist.

Wenn umgekehrt eine Substitution (1) so beschaffen ist, dass die zu derselben gehörende Determinante $\mathfrak{F}(s)$ die so eben erwähnten Eigenschaften besitzt, so lassen sich mit n unbeschränkt veränderlichen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n Ausdrücke bilden, wie sie sich auf der rechten Seite von (22) befinden, und dieselben sind nach den getroffenen Voraussetzungen ganze Functionen der unbestimmten Grösse s vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade. Dieselben mögen nach den Potenzen von s entwickelt, und wie in (16) bezeichnet werden. Dann folgt aus (22) das System (19), und wenn hier die Ausdrücke (16) der η_h eingesetzt werden, so erkennt man, dass wegen der Unbestimmtheit der Grösse s das System (1) oder (14), hierauf (15) gelten muss, und alle darauf folgenden beschriebenen Systeme gelten müssen, und dass als letztes das System (18) besteht. Diese Erscheinungen drücken aber aus, dass (1) nach μ-facher Wiederholung die identische Substitution hervorbringt. Hiermit ist der Nachweis vollendet, dass die aufgestellten Bedingungen nothwendig und hinreichend sind.

Bonn d. 4. April 1887.