DIE MINIMALFLÄCHEN
MIT EINEM
SYSTEM SPHÄRISCHER KRÜMMUNGSLINIEN

VON

HERMANN DOBRINER
in FRANKFURT a. M.

In engem Anschluss an die in meiner letzten Abhandlung [1] benutzten Methoden lässt sich auch die Frage nach den Minimalflächen erledigen, die ein System sphärischer Krümmungslinien besitzen. Diese repräsentiren in gewissem Sinne nur einen Grenzfall der entsprechenden Flächen constanter Krümmung, und man hätte an den Entwickelungen der citirten Abhandlung verhältnissmässig nur geringe Veränderungen vorzunehmen, um auch für die neuen Flächen die constituirenden Gleichungen zu finden. Indessen gelangt man zu denselben schneller und erhält sie auch sofort in ihrer einfachsten Gestalt, wenn man sich, statt auf die Gleichungen (5) zurückzugehn, der WEIERSTRASS'schen Formeln bedient. Die Anwendung derselben ist in diesem Falle ermöglicht, wenn man die Krümmungsradien in ihrer Abhängigkeit von den Parametern der Krümmungslinien kennt. Ich werde daher der Kürze wegen den Gang, der zu den Ausdrücken für die Krümmungsradien führt, nur andeuten, dann mit Hilfe der WEIERSTRASS'schen Formeln die Gleichungen der Fläche aufstellen und erst am Schluss die Gleichung der Kugel geben, auf welcher die Krümmungslinie $v = Const.$ liegt.

---

[1] Dieses Journal Bd. 9, p. 73—104.

Die Bedingung $\rho_1 = -\rho_2 = \rho$ hat die Relationen

$$P = Q = \frac{1}{f} = -\frac{1}{g} = \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

zur Folge, welche man an Stelle des Gleichungssystems (9) der weitern Untersuchung zu Grunde zu legen hat. Man findet dann zunächst die Gleichungen (14) wiederum in ihrer alten Gestalt, für $R\cos\sigma$ eine im Vergleich mit (15) complicirte Formel, und schliesslich für q_1 und q_2 Differentialgleichungen, die ihrer Form nach nicht mit (20) sondern mit (25) zusammenfallen; dies kennzeichnet das vorliegende Problem zu einem Grenzfall des frühern. Ersetzt man in (25)

$$p_1 \text{ durch } iq_1, \qquad p_2 \text{ durch } q_2 \text{ und } u \text{ durch } iv,$$

so erhält man die Gleichungen für q_1 und q_2. Ihre expliciten Ausdrücke in v gehn durch dieselben Vertauschungen aus (33) hervor, mithin ist auch das System der l, m, n wesentlich identisch mit dem der λ, μ, ν. Bezeichnen λ', μ', ν' die Ausdrücke, in welche λ, μ, ν übergehn, wenn man in (49) u durch iv ersetzt, so ist

$$l_h = \mu'_h, \qquad m_h = \nu'_h, \qquad n_h = \lambda'_h. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,3)}$$

Hinsichtlich der Quantitäten p_1 und p_2, sowie überhaupt hinsichtlich aller von dem Parameter u abhängigen Grössen behalten die frühern Resultate unverändert Geltung.

Nun war (p. 102)

$$P = -\frac{\Sigma_h n_h \pi_h}{\Sigma_h l_h \lambda_h}$$

und darin (p. 103)

$$\pi_1 = -\cdot\sqrt{s}\,\frac{\vartheta_1\vartheta_2(a)\vartheta_3(a)}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_{11}^2(a)}\cdot\frac{\vartheta_1(u_1)}{\vartheta_{11}(u_1)}, \text{ etc.}$$

wenn für den Factor $\frac{du_1}{du}$ sein Werth aus (30) gesetzt wird. Mithin ist

$$\sqrt{\rho} = \frac{1}{P} = -\frac{\Sigma_h \mu'_h \lambda_h}{\Sigma_h \lambda'_h \pi_h},$$

$$\sqrt{\rho} = \frac{i\vartheta_{11}^2(a)}{\sqrt{s}\,\vartheta_{11}(2a)}\cdot\frac{e^{r_2}\Sigma_h\vartheta_h\vartheta_h(a)\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1+a) + e^{-r_2}\Sigma_h\vartheta_h\vartheta_h(a)\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1-a)}{\Sigma_h\vartheta_h^2\vartheta_h(u_1)\vartheta_h(v_1)}.$$

Die drei Summen $\sum_h$ lassen sich mit Hilfe der Thetaformel:[1]

$$\sum_h \vartheta_h \vartheta_h(x)\vartheta_h(y)\vartheta_h(z) = 2\vartheta_{11}(s)\vartheta_{11}(s-x)\vartheta_{11}(s-y)\vartheta_{11}(s-z)$$

$$2s = x + y + z \qquad (h=1,2,3)$$

durch je ein Thetaprodukt wiedergeben, so dass man für $\sqrt{\rho}$ den einfachen Ausdruck:

$$\text{(a)} \qquad \sqrt{\rho} = \frac{i\vartheta_{11}^2(a)}{\sqrt{s}\,\vartheta_{11}(2a)} \cdot \frac{e^{v_2}\vartheta_{11}(\sigma + a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - a) + e^{-v_2}\vartheta_{11}(\sigma - a)\vartheta_{11}(\sigma_1 + a)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)}$$

erhält, wenn man abkürzend

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \sigma &= \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\sqrt{s}}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{u + iv}{2}, \\ \sigma_1 &= \frac{u_1 - v_1}{2} = \frac{\sqrt{s}}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{u - iv}{2} \end{aligned}$$

setzt.

Benutzt man ferner die Bezeichnungen

$$\text{(c)} \qquad \left| \begin{aligned} \tau &= \quad u_2 + v_2 = -\frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}(u_1 + v_1) + Const., \\ \tau_1 &= -u_2 + v_2 = +\frac{\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)}(u_1 - v_1) + Const. \end{aligned} \right.$$

und setzt

$$\text{(d)} \qquad \left| \begin{aligned} \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma + a)}{\vartheta_{11}(\sigma - a)} &= t, \\ \frac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1 - a)}{\vartheta_{11}(\sigma_1 + a)} &= t_1, \end{aligned} \right.$$

so wird

$$\frac{dt}{d\sigma} = -\frac{e^{\tau}\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)}{\vartheta_{11}^2(a)\vartheta_{11}^2(\sigma - a)},$$

$$\frac{dt_1}{d\sigma_1} = +\frac{e^{\tau_1}\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma_1)}{\vartheta_{11}^2(a)\vartheta_{11}^2(\sigma_1 + a)};$$

---

[1] Man erhält dieselbe durch Subtraction aus zwei von JACOBI angegebenen Formeln (Werke, Bd. I, p. 507 (3) und (4)); sie ist ein specieller Fall der allgemeinen Formel, die Herr PRYM die RIEMANN'sche Thetaformel genannt hat.

und

$$\rho = \frac{\vartheta_{11}'^2}{s} \cdot \frac{d\sigma}{dt} \cdot \frac{d\sigma_1}{dt_1} (1 + tt_1)^2.$$

Die Grössen t, t_1 sowie σ, σ_1 und τ, τ_1 sind für reelle Werthe der Variabeln u und v conjugirt complex, wenn man die Constante a als rein imaginär voraussetzt.

Von einem Ausdrucke für den Krümmungsradius, der sich von dem obigen nur durch einen constanten Faktor unterscheidet, ausgehend, leitet Enneper[1] die Weierstrass'schen Gleichungen für die Coordinaten eines Punktes der Minimalfläche ab. Hier erscheinen sie in der Form:

$$x = R\int \frac{\vartheta_{11}'^2}{s} (1 - t^2) \frac{d\sigma}{dt} d\sigma,$$

$$y = R\int \frac{i\vartheta_{11}'^2}{s} (1 + t^2) \frac{d\sigma}{dt} d\sigma,$$

$$z = R\int \frac{2\vartheta_{11}'^2}{s} t \frac{d\sigma}{dt} d\sigma;$$

wenn man durch das vorgesetzte R den reellen Teil des nachfolgenden Integrals bezeichnet. Es ist also:

$$x = R\int \frac{\vartheta_{11}' \vartheta_{11}^2(a)}{s\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)} [e^{\tau}\vartheta_{11}^2(\sigma + a) - e^{-\tau}\vartheta_{11}^2(\sigma - a)] d\sigma,$$

$$y = R\int \frac{\vartheta_{11}' \vartheta_{11}^2(a)}{is\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)} [e^{\tau}\vartheta_{11}^2(\sigma + a) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma - a)] d\sigma,$$

$$z = R\int - \frac{2\vartheta_{11}' \vartheta_{11}^2(a)}{s\vartheta_{11}(2a)\vartheta_{11}^2(\sigma)} \vartheta_{11}(\sigma + a)\vartheta_{11}(\sigma - a) d\sigma,$$

und nach der Integration:

$$x = - R\frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma + 2a) + e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma)},$$

$$y = - R\frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma + 2a) - e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma)},$$

$$z = - R\frac{2\vartheta_{11}^4(a)}{s\vartheta_{11}^2(2a)} \cdot \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta_{11}'} \left[\frac{d \log \vartheta_{11}(\sigma)}{d\sigma} - \sigma \frac{d^2 \log \vartheta_{11}(a)}{da^2}\right]$$

[1] Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 9, p. 103—107.

oder, wenn man noch die reelle Constante

$$-\frac{s\vartheta_{11}^2(2a)}{2\vartheta_{11}^4(a)} \quad \text{mit} \quad C$$

bezeichnet:

$$\text{(e)} \quad \begin{cases} Cx = \dfrac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma+2a)+e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma-2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma)} + \dfrac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)+e^{-\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)}{2\vartheta_{11}(\sigma_1)}, \\[2ex] Cy = \dfrac{e^{\tau}\vartheta_{11}(\sigma+2a)-e^{-\tau}\vartheta_{11}(\sigma-2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma)} - \dfrac{e^{\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)-e^{-\tau_1}\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)}{2i\vartheta_{11}(\sigma_1)}, \\[2ex] Cz = \dfrac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\left[\dfrac{\vartheta'_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta'_{11}(\sigma_1)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)} - v_1\dfrac{d^2\log\vartheta_{11}(a)}{da^2}\right]. \end{cases}$$

Ich gehe dazu über die Gleichung der Kugel aufzustellen, auf der die Krümmungslinie $v = Const.$ liegt.

Man setze

$$Cz + v_1\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\cdot\frac{d^2\log\vartheta_{11}(a)}{da^2} = Cz_1$$

und

$$\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}[\vartheta'_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta'_{11}(\sigma_1)] = \Delta,$$

so dass

$$\Delta = C\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)z_1$$

wird. Dann ist

$$C^2\vartheta_{11}^2(\sigma)\vartheta_{11}^2(\sigma_1)(x^2+y^2+z_1^2)$$
$$= \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\left[e^{2v_2}\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)+e^{-2v_2}\vartheta_{11}(\sigma-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)\right]$$
$$+\Delta^2+\vartheta_{11}^2(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma-2a)+\vartheta_{11}^2(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a).$$

Nun stellt die Determinante Δ eine gerade θ-Function zweiter Ordnung mit der Characteristik (o) in Bezug auf das Argument $\frac{u_1}{2}$ dar; sie lässt sich daher durch zwei besondere, von einander unabhängige θ-Functionen gleicher Art linear ausdrücken. Wir wählen die beiden Darstellungen:

$$\Delta = \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}[\vartheta'_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)-\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta'_{11}(\sigma_1)]$$
$$= A\,\vartheta_{11}(\sigma+2a)\vartheta_{11}(\sigma_1-2a)+B\,\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)$$
$$= A_1\vartheta_{11}(\sigma-2a)\vartheta_{11}(\sigma_1+2a)+B_1\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1),$$

und bestimmen die Coefficienten A und A_1, indem wir $\sigma_1 = 0$, $\sigma = v_1$ setzen, und die Coefficienten B, B_1, indem wir $\sigma_1 = \pm 2a$, $\sigma = \pm 2a + v_1$, annehmen.

Wir finden

$$\Delta = C\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)z_1$$

$$= + \frac{\vartheta_{11}(v_1)}{\vartheta_{11}(v_1 + 2a)}\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a)$$

$$+ \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\frac{\vartheta'_{11}(v_1 + 2a)\vartheta_{11}(2a) - \vartheta_{11}(v_1 + 2a)\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1 + 2a)}$$

$$= - \frac{\vartheta_{11}(v_1)}{\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)$$

$$+ \vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\frac{\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)\vartheta_{11}(2a) + \vartheta_{11}(v_1 - 2a)\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)},$$

und daraus:

$$\text{(f)}\quad \left|\begin{aligned} &\frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(\sigma - 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)}{\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)} \\ &= Cz_1\,\frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ &- \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\cdot\frac{e^{2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ &+ \frac{\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}}\cdot\frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)}. \end{aligned}\right.$$

Δ^2 ist eine gerade θ-Function vierter Ordnung, die wir linear durch drei von einander unabhängige Thetaproducte darstellen können. Setzen wir die Gleichung in der Form

$$\Delta^2 = A_2\left[\vartheta^2_{11}(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma - 2a) + \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a)\right]$$

$$+ B_2\vartheta_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1)\Delta + C_2\vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta^2_{11}(\sigma_1)$$

an und entwickeln, indem wir $\sigma_1 = \sigma - v$ setzen, beide Seiten nach Potenzen von σ, so erhalten wir durch Vergleichung der Coefficienten von σ^0, σ^1, σ^2:

$$A_2 = -1,$$

$$B_2 = \frac{2\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1},$$

$$C_2 = \frac{\vartheta'^2_{11}(2a) - \vartheta_{11}(2a)\vartheta''_{11}(2a)}{\vartheta'^2_{11}} + \frac{\vartheta_{11}(v_1 + 2a)\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta^2(v_1)}$$

$$+ \frac{\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}} \cdot \frac{\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(v_1) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(v_1)\vartheta''_{11}(v_1) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(v_1)}{\vartheta^2(v_1)}$$

$$= \frac{2\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(2a) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta''_{11}(2a) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}} - \frac{\vartheta^2_{11}(2a)\vartheta''_{11}(v_1)}{\vartheta'^2_{11}\vartheta_{11}(v_1)}.$$

Mithin ist:

$$\text{(g)} \quad \left\{ \begin{aligned} &\Delta^2 + \vartheta^2_{11}(\sigma_1)\vartheta_{11}(\sigma + 2a)\vartheta_{11}(\sigma - 2a) + \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta_{11}(\sigma_1 + 2a)\vartheta_{11}(\sigma_1 - 2a) \\ &\quad = \vartheta^2_{11}(\sigma)\vartheta^2_{11}(\sigma_1)\left[\frac{2\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} C z_1 + C_2\right]. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichung der Kugel erhält man nun, wenn man (f) und (g) berücksichtigt, in folgender Gestalt:

$$\text{(h)} \qquad C^2(x^2 + y^2) + (Cz + V)^2 = W,$$

$$\text{(i)} \quad \left\{ \begin{aligned} V &= \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} : \frac{d^2 \log \vartheta_{11}(a)}{da^2} v_1 - \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} \\ &\qquad - \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{2\vartheta_{11}(v_1)} \\ W &= \left[\frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{d \log \vartheta_{11}(v_1)}{dv_1} + \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{2\vartheta_{11}(v_1)}\right]^2 \\ &\quad - \frac{\vartheta^2_{11}(2a)\vartheta''_{11}(v_1)}{\vartheta'^2_{11}\vartheta_{11}(v_1)} - \frac{\vartheta_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{e^{2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 + 2a) - e^{-2v_2}\vartheta'_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ &\qquad + \frac{\vartheta'_{11}(2a)}{\vartheta'_{11}} \cdot \frac{e^{2v_2}\vartheta_{11}(v_1 + 2a) + e^{-2v_2}\vartheta_{11}(v_1 - 2a)}{\vartheta_{11}(v_1)} \\ &\qquad + \frac{2\vartheta'_{11}\vartheta'^2_{11}(2a) - 2\vartheta'_{11}\vartheta_{11}(2a)\vartheta''_{1}(2a) + \vartheta'''_{11}\vartheta^2_{11}(2a)}{\vartheta'^3_{11}}. \end{aligned} \right.$$

Die Krümmungslinien $v_1 = Const.$ liegen also sämmtlich auf Kugeln, die ihre Mittelpunkte auf der z-Axe haben. Die Curven $v_1 = 0, \pm 2\pi i, \pm 4\pi i, \ldots$ bilden insofern Ausnahmen, als ihre osculirenden Kugeln in Ebenen degeneriren, die der xy-Ebene parallel sind. Man kann übrigens leicht nachweisen, dass diese Curven alle einander ähnlich sind.

Die Krümmungslinien $u = 0, \pm 2\omega, \pm 4\omega, \ldots$ sind gleichfalls plan und zwar in Ebenen gelegen, welche durch die z-Axe gehn. Sie zerlegen die Minimalfläche in congruente Teile, von denen jeder mit dem benachbarten Teilstücke zur Deckung gelangt, wenn man die ganze Fläche um die z-Axe dreht und zwar um den Winkel

$$\varepsilon = 4ia + \omega \frac{2i\vartheta'_{11}(a)}{\vartheta_{11}(a)},$$

worin ω der Periodicitätsmodul der ϑ-Functionen ist.