ÜBER EINE GATTUNG TRANSCENDENTER RAUMCOORDINATEN

VON

OTTO STAUDE
in DORPAT.

Die bekannte Darstellung der geodätischen Linie auf den Flächen 2. Grades durch hyperelliptische Functionen zweier Veränderlicher und verschiedene ähnliche Anwendungen der genannten Functionen weisen auf eine Gattung transcendenter Raumcoordinaten hin, durch deren Einführung jene Anwendungen auf einen gemeinsamen Ausgangspunct zurückgeführt werden. Statt zur Darstellung einzelner Raumgebilde einen oder zwei Parameter durch die Integralsummen des JACOBI'schen Umkehrproblems zu definiren, kann man nämlich zuerst darauf ausgehen, alle Puncte des Raumes durch drei unabhängige Summen von je drei hyperelliptischen Integralen darzustellen und die geometrische Discussion entsprechender räumlicher Gebilde an den Gebrauch dieser transcendenten Coordinaten zu knüpfen. Im Folgenden sind als typische Formen drei verschiedene Darstellungen der Puncte des Raumes durch drei unabhängige Parameter der angedeuteten Art in Kürze zusammengestellt.

Dabei ist nicht sowohl auf die mannigfachen geometrischen Sätze Rücksicht genommen, welche als gemeinsame Folgerungen aus jeder einzelnen dieser Darstellungen sich ergeben, als vielmehr auf mechanische Bedeutungen der letzteren. An den herangezogenen einfachsten Beispielen mechanischer Vorgänge, deren analytische Behandlung auf hyperelliptische Functionen 1. oder 2. Ordnung führt, wird überdies auf eine charakteristische Unterscheidung der betreffenden Bewegungsvorgänge hingewiesen. Bei der Anwendung der hyperelliptischen Functionen auf die Darstellung der Bewegungen kommt nämlich wesentlich in Frage, wie viele von den reellen Periodicitätsmoduln, respective Systemen zusammengehöriger Periodicitätsmoduln bei dem einzelnen Falle zur Geltung gelangen. Dieser Frage parallel geht die andere, ob die betreffende Bewegung eine unmittelbar periodische oder eine nur unter gewissen Bedingungen periodisch werdende ist. Eine darauf beruhende Gruppirung aller Bewegungsvorgänge[1] findet an den hier behandelten Darstellungen der Raumpuncte ihre einfachste Erläuterung.

§ 1. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale* 2. *Gattung vom Geschlecht* 2.

Die gewöhnlichen Coordinaten x, y, z eines Punctes im Raume drücken sich durch die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν desselben in der bekannten Weise aus:

$$
(1) \qquad \left\{
\begin{aligned}
x &= \sqrt{\frac{(\alpha-\lambda)(\alpha-\mu)(\alpha-\nu)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}},\\
y &= \sqrt{\frac{(\beta-\lambda)(\beta-\mu)(\beta-\nu)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)}},\\
z &= \sqrt{\frac{(\gamma-\lambda)(\gamma-\mu)(\gamma-\nu)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}},
\end{aligned}
\right.
$$

wo α, β, γ die Constanten des elliptischen Coordinatensystems bedeuten und die Ungleichungen

$$-\infty < \lambda < \gamma < \mu < \beta < \nu < \alpha$$

bestehen.

---

[1] Vgl. *Über periodische und bedingt periodische Bewegungen*, Sitzungsberichte der Naturforschergesellschaft bei der Universität Dorpat, 1886; *Über bedingt periodische Bewegungen*, ebend., 1887.

Zwischen den elliptischen Coordinaten λ, μ, ν und drei neuen Coordinaten u_1, u_2, u_3 mögen nun die folgenden Relationen angenommen werden:

$$
(2)\qquad \left|\begin{aligned}
u_1 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_2 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_3 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},
\end{aligned}\right.
$$

worin:

$$
(3)\qquad r(\rho) = (\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)
$$

ist und λ_0, μ_0 zwei besondere Werthe der gleichnamigen Coordinaten λ, μ bedeuten. Indem man aus diesen 3 Gleichungen, welche das Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 2. Gattung[1] vom Geschlecht 2 enthalten, die symmetrischen Functionen (1) der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν berechnet, erhält man x, y, z als eindeutige Functionen der drei neuen Coordinaten u_1, u_2, u_3 dargestellt, nämlich:

$$
(4)\qquad \left|\begin{aligned}
x &= \frac{\theta}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\alpha-\lambda_0}\,\frac{\theta_{45}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} + \frac{\theta_{40}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)}E(u_1, u_2, u_3)\right\},\\
y &= \frac{\theta_{43}}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\beta-\lambda_0}\,\frac{\theta_{35}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} - \frac{\theta_{03}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)}E(u_1, u_2, u_3)\right\},\\
z &= \frac{\theta_{41}}{\theta_{45}}\left\{\sqrt{\gamma-\lambda_0}\,\frac{\theta_{51}(u_1, u_2)}{\theta(u_1, u_2)} - \frac{\vartheta_{01}(u_1, u_2)}{\theta_{50}(u_1, u_2)}E(u_1, u_2, u_3)\right\},
\end{aligned}\right.
$$

worin:

$$
(5)\qquad \begin{aligned}
E(u_1, u_2, u_3) = u_3 &+ \frac{\theta_{45}''^{(11)} + \theta_{45}''^{(21)}}{\theta_{45}}u_1 + \frac{\theta_{45}''^{(12)} + \theta_{45}''^{(22)}}{\theta_{45}}u_2\\
&- \frac{\partial \log\theta(u_1, u_2)}{\partial u_1} - \frac{\partial \log\theta(u_1, u_2)}{\partial u_2}.
\end{aligned}
$$

---

[1] Vgl. Clebsch-Gordan, *Theorie der Abel'schen Functionen*, Leipzig 1866, S. 150.

Dabei ist, mit den modificirten WEIERSTRASS'schen Indices[1] bezeichnet,

$$\theta_{ik}(u_1, u_2) = \vartheta_{ik}(v_1, v_2),$$

wo $\vartheta_{ik}(v_1, v_2)$ die gewöhnliche Thetafunction zweier Argumente v_1, v_2 und dreier Parameter a_{11}, a_{12}, a_{22} und ferner

$$(6) \qquad \left| \begin{aligned} & v_1 = \frac{u_1 B_2 - u_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \frac{\pi i}{2}, \qquad v_2 = \frac{A_1 u_2 - A_2 u_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} \frac{\pi i}{2}; \\ & a_{11} = -\frac{C_1 B_2 - C_2 B_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi, \qquad a_{12} = -\frac{A_1 C_2 - A_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi, \\ & a_{22} = -\frac{A_1 D_2 - A_2 D_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1}\pi \end{aligned} \right.$$

zu setzen ist. Die reellen Constanten dieser Ausdrücke haben die Werthe:

$$(7) \qquad A_h = \int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_h, \qquad B_h = -\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, \qquad C_h = \int_{\lambda_0}^{\gamma} d\omega'_h, \qquad D_h = -\int_{\alpha}^{\infty} d\omega'_h;$$

sie sind auf reellem Integrationswege mit den Differentialen:

$$d\omega_1 = \frac{(\rho - \mu_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \quad d\omega_2 = \frac{(\rho - \lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \quad d\omega'_1 = \frac{(\rho - \mu_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, \quad d\omega'_2 = \frac{(\rho - \lambda_0)d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}$$

zu berechnen, in welchen $\sqrt{\pm r}$ den positiven Werth der betreffenden Quadratwurzel bedeutet.

Aus der in (4) gegebenen Parameterdarstellung aller Raumpuncte durch eindeutige vierfach periodische Functionen dreier unabhängiger Argumente u_1, u_2, u_3 gehen als specielle Fälle die verschiedenen bekannten Parameterdarstellungen im Gebiete der confocalen Flächen 2. Grades hervor:

Die Functionen (4) sind in u_3 linear; für $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2$ mit zwei Constanten a_1, a_2, erhält man daher in (4) die Puncte einer geraden

[1] Vgl. Acta mathematica, Bd. 8, S. 84.

Linie, welche, wie ihre Differentialgleichungen in elliptischen Coordinaten:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0,\\ &\frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0,\end{aligned}\right.$$

erkennen lassen, mit den Flächen

$$\nu=\alpha,\qquad \nu=\beta,\qquad \mu=\gamma,\qquad \mu=\mu_0,\qquad \lambda=\lambda_0$$

des confocalen Flächensystems der elliptischen Coordinaten je 2 unendlich nahe Puncte gemein hat, also gemeinsame Tangente der Flächen $\lambda=\lambda_0$ und $\mu=\mu_0$ ist[1]. Die Formeln (4) liefern in diesem Falle mit $u_3=ct$, unter c eine Constante und unter t die Zeit verstanden, zugleich die Gleichungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes im Raume und die Beziehung zwischen den beiderseitigen Integrationsconstanten in den zwei von Jacobi gegebenen Formen[2] der Gleichungen der Trägheitsbewegung als der Integralgleichungen des Systems von Differentialgleichungen, welches aus (8) unter Hinzufügung der dritten Gleichung

$$(8')\quad \frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=c\,dt$$

entsteht.

Für $\lambda=\lambda_0$ verschwinden in den 3 Gleichungen (2) die ersten Glieder der rechten Seiten, und zwischen den entstehenden 3 Summen u_1, u_2, u_3 von je 2 Integralen besteht die Relation:

$$(9)\qquad E(u_1,\ u_2,\ u_3)=0,$$

die mit Rücksicht auf die Definition (5) nichts anderes ist, als die Darstellung der Summe zweier Integrale 2. Gattung u_3 durch die Summen je zweier Integrale 1. Gattung u_1 und u_2. Die Gleichung (9) ist die

---

[1] Vgl. Klein, *Zur geometrischen Deutung des Abel'schen Theorems*, Mathem. Ann. Bd. 28, S. 533.

[2] Vgl. Jacobi, *Vorlesungen über Dynamik, herausg. von* Clebsch, S. 233.

Gleichung des Ellipsoides $\lambda = \lambda_0$ in den Coordinaten u_1, u_2, u_3. Zugleich reduciren sich die Formeln (4) für die Puncte dieses Ellipsoides auf die bekannten Formeln:[1]

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{a - \lambda_0}} &= \frac{\theta \theta_{45}(u_1, u_2)}{\theta_{45} \theta(u_1, u_2)}, \\ \frac{y}{\sqrt{\beta - \lambda_0}} &= \frac{\theta_{43} \theta_{35}(u_1, u_2)}{\theta_{45} \theta(u_1, u_2)}, \\ \frac{z}{\sqrt{\gamma - \lambda_0}} &= \frac{\theta_{41} \theta_{51}(u_1, u_2)}{\theta_{45} \theta(u_1, u_2)}. \end{aligned} \right.$$

Besteht zwischen u_1, u_2, u_3 neben der Gleichung (9) noch die fernere Gleichung $u_2 = a_2$, so erhält man in (10) die geodätischen Linien und zugleich die Gleichungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes auf dem Ellipsoid $\lambda = \lambda_0$, deren Differentialgleichungen lauten:

$$\frac{(\mu - \lambda_0) d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \frac{(\nu - \lambda_0) d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = 0$$

$$\frac{(\mu - \mu_0)(\mu - \lambda_0) d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \frac{(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0) d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = c dt.$$

Man hat in der letzteren Auffassung u_1 durch die Gleichung:

$$u_1 = c \int_{t_0}^{t} \frac{(\mu_0 - \lambda_0) dt}{(\mu - \lambda_0)(\nu - \lambda_0)}$$

mit einer Constanten t_0 als eindeutige Function von t für alle reellen Werthe von t definirt zu denken.[2] In den Formeln (4) vereinigen sich also die Darstellungen der Trägheitsbewegung eines materiellen Punctes im Raume und auf der Fläche zweiten Grades.

---

[1] Vgl. Acta mathematica, Bd. 8, S. 84.

[2] Vgl. WEIERSTRASS, *Über geodätische Linien auf dem dreiaxigen Ellipsoid,* Monatsberichte der Berliner Akademie 1861, S. 986.

§ 2. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale* 3. *Gattung vom Geschlecht* 2.

Die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν mögen ferner ersetzt werden durch 3 Coordinaten u_1, u_2, u_3, welche mit ihnen verbunden sind durch folgende Gleichungen:

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
u_1 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_2 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_3 &= \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int_{\gamma}^{\mu} \frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},
\end{aligned}\right.$$

wo jetzt unter $r(\rho)$, anders als in § 1, eine ganze Function 6. Grades:

$$(2)\qquad r(\rho) = -(\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)(\lambda_1-\rho)$$

verstanden wird und λ_0, λ_1, μ_0 ($\lambda_1 < \lambda_0$) specielle Werthe der gleichnamigen Coordinaten sind. Es ist daher jetzt u_3 eine Summe von hyperelliptischen Integralen 3. Gattung mit den logarithmischen Unendlichkeitspuncten $\rho = \infty$.

Die Berechnung der symmetrischen Functionen § 1, (1) der oberen Grenzen λ, μ, ν der Integralsummen u_1, u_2, u_3 giebt jetzt:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\lambda_1)}} &= \frac{P(u_1,\ u_2,\ u_3)}{T(u_1,\ u_2,\ u_3)},\\
\frac{y}{\sqrt{(\beta-\lambda_0)(\beta-\lambda_1)}} &= \frac{Q(u_1,\ u_2,\ u_3)}{T(u_1,\ u_2,\ u_3)},\\
\frac{z}{\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\gamma-\lambda_1)}} &= \frac{R(u_1,\ u_2,\ u_3)}{T(u_1,\ u_2,\ u_3)},
\end{aligned}\right.$$

worin T, P, Q, R die Bedeutung haben:

$$(4)\qquad T(u_1, u_2, u_3)$$

$$=\sqrt{(\alpha-\lambda_0)P^2(u_1, u_2, u_3)+(\beta-\lambda_0)Q^2(u_1, u_2, u_3)+(\gamma-\lambda_0)R^2(u_1, u_2, u_3)+(\lambda_0-\lambda_1)S^2(u_1, u_2, u_3)},$$

$$(5)\quad\begin{cases} P(u_1, u_2, u_3) = \theta_{05}(c_1, c_2)\{e^{iu_3'}\theta_{40}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu_3'}\theta_{40}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ Q(u_1, u_2, u_3) = \theta_{21}(c_1, c_2)\{e^{iu_3'}\theta_{03}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu_3'}\theta_{03}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ R(u_1, u_2, u_3) = \theta_{23}(c_1, c_2)\{e^{iu_3'}\theta_{01}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu_3'}\theta_{01}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \\ S(u_1, u_2, u_3) = \theta_{40}(c_1, c_2)\{e^{iu_3'}\theta_{05}(u_1-c_1, u_2-c_2) - e^{-iu_3'}\theta_{05}(u_1+c_1, u_2+c_2)\}, \end{cases}$$

wo ferner:

$$(6)\qquad u_3' = u_3 - i\frac{\partial \log \theta_{45}(c_1, c_2)}{\partial c_1}u_1 - i\frac{\partial \log \theta_{45}(c_1, c_2)}{\partial c_2}u_2$$

ist und die rein imaginären Constanten c_1, c_2 die Werthe haben:

$$(7)\qquad c_1 = \int_{\lambda_1}^{-\infty}\frac{(\rho-\mu_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \qquad c_2 = \int_{\lambda_1}^{-\infty}\frac{(\rho-\lambda_0)d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}.$$

Die Argumente und Parameter der Thetafunctionen haben die Werthe wie in den Formeln § 1, (6), (7) nur dass in diesen $r(\rho)$ jetzt die neue Bedeutung (2) besitzt. Die Quadratwurzel T verschwindet, wie leicht aus bekannten Sätzen über das gleichzeitige Verschwinden mehrerer Thetafunctionen $\theta_{ik}(u_1, u_2)$ hergeleitet werden kann, für kein reelles Werthepaar u_1, u_2, u_3; sie hat überdies, wie auch P, Q, R, S für reelle Argumente u_1, u_2, u_3 auch reelle Werthe. Die doppelt gestrichene Quadratwurzel bedeutet den positiven Werth von T.

Die Darstellung (3) der Puncte des Raumes durch fünffach periodische Functionen der drei Argumente u_1, u_2, u_3 ist im reellen Gebiete eine eindeutige, sobald man für T einmal das positive Vorzeichen festgesetzt hat. Aus dieser Parameterdarstellung aller Raumpuncte ergeben sich folgende specielle Formen:

Wenn man die beiden Variablen u_1, u_2 constant, gleich a_1, a_2 setzt, so bleibt in den Formeln (3) nur u_3' variabel, und man übersieht, dass bei den gemachten Festsetzungen die Formeln (3) eine Ellipse darstellen, deren Mittelpunct der Coordinatenanfang ist. Aus den Differentialgleichungen dieser Ellipse in elliptischen Coordinaten:

$$(8)\qquad \left|\begin{aligned}&\frac{(\lambda-\mu_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\mu_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\mu_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0,\\ &\frac{(\lambda-\lambda_0)d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\frac{(\mu-\lambda_0)d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\frac{(\nu-\lambda_0)d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=0,\end{aligned}\right.$$

folgt anderseits sofort, dass diese Ellipse mit den Flächen

$$\nu=\alpha,\qquad \nu=\beta,\qquad \mu=\gamma,\qquad \mu=\mu_0,\qquad \mu=\lambda_0,\qquad \lambda=\lambda_1,$$

so oft sie denselben begegnet, je zwei unendlich nahe Puncte gemein hat, also die Flächen μ_0, λ_0, λ_1 je in zwei diametral gegenüberliegenden Puncten berührt.[1]

Mit $u_3=gt$ hat man in (3) unmittelbar die Gleichungen der Centralbewegung eines materiellen Punctes x, y, z unter Einfluss der vom Coordinatenanfang ausgehenden Anziehungskraft von der Grösse g^2r, unter r die Entfernung des bewegten Punctes von letzterem verstanden.[2]

Für $\lambda=\lambda_0$ verschwinden in den 3 Gleichungen (1) die ersten Glieder der rechten Seiten und zwischen den entstehenden 3 Summen von je 2 Integralen besteht die Relation:

$$(9)\qquad u_3=\frac{1}{2i}\log\frac{\theta(u_1+c_1,\ u_2+c_2)}{\theta(u_1-c_1,\ u_2-c_2)}+i\frac{\partial\log\theta_{45}(c_1,\ c_2)}{\partial c_1}u_1+i\frac{\partial\log\theta_{45}(c_1,\ c_2)}{\partial c_2}u_2,$$

welche die Darstellung der Summe zweier Integrale 3. Gattung u_3 durch die Summen je zweier Integrale 1. Gattung u_1, u_2 ist. Man kann diese Relation auch schreiben:

$$\frac{e^{iu'_3}}{e^{-iu'_3}}=\frac{\theta(u_1+c_1,\ u_2+c_2)}{\theta(u_1-c_1,\ u_2-c_2)}.$$

---

[1] Vgl. *Über Verallgemeinerungen des* GRAVES*'schen Theorems in der analytischen Mechanik*, Berichte d. K. Sächs. Ges. d. W., 1886; ferner KLEIN: *Zur geometrischen Deutung des* ABEL*'schen Theorems der hyperelliptischen Integrale*, Mathematische Annalen, Bd. 28.

[2] Vgl. JACOBI, a. a. O., S. 234.

Die Formeln (3) reduciren sich in Folge derselben auf:

$$
(10) \qquad \left|\begin{aligned}
\frac{x}{\sqrt{(\alpha-\lambda_0)(\alpha-\lambda_1)}} &= \frac{\theta\,\theta_{45}(u_1,\ u_2)}{T},\\
\frac{y}{\sqrt{(\beta-\lambda_0)(\beta-\lambda_1)}} &= \frac{\theta_{43}\,\theta_{35}(u_1,\ u_2)}{T},\\
\frac{z}{\sqrt{(\gamma-\lambda_0)(\gamma-\lambda_1)}} &= \frac{\theta_{41}\,\theta_{51}(u_1,\ u_2)}{T},
\end{aligned}\right.
$$

mit

$$
T = \sqrt{(\alpha-\lambda_0)\theta^2\theta_{45}^2(u_1,\,u_2) + (\beta-\lambda_0)\theta_{43}^2\theta_{35}^2(u_1,\,u_2) + (\gamma-\lambda_0)\theta_{41}^2\theta_{51}^2(u_1,\,u_2) + (\lambda_0-\lambda_1)\theta_{45}^2\theta^2(u_1,\,u_2)},
$$

wie leicht aus den Additionstheoremen der Thetafunctionen folgt. Diese Formeln (10) gehen ihrerseits mit $\lambda_1 = -\infty$ in die Formeln § 1, (4) über, da neben (10) noch die Gleichung:

$$
\sqrt{\frac{(\mu-\lambda_1)(\nu-\lambda_1)}{(\alpha-\lambda_1)(\beta-\lambda_1)(\gamma-\lambda_1)}} = \frac{\theta_{45}\,\theta(u)}{T}
$$

besteht. Die in den Gleichungen (10) enthaltene Darstellung der Puncte des Ellipsoides λ_0 durch zwei unabhängige Parameter ist im reellen Gebiete eindeutig.

Besteht neben der Gleichung (9) auch noch die Gleichung $u_2 = a_2$, so erhält man in (10) die Puncte derjenigen Curven auf dem Ellipsoid λ_0, welche von den eben erwähnten Ellipsen umhüllt werden und ähnlich wie die geodätischen Linien verlaufen, eindeutig durch den Parameter u_1 dargestellt. Macht man u_1 durch die Formel:

$$
u_1 = \int_{t_0}^{t} \frac{g(\mu_0-\lambda_0)\,dt}{(\mu-\lambda_0)(\nu-\lambda_0)}
$$

eindeutig von der Zeit t abhängig, so sind die Gleichungen (10) die Bewegungsgleichungen eines Punctes, der auf dem Ellipsoid λ_0 unter dem Einfluss der Centralkraft $g^2 r$ sich bewegt.

In der Parameterdarstellung (3) vereinigen sich also die Gleichungen der freien und der an das Ellipsoid λ_0 gebundenen Bewegung eines materiellen Punctes unter Einfluss einer centralen Anziehungskraft, welche der Entfernung direct proportional ist.

§ 3. *Darstellung der Puncte des Raumes durch die Umkehrfunctionen hyperelliptischer Integrale* I. *Gattung vom Geschlecht* 3.

Es sollen endlich die elliptischen Coordinaten λ, μ, ν mit 3 anderen Coordinaten u_1, u_2, u_3 durch die folgenden Relationen verbunden sein:

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
u_1 &= \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_2 &= \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},\\
u_3 &= \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}} + \int\limits_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}} + \int\limits_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}},
\end{aligned}
\right.
$$

worin:

$$
(2)\qquad r(\rho) = (\alpha-\rho)(\beta-\rho)(\gamma-\rho)(\mu_0-\rho)(\lambda_0-\rho)(\lambda_1-\rho)(\lambda_2-\rho)
$$

und μ_0, λ_0, λ_1, $\lambda_2 (\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2)$ besondere Werthe der gleichnamigen Coordinaten sind. Die Integrale in diesen Gleichungen sind von der I. Gattung vom Geschlecht 3.

Um die symmetrischen Functionen der elliptischen Coordinaten λ, μ, ν durch u_1, u_2, u_3 darzustellen, setzt man:

$$
(3)\qquad \theta\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'\end{pmatrix}(u_1, u_2, u_3) = \vartheta\begin{pmatrix}\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3\\ \varepsilon_1'\varepsilon_2'\varepsilon_3'\end{pmatrix}(v_1, v_2, v_3) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m_3} e^{A+2V}
$$

mit:

$$
A = a_{11}\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)^2 + a_{22}\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)^2 + a_{33}\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)^2
$$

$$
+ 2a_{23}\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right) + 2a_{31}\left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right) + 2a_{12}\left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right),
$$

$$
V = \left(m_1+\frac{\varepsilon_1}{2}\right)\left(v_1+\varepsilon_1'\frac{\pi i}{2}\right) + \left(m_2+\frac{\varepsilon_2}{2}\right)\left(v_2+\varepsilon_2'\frac{\pi i}{2}\right) + \left(m_3+\frac{\varepsilon_3}{2}\right)\left(v_3+\varepsilon_3'\frac{\pi i}{2}\right).
$$

Dabei bestehen zwischen u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3 die Relationen:

$$(4) \qquad v_h = (c_{h1} u_1 + c_{h2} u_2 + c_{h3} u_3)\pi i, \qquad (h = 1, 2, 3)$$

und haben die 9 Coefficienten c_{h1}, c_{h2}, c_{h3} die Bedeutung:

$$c_{h_1 k_1} = \frac{1}{\Delta}(A_{k_2}^{h_2} A_{k_3}^{h_3} - A_{k_3}^{h_2} A_{k_2}^{h_3}),$$

wo die Indicestripel $h_1 h_2 h_3$ und $k_1 k_2 k_3$ unabhängig von einander die Zahlentripel 123, 231, 312 durchlaufen und

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix}.$$

Die Parameter a_{hk} der Thetafunction haben die Werthe:

$$(5) \qquad a_{hk} = -(c_{h1} B_1^k + c_{h2} B_2^k + c_{h3} B_3^k)\pi, \qquad (h, k = 1, 2, 3)$$

wobei $a_{hk} = a_{kh}$. Endlich sind unter A_h^k, B_h^k die auf reellem Integrationswege berechneten reellen Constanten zu verstehen:

$$(6) \qquad \begin{aligned} A_h^1 &= 2\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_h - 2\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_h + 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B_h^1 &= 2\int_{\lambda_2}^{\lambda_1} d\omega_h' \\ A_h^2 &= -2\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_h + 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B_h^2 &= -2\int_{\lambda_0}^{\gamma} d\omega_h' \\ A_h^3 &= 2\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_h, & B_h^3 &= 2\int_{\mu_0}^{\beta} d\omega_h', \end{aligned}$$

mit folgender Bedeutung der Differentiale $d\omega_h$ und $d\omega_h'$:

$$(7) \qquad \begin{aligned} d\omega_1 &= \frac{(\rho - \mu_0)\,d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, & d\omega_2 &= \frac{(\rho - \lambda_0)\,d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, & d\omega_3 &= \frac{(\rho - \mu_0)(\rho - \lambda_0)\,d\rho}{2\sqrt{r(\rho)}}, \\ d\omega_1' &= \frac{(\rho - \mu_0)\,d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, & d\omega_2' &= \frac{(\rho - \lambda_0)\,d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, & d\omega_3' &= \frac{(\rho - \mu_0)(\rho - \lambda_0)\,d\rho}{2\sqrt{-r(\rho)}}, \end{aligned}$$

unter $\sqrt{\pm r}$ allgemein die positive Quadratwurzel aus der positiven reellen Grösse $\pm r$ verstanden.

Indem man endlich die Thetafunctionen mit den WEIERSTRASS'schen Indices[1] bezeichnet, erhält man:

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{x}{\sqrt{\alpha-\lambda_0}} &= \frac{\theta_{056}\,.\,\theta_{146}(u_1,\,u_2,\,u_3)}{\theta_{146}\,.\,\theta_{056}(u_1,\,u_2,\,u_3)},\\ \frac{y}{\sqrt{\beta-\lambda_0}} &= \frac{\theta_0\,.\,\theta_{145}(u_1,\,u_2,\,u_3)}{\theta_{146}\,.\,\theta_{056}(u_1,\,u_2,\,u_3)},\\ \frac{z}{\sqrt{\gamma-\lambda_0}} &= \frac{\theta_{126}\,.\,\theta_{137}(u_1,\,u_2,\,u_3)}{\theta_{146}\,.\,\theta_{056}(u_1,\,u_2,\,u_3)}, \end{aligned}\right.$$

wo den ohne Argumente geschriebenen Thetafunctionen die Argumente o, o, o zuzudenken sind. Die Coordinaten x, y, z werden hierbei reell für reelle Werthe von u_1, u_2, u_3.

Diese eindeutige Parameterdarstellung der Puncte des Raumes durch

---

[1] Vgl. HENOCH, *De Abelianarum functionum periodis*, (Berolini, 1867) S. 15, wobei im vorliegenden Text nur die zweiziffrigen Indices bei HENOCH durch Hinzufügung der Ziffer 7 in dreiziffrige verwandelt sind, sodass von den 64 Thetafunctionen 8 je eine der Zahlen 0, 1, 2, ..., 7, 56 aber je 3 dieser Zahlen als Indices bekommen. Eine zweite Indicesbezeichnung wäre dadurch geboten, dass eine Thetafunction keinen Index, 28 Thetafunctionen je 2 der Zahlen 0, 1, 2, ..., 7 und 35 je eine Scheidung der 8 Zahlen in 2 Quadrupel als Charakteristik bekommen. Man kann es dann für den hyperelliptischen Fall so einrichten, dass die gerade Thetafunction, welche für $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, $v_3 = 0$ verschwindet, keinen Index bekommt, die 28 ungeraden Thetafunctionen je 2 Indices und die 35 übrigen geraden der Spaltung der in irgend einer Reihenfolge mit $i_0, i_1, i_2, \ldots, i_7$ bezeichneten 8 Zahlen 0, 1, 2, ..., 7 in 4 Quadrupel so entsprechen, dass sich die Nullwerthe der Thetafunctionen mit der Charakteristik $\begin{pmatrix} i_0\, i_1\, i_2\, i_3 \\ i_4\, i_5\, i_6\, i_7 \end{pmatrix}$, mit einem Proportionalitätsfactor k und der Abkürzung $(i_1 i_2) = (a_{i_1} - a_{i_2})$, durch die 8 Verzweigungspuncte $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_7$ so darstellen:

$$k\,.\,\theta\begin{pmatrix} i_0\, i_1\, i_2\, i_3 \\ i_4\, i_5\, i_6\, i_7 \end{pmatrix} = \sqrt[4]{(i_0 i_1)(i_0 i_2)(i_0 i_3)(i_2 i_3)(i_3 i_1)(i_1 i_2)\,.\,(i_4 i_5)(i_4 i_6)(i_4 i_7)(i_6 i_7)(i_7 i_5)(i_5 i_6)}.$$

Man vgl. über die verschiedene Indicesbezeichnung auch NÖTHER, *Zur Theorie der Thetafunctionen von beliebig vielen Argumenten*, Mathematische Annalen, Bd. 16, S. 270.

6-fach periodische Functionen dreier Argumente hat ebenfalls eine mechanische Bedeutung.[1] Setzt man nämlich

$$u_1 = a, \qquad u_2 = b, \qquad u_3 = c + gt,$$

unter a, b, c, g Constanten, unter t die Zeit verstehend, so stellen die Gleichungen (8) die freie Bewegung eines Punctes im Raume unter Einfluss der Kräftefunction:

$$(9) \quad U = -\frac{1}{2}g^2\{L(\lambda + \mu + \nu) - (\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2) - (\mu\nu + \nu\lambda + \lambda\mu)\}$$

dar. Die 7 Grössen a, b, c, λ_0, μ_0, λ_1, λ_2 vertreten die 6 Integrationsconstanten der Bewegung; zwischen ihnen besteht eine Relation:

$$\lambda_0 + \mu_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = L,$$

welche sie mit der gegebenen Constanten L der Kräftefunction verbindet.

Diese Bewegung dürfte insofern ein gewisses Interesse beansprechen, als sie ein typisches Beispiel einer durch hyperelliptische Functionen 2. Ordnung dargestellten Bewegung abgiebt. Sie lässt daher in einfachster Form ein charakteristisches Merkmal solcher Bewegungen hervortreten, das der *bedingten Periodicität.*

Um darauf einzugehen, bemerkt man zunächst, dass die 3 imaginären Systeme zusammengehöriger Periodicitätsmoduln für den Bewegungsvorgang im gewöhnlichen Sinne keine Bedeutung haben. Aber auch die 3 reellen Systeme verlieren ihre directe Bedeutung, da eine Änderung der 3 Argumente u_1, u_2, u_3 um ein System zusammengehöriger Periodicitätsmoduln durch die Festhaltung der Werthe u_1 und u_2 ausgeschlossen wird und daher die betrachtete Bewegung als eine *nicht periodische* sich ergiebt. Dagegen zeigt die Bahncurve des bewegten Punctes eine dreifache Art von Windungen, die man in gewissem Sinne als den Ausdruck der dreifachen reellen Periodicität der betrachteten hyperelliptischen Functionen ansehen kann. Die Bahncurve bewegt sich nämlich, wie man aus ihren Differentialgleichungen in elliptischen Coordinaten

[1] Vgl. JACOBI, a. a. O., S. 219.

leicht erkennt, in dem ringförmigen Raume, welcher von je einem ringförmig geschlossenen Theile der beiden Ellipsoide λ_0 und λ_1 einerseits und von zwei getrennten, je ringförmig geschlossenen Theilen des einschaligen Hyperboloides μ_0 anderseits begrenzt wird. Die Bahncurve umläuft in immer wiederholten Längswindungen diesen in sich zurückkehrenden ringförmigen Raum, macht dabei aber zugleich Querwindungen, indem sie abwechselnd den einen und anderen begrenzenden Theil des Hyperboloides μ_0 berührt, und Tiefenwindungen, indem sie abwechselnd die begrenzenden Theile des einen und anderen der Ellipsoide λ_0 und λ_1 berührt. Die Bahncurve wird sich dabei im Allgemeinen niemals schliessen, da niemals in demselben Zeitpuncte eine Längs-, eine Breiten- und eine Tiefenwindung gleichzeitig sich vollenden. Aber die Bewegung kann insofern als eine *zweifach bedingt periodische Bewegung* bezeichnet werden, als sie in eine periodische Bewegung übergeht, wenn zwei Bedingungen erfüllt sind, welche das periodische Zusammentreffen der 3 Windungsformen der Bahncurve zum Ausdruck bringen. Man kann diese Bedingungen unmittelbar aufstellen. Wenn man nämlich der Einfachheit wegen die Constanten a, b, c specialisirt und $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = gt$ setzt, so erhält man zunächst:

$$v_1 = c_{13} gt\pi i = \frac{A_1^2 A_2^3 - A_2^2 A_1^3}{\Delta} gt\pi i,$$

$$v_2 = c_{23} gt\pi i = \frac{A_1^3 A_2^1 - A_2^3 A_1^1}{\Delta} gt\pi i,$$

$$v_3 = c_{33} gt\pi i = \frac{A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2}{\Delta} gt\pi i.$$

Damit wird das Argument $2V$ der Exponentialgrösse der Thetafunction (3) abgesehen von dem additiven Gliede:

$$(m_1 \varepsilon_1' + m_2 \varepsilon_2' + m_3 \varepsilon_3')\pi i + (\varepsilon_1 \varepsilon_1' + \varepsilon_2 \varepsilon_2' + \varepsilon_3 \varepsilon_3')\frac{\pi i}{2}:$$

(10)
$$\begin{aligned} 2V = \{ &(2m_1 + \varepsilon_1)(A_1^2 A_2^3 - A_2^2 A_1^3) + (2m_2 + \varepsilon_2)(A_1^3 A_2^1 - A_2^3 A_1^1) \\ &+ (2m_3 + \varepsilon_3)(A_1^1 A_2^2 - A_2^1 A_1^2)\} \frac{gt\pi i}{\Delta}. \end{aligned}$$

Es seien jetzt, unter l, m, n ganze Zahlen verstanden, die beiden Bedingungen erfüllt:

$$(11)\qquad \left|\begin{aligned} & l\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_1 - m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_1 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_1 = 0, \\ & l\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_2 - m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_2 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_2 = 0 \end{aligned}\right.$$

und sei zur Abkürzung:

$$(12)\qquad l\int_{\lambda_1}^{\lambda_0} d\omega_3 - m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_3 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_3 = gT$$

gesetzt. Man kann diese Gleichungen mit $m' = m - l$, $n' = n - m$ auch schreiben:

$$lA_1^1 + m'A_1^2 + n'A_1^3 = 0,$$

$$lA_2^1 + m'A_2^2 + n'A_2^3 = 0,$$

$$lA_3^1 + m'A_3^2 + n'A_3^3 = 2gT.$$

Hieraus folgt:

$$A_1^2A_2^3 - A_2^2A_1^3 = \frac{\Delta l}{2gT}, \qquad A_1^3A_2^1 - A_2^3A_1^1 = \frac{\Delta m'}{2gT}, \qquad A_1^1A_2^2 - A_2^1A_1^2 = \frac{\Delta n'}{2gT}$$

und somit:

$$2V = \{(2m_1 + \varepsilon_1)l + (2m_2 + \varepsilon_2)m' + (2m_3 + \varepsilon_3)n'\}\frac{\pi i t}{2T}.$$

Einer Änderung des Argumentes t um $4T$ entspricht also eine Änderung des Argumentes $2V$ um ein Vielfaches von $2\pi i$, wobei die Thetafunction (3) ungeändert bleibt.

Während also die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes im Allgemeinen nichtperiodische Functionen der Zeit sind, werden sie periodisch mit der Periode $4T$, sobald die Integrationsconstanten μ_0, λ_0, λ_1, λ_2 die Bedingungen (11) erfüllen.

Diese Bedingungen hängen übrigens von dem anfänglichen Orte des bewegten Punctes zur Zeit $t = 0$ nicht ab, auch wenn a, b, c beliebige Werthe haben.

Neben diese Bewegung, welche auf das vollständige Umkehrproblem der hyperelliptischen Integrale 3. Gattung:

$$(13)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_1\\ \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_2\\ \displaystyle\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{(\lambda-\mu_0)(\lambda-\lambda_0)\,d\lambda}{2\sqrt{r(\lambda)}}+\int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=gt \end{cases}$$

führt, stellt sich eine unter Einfluss derselben Kräftefunction (9) vor sich gehende, aber an das Ellipsoid λ_0 gebundene Bewegung, entsprechend den Gleichungen:

$$(14)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=a_2\\ \displaystyle\int_{\gamma}^{\mu}\frac{(\mu-\mu_0)(\mu-\lambda_0)\,d\mu}{2\sqrt{r(\mu)}}+\int_{\beta}^{\nu}\frac{(\nu-\mu_0)(\nu-\lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}}=gt, \end{cases}$$

wo $r(\rho)$ wieder die in (2) definirte ganze Function 7. Grades ist. Diese Gleichungen geben bekanntlich im complexen Grössengebiet keine eindeutige Umkehrung. Wohl aber ergeben sich die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes, als symmetrische Functionen der oberen Grenzen μ, ν des vorliegenden unvollständigen Umkehrproblems (14), betrachtet für alle reellen Werthe der Variablen a_2 und gt, als eindeutige doppelt reell periodische Functionen von a_2 und gt.[1] Bei constantem a_2, wie im vorliegenden Falle, sind die Coordinaten x, y, z des bewegten Punctes *einfach bedingt periodische Functionen* der Zeit. Die einzige Bedingung nämlich:

$$-m\int_{\gamma}^{\mu_0}d\omega_2+n\int_{\beta}^{a}d\omega_2=0$$

[1] Vgl. *Über eine Gattung doppelt reell periodischer Functionen,* Mathematische Annalen, Bd. 29, 1887.

macht sie periodisch mit der Periode $4T$, falls:

$$-m\int_{\gamma}^{\mu_0} d\omega_3 + n\int_{\beta}^{\alpha} d\omega_3 = gT$$

gesetzt wird. Solche einfach bedingt periodische Bewegungen sind auch, wie man sofort sieht, die in § 1 und § 2 betrachteten Bewegungen auf dem Ellipsoide λ_0.[1]

Beschränkt man endlich den unter Einfluss der Kräftefunction (9) sich bewegenden Punct auf die Krümmungscurve $\lambda = \lambda_0$, $\mu = \mu_0$ des Ellipsoides λ_0, so entspricht seine Bewegung der Gleichung:

$$(15) \qquad \int_{\beta}^{\nu} \frac{(\nu - \mu_0)(\nu - \lambda_0)\,d\nu}{2\sqrt{r(\nu)}} = gt,$$

und seine Coordinaten x, y, z werden Umkehrfunctionen eines einzelnen hyperelliptischen Integrals 1. Gattung vom Geschlecht 3. Die Bewegung ist dann eine *unbedingt periodische.*[2]

Hiermit schliesst jene Reihe von Umkehrproblemen hyperelliptischer Integrale 1. Gattung vom Geschlecht 3, welche in den Formeln (13), (14) und (15) enthalten ist. Durchläuft man dieselbe von ihrem letzten Typus zu ihrem ersten, so ändert sich der Charakter der entsprechenden Bewegung in der Weise, dass die ursprüngliche *Periodicität* durch eine *bedingte Periodicität* ersetzt wird, die sich der Zahl der erforderlichen Bedingungen nach weiter und weiter von der unbedingten Periodicität entfernt.

Dorpat, im März 1887.

[1] Hierher gehört auch die von C. NEUMANN, *De problemate quodam mechanico, quod ad primam integralium ultraellipticarum classem revocatur,* Regiomonti 1856, behandelte Bewegung und andere.

[2] Vgl. WEIERSTRASS, *Über eine Gattung reell periodischer Functionen,* Berliner Monatsberichte, 1866. Hierher gehören eine ganze Reihe von Bewegungen; vgl. RUSSELL, *On the occurence of the higher transcendents in certain mechanical problems,* The messenger of mathematics, new series, vol. 7—8; GREENHILL, *On the motion of a top and allied problems in dynamics,* Quarterly journal of mathematics, vol. 15; und andere.