SUR UN CAS SPÉCIAL DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DE LAMÉ

PAR

E. A. STENBERG
à HELSINGFORS.

La méthode donnée par M. Hermite dans son admirable mémoire *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (premier fascicule, Paris, Gauthier-Villars 1885, §§ 44, 45), pour intégrer l'équation différentielle de Lamé

$$y'' - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h]y = 0$$

n'est plus applicable, quand les équations trouvées au § 45, c'est-à-dire

$$H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + h_2 H_{2\nu-5} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu = 0,$$

$$2\nu H_{2\nu} + (2\nu - 2)h_1 H_{2\nu-2} + (2\nu - 4)h_2 H_{2\nu-4} + \ldots + 2h_{\nu-1} H_2 = 0$$

ou

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 = 0,$$

$$(2\nu - 1)H_{2\nu-1} + (2\nu - 3)h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 - h_\nu = 0$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$, conduisent par l'élimination de λ à une équation

$$\Phi(k^2 \operatorname{sn}^2 \omega,\ k \operatorname{sn} \omega \operatorname{cn} \omega \operatorname{dn} \omega) = 0,$$

où la fonction doublement périodique Φ ne devient nul que pour $\omega = iK'$.

La fonction $f(x)$ du même paragraphe n'a, en effet, alors aucun pôle et ne peut pas par conséquent servir d'élément simple.

Il en est ainsi, particulièrement, toujours, quand l'équation de LAMÉ est satisfaite par des fonctions doublement périodiques spéciales de seconde espèce de M. MITTAG-LEFFLER.[1] C'est ce cas, laissé de côté par M. HERMITE, que je me propose d'étudier ici.

Soit y une fonction de cette espèce, ayant le seul pôle $x = iK'$, auquel correspond le développement suivant

$$y = \frac{1}{\varepsilon^n} + \frac{h_1}{\varepsilon^{n-2}} + \frac{h_2}{\varepsilon^{n-4}} + \ldots + \frac{h_i}{\varepsilon^{n-2i}} + \ldots .$$

La quantité λ, qui entre dans les multiplicateurs

$$e^{2\lambda K}, \qquad e^{2\lambda i K'}$$

de cette fonction, est alors, comme l'a démontré M. MITTAG-LEFFLER dans son article cité ci-dessus, soumise à la condition

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1} + \frac{h_1}{\Gamma(n-2)}\lambda^{n-3} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\Gamma(4)}\lambda^3 + \frac{h_{\nu-1}}{\Gamma(2)}\lambda = 0$$

ou

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\lambda^{n-1} + \frac{h_1}{\Gamma(n-2)}\lambda^{n-3} + \ldots + \frac{h_{\nu-2}}{\Gamma(3)}\lambda^2 + h_{\nu-1} = 0$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ et $n = 2\nu - 1$.

Pour reconnaître si l'équation de LAMÉ a une solution ainsi qualifiée nous déterminons d'abord les $\nu + 1$ coefficients

$$h_1,\ h_2,\ h_3,\ \ldots,\ h_\nu,\ h_{\nu+1}$$

au moyen des formules de M. HERMITE au § 44:

$$h_1 = -\frac{h + n(n+1)s_0}{4n-2},$$

$$2(2n-3)h_2 = (2n-1)h_1^2 - \frac{n(n+1)}{2}s_1,$$

$$i(2n-2i+1)h_i = (2n-1)h_1 h_{i-1} - \frac{n(n+1)}{2}(s_1 h_{i-2} + s_2 h_{i-3} + \ldots + s_{i-1}),$$

---

[1] MITTAG-LEFFLER, *Sur les fonctions doublement périodiques de seconde espèce.* Comptes rendus de l'académie des sciences de Paris, 26 Janvier 1880.

où les quantités s_0, s_1, s_2, ... sont les coefficients du développement

$$\frac{1}{\operatorname{sn}^2\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} + s_0 + s_1\varepsilon^2 + s_2\varepsilon^4 + \dots$$

c'est-à-dire

$$s_0 = \frac{1+k^2}{3}$$

$$s_1 = \frac{1-k^2+k^4}{15}$$

$$s_2 = \frac{2-3k^2-3k^4+2k^6}{189}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

J'emploie comme élément simple la fonction

$$f(x) = \chi(x)e^{\lambda(x-iK')},$$

où je pose

$$\chi(x) = \frac{\mathrm{Al}'(x)}{\mathrm{Al}(x)} + iJ'.$$

On a

$$\chi(iK'+\varepsilon) = \frac{\mathrm{Al}'(\varepsilon)_1}{\mathrm{Al}(\varepsilon)_1} = \frac{1}{\varepsilon} - A_0\varepsilon - A_1\varepsilon^3 - A_2\varepsilon^5 - \dots,$$

où à l'aide de la relation

$$D_x^2 \log \mathrm{Al}(x)_1 = -\frac{1}{\operatorname{sn}^2 x}$$

les coefficients seront donnés par la formule

$$A_i = \frac{s_i}{2i+1}.$$

Nous pourrons ainsi écrire

$$f(iK'+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + H_0 + H_1\varepsilon + H_2\varepsilon^2 + \dots,$$

où nous aurons

$$H_0 = \lambda$$

$$H_1 = -A_0 + \frac{\lambda^2}{\Gamma(3)}$$

$$H_2 = -A_0\lambda + \frac{\lambda^3}{\Gamma(4)}$$

$$H_3 = -A_1 - A_0\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} + \frac{\lambda^4}{\Gamma(5)}$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

et en général

$$H_{2i} = -A_{i-1}\lambda - A_{i-2}\frac{\lambda^3}{\Gamma(4)} - A_{i-3}\frac{\lambda^5}{\Gamma(6)} - \ldots - A_0\frac{\lambda^{2i-1}}{\Gamma(2i)} + \frac{\lambda^{2i+1}}{\Gamma(2i+2)},$$

$$H_{2i+1} = -A_i - A_{i-1}\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} - A_{i-2}\frac{\lambda^4}{\Gamma(5)} - \ldots - A_0\frac{\lambda^{2i}}{\Gamma(2i+1)} + \frac{\lambda^{2i+2}}{\Gamma(2i+3)}.$$

D'après cela, si nous considérons la fonction

$$F(x) = -\frac{D_x^{2\nu-1}f(x)}{\Gamma(2\nu)} - h_1\frac{D_x^{2\nu-3}f(x)}{\Gamma(2\nu-2)} - \ldots - h_{\nu-1}D_xf(x) + Ce^{\lambda(x-iK')}$$

ou

$$F(x) = \frac{D_x^{2\nu-2}f(x)}{\Gamma(2\nu-1)} + h_1\frac{D_x^{2\nu-4}f(x)}{\Gamma(2\nu-3)} + \ldots + h_{\nu-1}f(x) + Ce^{\lambda(x-iK')}$$

suivant les cas de $n = 2\nu$ ou $n = 2\nu - 1$, et posons $x = iK' + \varepsilon$, la partie principale de son développement sera égale à celle de y.

$F(x)$ est une fonction doublement périodique de seconde espèce de M. Mittag-Leffler avec les multiplicateurs

$$e^{2\lambda K}, \qquad e^{2\lambda iK'},$$

car

$$f(x + 2K) = e^{2\lambda K}f(x) - 2Je^{\lambda(x+2K)}$$

$$f(x + 2iK') = e^{2\lambda iK'}f(x) - 2iJ'e^{\lambda(x+2iK')}$$

d'où

$$f^{(r)}(x + 2K) = e^{2\lambda K}f^{(r)}(x) - 2\lambda^r Je^{\lambda(x+2K)}$$

$$f^{(r)}(x + 2iK') = e^{2\lambda iK'}f^{(r)}(x) - 2\lambda^r iJ'e^{\lambda(x+2iK')}$$

et par conséquent, en ayant égard à l'équation conditionnelle, à laquelle la quantité λ est soumise

$$F(x+2K) = e^{2\lambda K} F(x)$$
$$F(x+2iK') = e^{2\lambda iK'} F(x).$$

Cela posé, je dis que la fonction $F(x)$ sera une intégrale de l'équation de LAMÉ s'il est possible de déterminer les quantités C et λ de telle sorte que dans les développements des fonctions $F(x)$ et y, suivant les puissances croissantes de ε, non seulement, comme nous l'avons vu, les parties principales mais aussi les termes constants et les coefficients de ε^2 soient égaux, toutefois sans que l'équation conditionnelle cesse d'être satisfaite par λ.

En substituant $F(x)$ pour y dans le premier membre de l'équation de LAMÉ, nous obtiendrons en effet alors une fonction doublement périodique de seconde espèce de M. MITTAG-LEFFLER

$$D_x^2 F(x) - [n(n+1)k^2 \operatorname{sn}^2 x + h] F(x),$$

dont les multiplicateurs seront

$$e^{2\lambda K}, \qquad e^{2\lambda iK'}$$

et qui n'aura qu'un seul pôle $x = iK'$, auquel correspondra un développement de la forme

$$\frac{c_0}{\varepsilon} + c_1\varepsilon + c_2\varepsilon^2 + \ldots.$$

L'équation conditionnelle de cette fonction sera ainsi

$$c_0\lambda = 0,$$

d'où

$$c_0 = 0,$$

parce que nous ne nous occupons point des solutions doublement périodiques de première espèce, dont l'étude complète est donnée par M. HERMITE au § 52. La fonction en question, n'ayant ainsi aucun pôle, sera de la forme $Ce^{\lambda x}$ et par conséquent, comme étant égal à zéro pour $x = iK'$, identiquement nul.

Posons, dans le cas de $n = 2\nu$, le terme constant du développement de $F(x)$,

$$-H_{2\nu-1} - h_1 H_{2\nu-3} - h_2 H_{2\nu-5} - \ldots - h_{\nu-1} H_1 + C$$

égal à h_ν et le coefficient de ε^2

$$-\nu(2\nu+1)H_{2\nu+1} - (\nu-1)(2\nu-1)h_1 H_{2\nu-1} - (\nu-2)(2\nu-3)h_2 H_{2\nu-3} - \ldots$$
$$\ldots - 2.5h_{\nu-2}H_5 - 1.3h_{\nu-1}H_3 + \frac{C}{2}\lambda^2$$

égal à $h_{\nu+1}$, et dans le cas de $n = 2\nu - 1$ le terme constant ainsi que le coefficient de ε^2, c'est-à-dire les expressions

$$H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + h_2 H_{2\nu-6} + \ldots + h_{\nu-1} H_0 + C,$$
$$\nu(2\nu-1)H_{2\nu} + (\nu-1)(2\nu-3)h_1 H_{2\nu-2} + (\nu-2)(2\nu-5)h_2 H_{2\nu-4} + \ldots$$
$$\ldots + h_{\nu-1} H_2 + \frac{C}{2}\lambda^2$$

égaux à zéro. Par cela nous obtenons d'abord pour $n = 2\nu$

$$C = H_{2\nu-1} + h_1 H_{2\nu-3} + \ldots + h_{\nu-1} H_1 + h_\nu$$

et pour $n = 2\nu - 1$

$$C = -[H_{2\nu-2} + h_1 H_{2\nu-4} + \ldots + h_{\nu-2} H_2 + h_{\nu-1} H_0]$$

et ensuite, en ayant égard aux expressions des H, la relation

$$\text{(A)}\qquad \lambda^{n+2} + (n+2)[ns_0 + (n-1)h_1]\lambda^n$$
$$+ \sum_{i=1}^{i=N} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-2i+1)}(n+2)\Big[(n-i)s_i + \sum_{j=1}^{j=i}(n-i-j)s_{i-j}h_j$$
$$+ (n-2i-1)h_{i+1}\Big]\lambda^{n-2i} = 0,$$

où $N = \nu$ dans le premier cas et $N = \nu - 1$ dans le second. Cette relation doit être satisfaite par une racine λ de l'équation conditionnelle, si l'équation de Lamé est intégrée par une fonction du genre considéré.

A chaque racine commune λ de ces équations correspond une autre $-\lambda$, et comme chaque valeur de λ nous donne une intégrale particulière, il n'existe qu'une seule quantité λ^2, qui en même temps satisfait aux deux équations, et à celle correspondent les deux fonctions $F(x)$ et $F(-x)$, qui entrent dans l'intégrale générale de l'équation de LAMÉ

$$C_1F(x) + C_2F(-x).$$

Pour que cette équation différentielle ait une intégrale doublement périodique du genre considéré, il est donc nécessaire et suffisant que les équations (A) et

$$\lambda^{n-1} + \sum_{i=1}^{i=\nu-1} \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(n-2i)} h_i \lambda^{n-2i-1} = 0$$

soient satisfaites par une même valeur de λ^2.

En faisant les coefficients de ε dans les développements des fonctions $F(x)$ et y égaux nous obtenons une équation

$$\text{(B)} \qquad \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+2)} + \sum_{i=0}^{i=\nu-1} \frac{\lambda^{n-2i-1}}{\Gamma(n-2i)} \left(s_i + \sum_{j=1}^{j=i} h_j s_{i-j} + h_{i+1}\right) = 0,$$

qui est satisfaite par chaque racine λ^2 de l'équation conditionnelle. Par cette relation (B) nous pouvons simplifier l'équation (A) sans qu'elle cesse de jouer le rôle en question. Désignons par a et b les membres gauches des équations (A) et (B); la formule

$$b\lambda - \frac{\Gamma(n+3)}{n+1} a = 0$$

donnera en effet l'équation

$$\text{(A')} \qquad \frac{\lambda^{n+2}}{\Gamma(n+3)} + h_1 \frac{\lambda^n}{\Gamma(n+1)}$$

$$-\sum_{i=1}^{i=N} \frac{\lambda^{n-2i}}{\Gamma(n-2i+1)} \left(is_i + \sum_{j=1}^{j=i-1} (i-j) h_j s_{i-j} - h_{i+1}\right) = 0,$$

où les coefficients des $\dfrac{\lambda^{n-2i}}{\Gamma(n-2i+1)}$, ne dépendant que par les quantités h de la valeur n, se laissent calculer plus facilement que ceux de l'équation (A).

Applications. Parce qu'il n'existe aucune fonction doublement périodique de seconde espèce de M. MITTAG-LEFFLER, dont le pôle unique soit d'ordre inférieur au troisième, l'équation de LAMÉ ne peut être du genre spécial étudié ci-dessus que pour $n \geqq 3$.

I. Considérons en premier lieu le cas de $n = 3$. On a

$$h_1 = -\frac{h + 4(1 + k^2)}{10}$$

$$h_2 = \frac{5}{6}h_1^2 - s_1.$$

L'équation conditionnelle de λ est

$$\lambda^2 + 2h_1 = 0$$

et celle que nous avons désignée par (A')

$$\frac{\lambda^5}{\Gamma(6)} + h_1\frac{\lambda^3}{\Gamma(4)} + (h_2 - s_1)\lambda = 0.$$

Si

$$h_1^2 = \frac{1}{4}(1 - k^2 + k^4)$$

le membre gauche de la dernière équation est divisible par $\lambda^2 + 2h_1$. Les seules équations de LAMÉ du genre considéré au cas de $n = 3$ sont ainsi

$$y'' - \left[12k^2 \operatorname{sn}^2 x - 4(1 + k^2) + 5\sqrt{1 - k^2 + k^4}\right]y = 0$$

et

$$y'' - \left[12k^2 \operatorname{sn}^2 x - 4(1 + k^2) - 5\sqrt{1 - k^2 + k^4}\right]y = 0,$$

où $\sqrt{1 - k^2 + k^4}$ désigne la racine positive.

Pour la première, la fonction $F(x)$, qui entre dans l'intégrale générale

$$C_1F(x) + C_2F(-x),$$

est

$$F(x) = \frac{D_x^2 f(x)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4}\, f(x) + Ce^{\lambda(x - iK')},$$

où

$$\lambda = \sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$$

$$C = \frac{1}{6}\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}\left[2(1 + k^2) - \sqrt{1 - k^2 + k^4} + 3\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}\right],$$

et pour la seconde équation

$$F(x) = \frac{D_2^x f(x)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4} f(x) + Ce^{\lambda(x - iK')},$$

où

$$\lambda = i\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$$

$$C = -\frac{1}{2}\sqrt{1 - k^2 + k^4} + \frac{i}{6}\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}\left[2(1 + k^2) + \sqrt{1 - k^2 + k^4}\right].$$

Dans ces formules le radical $\sqrt{1 - k^2 + k^4}$ a la valeur nommée et $\sqrt[4]{1 - k^2 + k^4}$ désigne la racine quatrième réelle et positive.

II. Dans le cas de $n = 4$ on a

$$h_1 = -\frac{h}{14} + \frac{10}{21}(1 + k^2)$$

$$h_2 = \frac{7}{10}h_1^2 - s_1$$

$$h_3 = \frac{49}{90}h_1^3 - \frac{17h_1 s_1 + 10 s_2}{9}.$$

Les deux équations caractéristiques sont

$$\frac{\lambda^3}{\Gamma(4)} + h_1\lambda = 0$$

$$\frac{\lambda^6}{\Gamma(7)} + h_1\frac{\lambda^4}{\Gamma(5)} + (h_2 - s_1)\frac{\lambda^2}{\Gamma(3)} + h_3 - h_1 s_1 - 2s_2 = 0,$$

elles ont une racine λ^2 commune si

$$h_1^3 - \frac{35}{4}h_1 s_1 + \frac{35}{4}s_2 = 0.$$

Nous obtenons trois valeurs distinctes pour h et ainsi trois équations de LAMÉ du genre considéré, dont les intégrales auront la forme

$$F(x) = -\frac{D_x^3 f(x)}{6} - h_1 D_x f(x) + Ce^{\lambda(x-iK')}$$

où

$$\lambda = \pm\sqrt{-6h_1}$$

$$C = -\frac{4}{5}h_1^2 + 2h_1 s_0 - \frac{4}{3}s_1.$$