ZUR THEORIE DER

MEHRWERTHIGEN, MEHRFACH LINEÄR VERKNÜPFTEN FUNCTIONEN

VON

KARL HEUN
in MÜNCHEN.

Durch die tiefsinnigen Forschungen des Herrn POINCARÉ ist die Theorie der linearen Differentialgleichungen auf ebenso sichere Grundlagen gestützt worden, wie die Theorie der elliptischen Functionen durch die Arbeiten von ABEL und JACOBI. Wie die Thetafunctionen das Umkehrungsproblem für die elliptischen Integrale lösen, so erlauben die Functionen des Herrn POINCARÉ (Acta Mathematica, Bd. 1, p. 193) das analoge Problem im Gebiete der linearen Differentialgleichungen zu behandeln. Wir beschäftigen uns jedoch im Folgenden nicht mit den eindeutigen Functionen mit linearen Transformationen in sich, sondern mit den mehrdeutigen Functionen, deren Periodicität durch lineare homogene Substitutionen bestimmt ist. Die nachstehende Untersuchung schliesst sich insbesondere an die vierte Abhandlung POINCARÉS (d. Zeitschr., Bd. 4, p. 201) an. Andererseits steht sie in enger Beziehung zu einer bekannten posthumen Abhandlung RIEMANNS (Werke, p. 357) namentlich in Betreff der methodischen Gesichtspunkte. Die Resultate, zu welchen wir gelangt sind, werden insbesondere dazu dienen können die Theorie der POINCARÉ'schen sogen. Zetafunctionen einst weiter auszubilden. (Man vergl. d. Zeitschr., Bd. 5, p. 212.)

1. Wir betrachten im Folgenden eine mehrdeutige Function einer unabhängigen Veränderlichen x, welche auf einer unendlich-blättrigen RIEMANN'schen Kugelfläche mit i endlichen Verzweigungspunkten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i$ und dem Unendlichkeitspunkte ξ_{i+1} eine eindeutige Function des Ortes ist, derart, dass zwischen je $p+1$ Zweigen eine lineäre homogene Relation mit bestimmten constanten Coefficienten besteht. Eine solche Function soll, insoweit sie durch diese Festsetzungen determinirt ist, eine *p-fach lineär verknüpfte* heissen. Ist nun $\mathfrak{B}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, i+1)$ die homogene lineäre Substitution, welche das Verhalten der zum Punkte ξ_ι gehörigen, willkürlich angenommenen, Zweiggruppe $(y_{1\iota}, y_{2\iota}, \ldots, y_{p\iota})$ bei einmaliger positiver Umkreisung des Punktes ξ_i ausdrückt, dann ist bekanntlich

$$\mathfrak{B}_{i+1} \cdot \mathfrak{B}_i \ldots \mathfrak{B}_2 \cdot \mathfrak{B}_1 = 1. \tag{1}$$

Setzt man ferner in üblicher Weise

$$\mathfrak{B}_i = B_i \cdot \begin{vmatrix} w_i^{(1)}, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & w_i^{(2)}, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & w_i^{(p)} \end{vmatrix} \cdot B_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, \iota-1, \iota+1, \ldots, i+1)$$

und

$$B_\iota = B_\iota^{-1} = 1$$

dann ist das Verhalten eines bestimmten Zweiges $y_{\mathfrak{p}i}$ $\left({\mathfrak{p}=1,2,\ldots,p \atop i=1,2,\ldots,i+1}\right)$ bestimmt durch die Gleichung:

$$y_{\mathfrak{p}i} = (x - \xi_i)^{\frac{\log w_i^{(\mathfrak{p})}}{2\pi\sqrt{-1}}} \cdot \Phi_{\mathfrak{p}i}(x - \xi_i)$$

$$(x - \xi_{i+1}) = \frac{1}{x},$$

wo $\Phi_{\mathfrak{p}i}(x - \xi_i)$ eine im Punkte ξ_i eindeutige, stetige und nicht verschwindende Function bedeutet. Die Wurzeln $w_i^{(\mathfrak{p})}$ $(\mathfrak{p} = 1, 2, \ldots, p)$ der zum Punkte ξ_i gehörigen determinirenden Gleichung wollen wir als von einander verschieden betrachten.

Nun ist aber, wenn wir den üblichen Initialzweig von $\log x$ mit $\operatorname{Log} x$ bezeichnen

$$\log w_i^{(\mathfrak{p})} = \operatorname{Log} w_i^{(\mathfrak{p})} + 2m\pi\sqrt{-1}$$

folglich

$$\frac{\log w_i^{(\mathfrak{p})}}{2\pi\sqrt{-1}} = \lambda_{\mathfrak{p}i} + m$$

wenn $\lambda_{\mathfrak{p}i}$ durch die Gleichung:

$$(2) \qquad \operatorname{Log} w_i^{(\mathfrak{p})} = 2\pi\sqrt{-1}\,.\,\lambda_{\mathfrak{p}i}$$

definirt ist.

Wir bezeichnen nun alle Functionen (y), deren Periodicität in Bezug auf dieselben Verzweigungspunkte durch *dieselben* erzeugenden Substitutionen $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_i$ definirt ist als zurselben *Art* (= »espèce» in der Terminologie des Herrn POINCARÉ) gehörige.

Für zwei Systeme (y), welche von derselben Art sind, unterscheiden sich demnach die correspondirenden Verzweigungsindices (λ) um ganze Zahlen (m).

Zwischen je $p + 1$ Functionen derselben Art: $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ besteht eine fundamentale Relation, deren Form sich durch Betrachtung der folgenden identisch verschwindenden Determinante ergiebt

$$\begin{vmatrix} y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)}, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(\bar{\omega})}, & \ldots, & y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} \\ y_{1\iota}^{(0)}, & y_{1\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{1\iota}^{(\bar{\omega})}, & \ldots, & y_{1\iota}^{(p)} \\ y_{2\iota}^{(0)}, & y_{2\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{2\iota}^{(\bar{\omega})}, & \ldots, & y_{2\iota}^{(p)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{p\iota}^{(0)}, & y_{p\iota}^{(1)}, & \ldots, & y_{p\iota}^{(\bar{\omega})}, & \ldots, & y_{p\iota}^{(p)} \end{vmatrix}.$$

Nimmt man die Unterdeterminanten in Bezug auf die erste Horizontalreihe, dann erhält man eine homogene lineäre Gleichung von der Form:

$$(3) \qquad \Delta_\iota^{[0]}\,.\,y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)} + \Delta_\iota^{[1]}\,.\,y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)} + \ldots + \Delta_\iota^{[p]}\,.\,y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} = 0. \qquad \binom{\mathfrak{p}=1, 2, \ldots, p}{\iota=1, 2, \ldots, i, i+1}$$

Die Entwicklung von $\Delta_\iota^{[\bar{\omega}]}$ besteht aus einem Aggregat von Produkten von je p Factoren, von denen jeder in dem Bereich des Punktes ξ_ι die Form hat

$$y_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})} = (x - \xi_\iota)^{\lambda_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})}}\,.\,\Phi_{\mathfrak{p}\iota}(x - \xi_\iota). \qquad (\mathfrak{p} = 0, 1, 2, \ldots, \bar{\omega}-1, \bar{\omega}+1, \ldots, p)$$

Der erste Term in der expliciten Gestalt der Determinante $\Delta_\iota^{[\bar{\omega}]}$ heisst also:

$$(x - \xi_\iota)^{\lambda_{1\iota}^{(0)} + \lambda_{2\iota}^{(1)} + \cdots + \lambda_{\bar{\omega},\iota}^{(\bar{\omega}-1)} + \lambda_{\bar{\omega}+1,\iota}^{(\bar{\omega}+1)} + \cdots + \lambda_{p\iota}^{(p)}}\,.\,\Phi_1(x - \xi_\iota).$$

Die nächstfolgenden Terme ergeben sich aus diesem ersten, indem der

Exponent von $(x-\xi_\iota)$ durch die Summe aller übrigen möglichen Permutationen zu je p der p^2 Indices $\lambda_{\mathfrak{p}\iota}^{(\mathfrak{p})}$ ersetzt und jede der so entstandenen Potenzen mit einer Φ-Function multiplicirt wird. Diese Exponentensummen können sowohl positive als negative Werthe haben. Diejenige Summe, welche von allen übrigen um eine positive ganze Zahl übertroffen wird, soll durch $E_\iota^{[\omega]}$ bezeichnet werden. Es ist also

$$\Delta_\iota^{[\omega]} = (x-\xi_\iota)^{E_\iota^{[\omega]}} \,.\, \Phi_\iota^{[\omega]}(x-\xi_\iota).$$

Da nun

$$\Delta_\iota^{[\omega]} = \text{Det. } B_\mathfrak{i} \,.\, \Delta_\mathfrak{i}^{[\omega]}$$

so ist auch

$$\Delta_\iota^{[\omega]} = (x-\xi_\mathfrak{i})^{E_\mathfrak{i}^{[\omega]}} \,.\, \Phi_\mathfrak{i}^{[\omega]}(x-\xi_\mathfrak{i}).$$

Folglich ist

$$\Delta_\iota^{[\omega]} \,.\, (x-\xi_1)^{-E_1^{[\omega]}} \,.\, (x-\xi_2)^{-E_2^{[\omega]}} \ldots (x-\xi_i)^{-E_i^{[\omega]}}$$

eine ganze rationale Function von x vom Grade

$$-[E_1^{[\omega]} + E_2^{[\omega]} + \ldots + E_{i+1}^{[\omega]}],$$

welche wir mit F_ω bezeichnen wollen. Es ist

$$[E_1^{[\omega]} + E_2^{[\omega]} + \ldots + E_{i+1}^{[\omega]}] = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1} \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}^{(\mathfrak{p})} + \Sigma D_\mathfrak{p}^{[\omega]}$$

wo unter $\Sigma D_\mathfrak{p}^{[\omega]}$ die Summe aller auf das System $(y^{(\mathfrak{p})})$ bezogenen Indicesdifferenzen zu verstehen ist. Die rechte Seite dieser Gleichung darf also nicht > 0 werden. Die Gleichung (3) nimmt nach dem Vorstehenden die Form an:

$$y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)} \,.\, (x-\xi_1)^{E_1^{[0]}} \,.\, (x-\xi_2)^{E_2^{[0]}} \ldots (x-\xi_i)^{E_i^{[0]}} \,.\, F_0$$

$$+\, y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)} \,.\, (x-\xi_1)^{E_1^{[1]}} \,.\, (x-\xi_2)^{E_2^{[1]}} \ldots (x-\xi_i)^{E_i^{[1]}} \,.\, F_1 + \ldots$$

$$\ldots +\, y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} \,.\, (x-\xi_1)^{E_1^{[p]}} \,.\, (x-\xi_2)^{E_2^{[p]}} \ldots (x-\xi_i)^{E_i^{[p]}} \,.\, F_p = 0.$$

Da die Differenzen der Grössen $E_i^{[0]}, E_i^{[1]}, \ldots, E_i^{[p]}$ ganze Zahlen sind, so lässt sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$H_0(x) \cdot y_{\mathfrak{p}\iota}^{(0)} + H_1(x) \cdot y_{\mathfrak{p}\iota}^{(1)} + \ldots + H_p(x) \cdot y_{\mathfrak{p}\iota}^{(p)} = 0. \tag{4}$$

Die Grössen $H_0(x), H_1(x), \ldots, H_p(x)$ sind ganze rationale Functionen von bekannten Graden. Die Gleichung (4) enthält den RIEMANN'schen Satz:

»Zwischen je $p + 1$ Elementen eines Systems p-fach lineär verknüpfter Functionen derselben Art besteht eine lineäre homogene Relation, deren Coefficienten ganze rationale Coefficienten der unabhängigen Veränderlichen sind.»

Wir haben diesen bekannten Satz hier reproducirt, weil uns die angewendete Bezeichnung eine kürzere Darstellung der folgenden Untersuchungen erlaubt.

2. Da alle Derivirten einer p-fach lineär verknüpften Function dieselbe Periodicität besitzen, wie die primitive Function, so sind sie auch alle mit der letzteren von derselben Art. Bei jeder Differentiation erniedern sich die Verzweigungsindices um eine Einheit. In der Gleichung (4) sind demnach eine gewisse Anzahl von Differentialgleichungen mehrerer abhängiger Veränderlichen enthalten.

Wir wollen nur den Fall untersuchen, in welchem die $p + 1$ Functionen derselben Art, zwischen denen eine Gleichung (4) bestehen muss, die folgenden seien:

$$y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}},$$

$$z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}.$$

Alsdann heisst die RIEMANN'sche Fundamentalgleichung:

$$\begin{aligned} 0 = F_0 \cdot y + F_1 \cdot \frac{dy}{dx} + \ldots + F_{p-\pi} \cdot \frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}} \\ + G_0 \cdot z + G_1 \cdot \frac{dz}{dx} + \ldots + G_{\pi-1} \cdot \frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}. \end{aligned}$$

Die Grössen $E_i^{[\omega]}$ der vorigen Nummer wollen wir jetzt in zwei Gruppen $E_i^{[\omega_1]}$ und $E_i^{[\omega_2]}$ theilen, welche beziehungsweise den Functionen

F und G entsprechen sollen. Die Grössen $E_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_1]}$ und $E_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_2]}$ ergeben sich aus der Betrachtung der Determinante:

$$0 = \begin{vmatrix} y_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}\,, & \frac{dy_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde{\omega}_1} y_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_1}}\,, & \ldots, & \frac{d^{p-\pi} y_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}}{dx^{p-\pi}}\,, & z_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}\,, & \frac{dz_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde{\omega}_2} z_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_2}}\,, & \ldots, & \frac{d^{\pi-1} z_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}}{dx^{\pi-1}} \\ y_{1\mathfrak{i}}\,, & \frac{dy_{1\mathfrak{i}}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde{\omega}_1} y_{1\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_1}}\,, & \ldots, & \frac{d^{p-\pi} y_{1\mathfrak{i}}}{dx^{p-\pi}}\,, & z_{1\mathfrak{i}}\,, & \frac{dz_{1\mathfrak{i}}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde{\omega}_2} z_{1\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_2}}\,, & \ldots, & \frac{d^{\pi-1} z_{1\mathfrak{i}}}{dx^{\pi-1}} \\ y_{2\mathfrak{i}}\,, & \frac{dy_{2\mathfrak{i}}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde{\omega}_1} y_{2\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_1}}\,, & \ldots, & \frac{d^{p-\pi} y_{2\mathfrak{i}}}{dx^{p-\pi}}\,, & z_{2\mathfrak{i}}\,, & \frac{dz_{2\mathfrak{i}}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde{\omega}_2} z_{2\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_2}}\,, & \ldots, & \frac{d^{\pi-1} z_{2\mathfrak{i}}}{dx^{\pi-1}} \\ y_{p\mathfrak{i}}\,, & \frac{dy_{p\mathfrak{i}}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde{\omega}_1} y_{p\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_1}}\,, & \ldots, & \frac{d^{p-\pi} y_{p\mathfrak{i}}}{dx^{p-\pi}}\,, & z_{p\mathfrak{i}}\,, & \frac{dz_{p\mathfrak{i}}}{dx}\,, & \ldots, & \frac{d^{\tilde{\omega}_2} z_{p\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_2}}\,, & \ldots, & \frac{d^{\pi-1} z_{p\mathfrak{i}}}{dx^{\pi-1}} \end{vmatrix}.$$

Bedenkt man nun dass

$$\begin{aligned} \frac{d^{\tilde{\omega}_1} y_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_1}} &= (x - \xi_{\mathfrak{i}})^{\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} - \tilde{\omega}_1} \,.\, \Phi^{(\tilde{\omega}_1)}(x - \xi_{\mathfrak{i}}), \\ \frac{d^{\tilde{\omega}_2} z_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}}{dx^{\tilde{\omega}_2}} &= (x - \xi_{\mathfrak{i}})^{\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} + \tilde{\omega}_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} - \tilde{\omega}_2} \,.\, \Phi^{(\tilde{\omega}_2)}(x - \xi_{\mathfrak{i}}) \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\mathfrak{i} = 1, 2, \ldots, i)}$$

dann findet man zunächst

$$\begin{aligned} E_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_1]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} - \{0 + 1 + 2 + \ldots + (\tilde{\omega}_1 - 1) + (\tilde{\omega}_1 + 1) + \ldots + (p - \pi)\} \\ + \mathfrak{D}_{\mathfrak{i}} - \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (\mathfrak{i} = 1, 2, \ldots, i)}$$

während

$$\begin{aligned} E_{i+1}^{[\tilde{\omega}_1]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p}, i+1} + \{0 + 1 + 2 + \ldots + (\tilde{\omega}_1 - 1) + (\tilde{\omega}_1 + 1) + \ldots + (p - \pi)\} \\ + \mathfrak{D}_{i+1} + \frac{1}{2}\pi(\pi - 1) \end{aligned}$$

da $x - \xi_{i+1} = \frac{1}{x}$ zu nehmen ist.

Die Grössen $\mathfrak{D}_i$ bestimmen sich folgendermassen. Man nimmt aus dem Schema:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
 & 0. & 1. & \ldots & \tilde{\omega}_2. & \ldots & \pi-1. \\
\hline
1. & \delta_{1i} & \delta_{1i} & \ldots & \delta_{1i} & \ldots & \delta_{1i} \\
2. & \delta_{2i} & \delta_{2i} & \ldots & \delta_{2i} & \ldots & \delta_{2i} \\
. & . & . & . & . & . & . \\
p. & \delta_{pi} & \delta_{pi} & \ldots & \delta_{pi} & \ldots & \delta_{pi}
\end{array}$$

je π Elemente aus verschiedenen Vertikal- und Horizontalreihen, was auf $1 . 2 . 3 \ldots p$ Arten möglich ist und addirt dieselben. Aus der Reihe der so entstehenden Summen:

$$S_i^{(1)}, \; S_i^{(2)}, \; \ldots, \; S_i^{(1.2\ldots p)}$$

ist $\mathfrak{D}_i$ diejenige, welche von allen übrigen um positive Grössen übertroffen wird. Ferner findet man für $i = 1, 2, \ldots, i$ den Ausdruck:

$$E_i^{[\tilde{\omega}_2]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p}i} - \frac{1}{2}(p-\pi)(p-\pi+1)$$

$$+ \mathfrak{D}_i^{[\tilde{\omega}_2]} - \{0 + 1 + 2 + \ldots + (\tilde{\omega}_2 - 1) + (\tilde{\omega}_2 + 1) + \ldots + (\pi - 1)\}$$

und

$$E_{i+1}^{[\tilde{\omega}_2]} = \sum_{(\mathfrak{p})}^{p} \lambda_{\mathfrak{p}, i+1} + \frac{1}{2}(p-\pi)(p-\pi+1)$$

$$+ \mathfrak{D}_{i+1}^{[\tilde{\omega}_2]} + \{0 + 1 + 2 + \ldots + (\tilde{\omega}_2 - 1) + (\tilde{\omega}_2 + 1) + \ldots + (\pi - 1)\}.$$

Um die Grössen $\mathfrak{D}_i^{[\tilde{\omega}_2]}$ zu bestimmen lasse man in dem obigen $p . \pi$-gliedrigen Schema die mit $\tilde{\omega}_2$ bezeichnete Verticalreihe aus und bilde die Summen aus je $\pi - 1$ Elementen $(\delta_{\mathfrak{p}i})$, welche verschiedenen Vertikal- und Horizontalreihen angehören. Alsdann ist diejenige Summe, welche von den übrigen (für ein festes i) um positive Grössen übertroffen wird, die mit $\mathfrak{D}_i^{[\tilde{\omega}_2]}$ bezeichnete Grösse.

Unsere Differentialgleichung nimmt jetzt die Form an:

$$
(\mathrm{I})\quad \left|\begin{aligned}
&(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\Big\{F_0[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)].y\\
&\qquad+\psi(x).F_1[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-(i-1)]\frac{dy}{dx}\\
&\qquad+[\psi(x)]^2.F_2[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-2(i-1)]\frac{d^2y}{dx^2}\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad+[\psi(x)]^{p-\pi}.F_{p-\pi}[h-D-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)-(p-\pi)(i-1)]\frac{d^{p-\pi}y}{dx^{p-\pi}}\Big\}\\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[0]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[0]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[0]}}.G_0[h-D^{[0]}-(p-\pi)(\pi-1)(i-1)]z\\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[1]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[1]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[1]}}.G_1[h-D^{[1]}-\{(p-\pi)(\pi-1)+1\}(i-1)]\frac{dz}{dx}\\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[2]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[2]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[2]}}.G_2[h-D^{[2]}-\{(p-\pi)(\pi-1)+2\}(i-1)]\frac{d^2z}{dx^2}\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(x-\xi_1)^{\mathfrak{D}_1^{[\pi-1]}}.(x-\xi_2)^{\mathfrak{D}_2^{[\pi-1]}}\ldots(x-\xi_i)^{\mathfrak{D}_i^{[\pi-1]}}.G_{\pi-1}[h-D^{[\pi-1]}-\{(p-\pi)(\pi-1)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+(\pi-1)\}(i-1)]\frac{d^{\pi-1}z}{dx^{\pi-1}}=0,
\end{aligned}\right.
$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$
(5)\quad \left|\begin{aligned}
&\psi(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_i)\\
&h=\frac{1}{2}p(p-1)(i-1)-\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}\\
&D^{[\bar{\omega}_2]}=\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}^{[\bar{\omega}_2]};\qquad D=\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}.
\end{aligned}\right.
$$

Die Grade der ganzen rationalen Functionen $F_0, F_1, \ldots, F_{p-\pi}$; $G_0, G_1, \ldots, G_{\pi-1}$ sind in den beigefügten Klammern angegeben. Die Grössen

$$h - D - (p - \pi)\pi(i - 1)$$
$$h - D^{(\mathfrak{p})} - \{(p - \pi)(\pi - 1) + \mathfrak{p}\}(i - 1) \qquad (\mathfrak{p} = 0, 1, 2, \ldots, \pi - 1)$$

dürfen nicht negativ sein, wodurch den Indicesdifferenzen $\delta_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}$ gewisse Bedingungen auferlegt werden.

3. Die Formel (I) ist besonders bemerkenswerth wenn $\pi = 1$ angenommen wird, da alsdann die Derivirten von z herausfallen. Es werden ferner die Grössen $\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}^{[\tilde{\omega}_2]}$ zu Null. $\mathfrak{D}_{\mathfrak{i}}$ wird in der Reihe $\delta_{1\mathfrak{i}}$, $\delta_{2\mathfrak{i}}, \ldots, \delta_{p\mathfrak{i}}$ enthalten sein und zwar ist es diejenige Grösse, welche von den übrigen um positive Zahlen übertroffen wird. Man erhält also die einfache Gleichung:

$$\text{(II)} \qquad 0 = (x - \xi_1)^{\mathfrak{D}_1}.(x - \xi_2)^{\mathfrak{D}_2} \ldots (x - \xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\Big\{F_0.y + \psi.F_1.\frac{dy}{dx} + \ldots$$
$$+ \psi^{p-1}.F_{p-1}.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}\Big\} + G_0[h].z,$$
$$F_{\mathfrak{p}} = F_{\mathfrak{p}}[h - D - \mathfrak{p}(i - 1)]$$

mit der Bedingung:

$$h - D - (p - 1)(i - 1) \geqq 0.$$

Setzt man endlich in der Gleichung (I) den Index π der Null gleich, dann resultirt die Differentialgleichung p^{ter} Ordnung für die Function y:

$$\text{(A)} \qquad 0 = F_0[h + p(i - 1)]y + \psi.F_1[h + (p - 1)(i - 1)]\frac{dy}{dx} + \ldots$$
$$+ \psi^{p-1}.F_{p-1}[h + i - 1]\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \psi^p.F_p[h]\frac{d^py}{dx^p}$$

denn es ist

$$\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \ldots = \mathfrak{D}_{i+1} = 0$$

also auch $D = 0$.

Für $h = 0$ erhält man die bekannte FUCHS'sche Form der Differentialgleichung:

$$(\mathrm{A}') \qquad 0 = F_0[p(i-1)].y + \psi.F_1[(p-1)(i-1)].\frac{dy}{dx} + \dots$$
$$+ \psi^{p-1}.F_{p-1}[i-1].\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}} + \psi^p.\frac{d^p y}{dx^p}.$$

In diesem Falle ist

$$(\mathrm{a}) \qquad \sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} = \frac{1}{2}\,p(p-1)(i-1).$$

Die Gleichung (A') lässt sich noch weiter vereinfachen. Es ist nemlich

$$y\left\{\begin{vmatrix} \lambda_{11}, \lambda_{12}, \dots, \lambda_{1,i}, \lambda_{1,i+1} \\ \lambda_{21}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{2,i}, \lambda_{2,i+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{p1}, \lambda_{p2}, \dots, \lambda_{p,i}, \lambda_{p,i+1} \end{vmatrix}\right.$$

$$= (x-\xi_1)^{\varepsilon_1}.(x-\xi_2)^{\varepsilon_2}\dots(x-\xi_i)^{\varepsilon_i}.y\left\{\begin{vmatrix} \lambda'_{11}, \lambda'_{12}, \dots, \lambda'_{1,i}, \lambda'_{1,i+1} \\ \lambda'_{21}, \lambda'_{22}, \dots, \lambda'_{2,i}, \lambda'_{2,i+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \lambda'_{p1}, \lambda'_{p2}, \dots, \lambda'_{p,i}, \lambda'_{p,i+1} \end{vmatrix}\right.$$

wenn $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_i$ ganz beliebige Grössen sind und zwischen den Indices $\lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}$ und $\lambda'_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}}$ die Relationen bestehen:

$$\lambda'_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} = \lambda_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}} - \varepsilon_{\mathfrak{i}} \qquad {\scriptstyle(\mathfrak{i}=1,2,\dots,i)}$$
$$\lambda'_{\mathfrak{p},i+1} = \lambda_{\mathfrak{p},i+1} + \sum_{(\mathfrak{i})}^{i}\varepsilon_{\mathfrak{i}}.$$

Man kann also jede Function y auf eine andere zurückführen, für welche i Indices in i verschiedenen Verticalreihen *willkürliche* Werthe erhalten. Wir können daher insbesondere setzen:

$$(6) \qquad \lambda_{1\mathfrak{i}} + \lambda_{2\mathfrak{i}} + \dots + \lambda_{p\mathfrak{i}} = n_{\mathfrak{i}} \qquad {\scriptstyle(\mathfrak{i}=1,2,\dots,i)}$$

wo die Grössen $n_1, n_2, \ldots, n_i$ beliebige ganze Zahlen sein sollen. Dann ist

$$\text{Det.}\,\mathfrak{B}_i = w_i^{(1)}.w_i^{(2)} \ldots w_i^{(p)} = e^{2n_i\pi} = 1. \qquad (i=1,2,\ldots,\iota)$$

Wegen der Gleichung (a) ist aber

$$\lambda_{1,\iota+1} + \lambda_{2,\iota+1} + \ldots + \lambda_{p,\iota+1} = \frac{1}{2}p(p-1)(\iota-1) - \sum_{(i)}^{\iota} n_i.$$

Folglich ist auch $\text{Det.}\,\mathfrak{B}_{\iota+1} = 1$.

Die zur Gleichung (A′) gehörende determinirende Gleichung heisst für den Verzweigungspunkt ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, \iota)$:

$$F_0 + F_1.\psi'.\lambda + F_2.\psi'^2.\lambda(\lambda-1) + \ldots$$
$$+ F_{p-1}.\psi'^{p-1}.\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-p+2) + \psi'^p.\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-p+1) = 0$$

wo in $F_0, F_1, \ldots, F_{p-1}$, so wie in $\psi' = \frac{d\psi}{dx}$ das Argument $x = \xi_i$ zu setzen ist.

F_{p-1} ist in Bezug auf ξ_i vom Grade $\iota - 1$, wir können also setzen:

$$F_{p-1} = g_0 + g_1\xi_i + \ldots + g_{\iota-1}\xi_i^{\iota-1}.$$

Da der Coefficient von λ^{p-1} in der determinirenden Gleichung gleich $-\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}i}$ sein muss, so erhalten wir die folgenden lineären Gleichungen zur Bestimmung der Grössen $g_0, g_1, \ldots, g_{\iota-1}$:

$$g_0 + \xi_i.g_1 + \xi_i^2.g_2 + \ldots + \xi_i^{\iota-1}.g_{\iota-1} = \left[\frac{1}{2}p(p-1) - n_i\right]\psi'(\xi_i). \qquad (i=1,2,\ldots,\iota)$$

Das Glied $F_{p-1}[\iota-1]\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$ fällt also aus der Differentialgleichung (A′) aus, wenn wir setzen:

$$n_1 = n_2 = \ldots = n_\iota = \frac{1}{2}p(p-1).$$

Das System, für welches $\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\lambda_{\mathfrak{p}i} = \frac{1}{2}p(p-1)$ ist, wollen wir im Folgenden ein »reducirtes» nennen.

4. Die Existenz der Functionen y, insofern sie der Gleichung (A′)

genügen, ist von Herrn FUCHS in aller Strenge nachgewiesen. Wenn wir also ein allgemeineres System (z), welches der Gleichung:

$$0 = G_0[k + p(i - 1)]z + \psi . G_1[k + (p - 1)(i - 1)]\frac{dz}{dx} + \dots$$
$$+ \psi^{p-1}. G_{p-1}[k + i - 1]\frac{d^{p-1}z}{dx^{p-1}} + \psi^p . G_p[k]\frac{d^p z}{dx^p},$$

genügt, wo

$$k = -\sum_{(\mathfrak{i})}^{i+1}\sum_{(\mathfrak{p})}^{p}\delta_{\mathfrak{p}\mathfrak{i}},$$

durch ein Hauptsystem analytisch ausdrücken können, dann ist die Existenz von z ebenfalls ausser Zweifel. Der Zusammenhang beider Systeme ist aber gegeben durch die Gleichung:

$$z = (x - \xi_1)^{\mathfrak{D}_1}.(x - \xi_2)^{\mathfrak{D}_2} \dots (x - \xi_i)^{\mathfrak{D}_i}\Big\{P_0 . y + \psi . P_1 . \frac{dy}{dx} + \dots$$
$$+ \psi^{p-1}. P_{p-1}. \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}\Big\}$$

wo $P_{\mathfrak{p}}$ ($\mathfrak{p} = 0, 1, \dots, p - 1$) eine ganze rationale Function vom Grade: $- D - \mathfrak{p}(i - 1)$ ist. Aus der letzteren Gleichung erkennt man unmittelbar, dass die Wurzeln der Gleichung $G_p[k] = 0$ nicht Unstetigkeitspunkte der Functionen z sein können. Da die Coefficienten der Function $G_p[k]$ zur Festlegung eines Individuums dienen können, so wollen wir dieselben die »individuellen» Parameter der Function z nennen.

Bisher sind die Functionen $P_0, P_1, \dots, P_{p-1}$ in der Reductionsformel nur dem *Grade* nach bekannt. Die Coefficienten in denselben bleiben also zu bestimmen. Die natürlichste Methode zur Bestimmung derselben besteht darin, die Thatsache zur analytischen Formulirung zu bringen, dass zu z dieselben »erzeugenden» Substitutionen gehören wie zu y. Allein dieser Weg hat beträchtliche Schwierigkeiten, da diese erzeugenden Substitutionen von der Wahl der Initialzweige abhängen, während die »definirenden» Elemente der mehrfach lineär verknüpften Functionen die independenten Invarianten jener Substitutionen sind. Um diese Schwierigkeiten zu vermeiden, machen wir die Annahme, die Functionen z seien, ebenso wie die Functionen y, durch ihre Differentialgleichung »determinirt».

Dass dies der Fall ist, lässt sich auch streng beweisen, indem man den FUCHS'schen Existenzbeweis, nur ganz unbedeutend modificirt, auf die Differentialgleichung der z anwendet. Wir werden im Folgenden voraussetzen, dies sei geschehen.

Man kann stets annehmen die Indices des Systems (z) seien so beschaffen, dass $\mathfrak{D}_1 = \mathfrak{D}_2 = \ldots = \mathfrak{D}_i = 0$ sei. Denn ist dies thatsächlich nicht der Fall, dann können wir (nach N° 3), ohne die Allgemeinheit zu beschränken, die Function z stets auf eine solche mit veränderten Indices zurückführen, für welche diese Bedingungen erfüllt sind. Alsdann kann man aber über die Grössen $\delta_{1,i+1}, \delta_{2,i+1}, \ldots, \delta_{p,i+1}$ nicht mehr verfügen. Jedenfalls muss $D = \mathfrak{D}_{i+1}$ negativ sein. Wir setzen daher $D = -m$. Die Reductionsgleichung nimmt dann die folgende Form an

$$(7) \qquad z = P_0[m].y + \psi.P_1[m-(i-1)].\frac{dy}{dx} + \ldots$$
$$+ \psi^{p-1}.P_{p-1}[m-(p-1)(i-1)].\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}.$$

Aus dieser Gleichung entwickele man die Grössen:

$$\psi\frac{dz}{dx}, \quad \psi^2\frac{d^2z}{dx^2}, \quad \ldots, \quad \psi^p\frac{d^pz}{dx^p},$$

und eliminire mit Hülfe der Differentialgleichung, alle Derivirten von y, welche die $(p-1)^{\text{te}}$ übersteigen. Auf diese Weise erhält man Ausdrücke von der Form:

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \psi\frac{dz}{dx} &= a_{11}.y + a_{12}.\psi.\frac{dy}{dx} + \ldots + a_{1p}.\psi^{p-1}.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}, \\ \psi^2\frac{d^2z}{dx^2} &= a_{21}.y + a_{22}.\psi.\frac{dy}{dx} + \ldots + a_{2p}.\psi^{p-1}.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi^p\frac{d^pz}{dx^p} &= a_{p1}.y + a_{p2}.\psi.\frac{dy}{dx} + \ldots + a_{pp}.\psi^{p-1}.\frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}. \end{aligned} \right.$$

Bezeichnet man den Grad einer ganzen Function Fx mit ΓFx, dann lassen sich die Grade der ganzen Functionen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{pp}$ in folgender Weise darstellen:

$$
(8')\quad \left\{\begin{array}{l}
\Gamma a_{11} = m + i - 1, \quad \Gamma a_{12} = m, \ \ldots, \ \Gamma a_{1p} = m - (p-2)(i-1) \\
\Gamma a_{21} = m + 2(i-1), \quad \Gamma a_{22} = m + i - 1, \ \ldots, \ \Gamma a_{2p} = m - (p-3)(i-1), \\
\Gamma a_{31} = m + 3(i-1), \quad \Gamma a_{32} = m + 2(i-1), \ \ldots, \ \Gamma a_{3p} = m - (p-4)(i-1) \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Gamma a_{p1} = m + p(i-1), \quad \Gamma a_{p2} = m + (p-1)(i-1), \ \ldots, \ \Gamma a_{pp} = m + i - 1.
\end{array}\right.
$$

Man führe nun die Grössen $\psi \frac{dz}{dx}, \psi^2 \frac{d^2 z}{dx^2}, \ldots, \psi^p \frac{d^p z}{dx^p}$ und z in die Differentialgleichung von z ein, dann erhält man:

$$
0 = (P_0 G_0 + a_{11} G_1 + \ldots + a_{p1} G_p) y + (P_1 G_0 + a_{12} G_1 + \ldots + a_{p2} G_p) \psi \frac{dy}{dx} + \ldots
$$
$$
+ (P_{p-1} G_0 + a_{1p} G_1 + \ldots + a_{pp} G_p) \psi^{p-1} \frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}}.
$$

Dieser Ausdruck ist aber eine homogene lineäre Differentialgleichung $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für die Function y. Würde die Function y dieser Gleichung genügen, so müsste zwischen je p Zweigen so wohl als zwischen je $p+1$ Zweigen derselben eine lineäre homogene Relation mit constanten Coefficienten bestehen, was offenbar unmöglich ist. Desshalb muss diese Gleichung identisch Null sein d. h. es müssen für jeden Werth von x die Gleichungen bestehen

$$
\begin{aligned}
P_0 G_0 + a_{11} G_1 + \ldots + a_{p1} G_p &= 0, \\
P_1 G_0 + a_{12} G_1 + \ldots + a_{p2} G_p &= 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
P_{p-1} G_0 + a_{1p} G_1 + \ldots + a_{pp} G_p &= 0.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichungen sind in Bezug auf x, der Reihe nach, von dem Grade:

$$
m + k + p(i-1), \ m + k + (p-1)(i-1), \ \ldots, \ m + k + (i-1).
$$

Sie liefern also im Ganzen $p(m+k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$ Bedingungsgleichungen für die Coefficienten in den ganzen rationalen Functionen

$$P_0, P_1, \ldots, P_{p-1};\ G_0, G_1, \ldots, G_p;\ a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{pp}.$$

Von diesen Gleichungen sind aber nur $p(m+k+i+1)-1$ von einander unabhängig, während die übrigen

$$\frac{1}{2}p\{p(i-1)-(i+1)\}+1$$

Gleichungen identisch erfüllt sind.[1]

Als unbekannte Grössen haben wir anzusehen:

$$\textit{erstens}\ p(k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$$

Coefficienten in den Functionen $G_0, G_1, \ldots, G_{p-1}$,

$$\textit{zweitens}\ p(m+1)-\frac{1}{2}p(p-1)(i-1)-1$$

Coefficienten in den Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$. Diese Unbekannten ergeben sich selbstverständlich nicht *eindeutig* aus den als von einander unabhängig bezeichneten Gleichungen, da die letzteren in keinem Falle lineär sind.

Die Grössen $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ in dem Ausdruck $G_k[k]=(x-\tau_1)(x-\tau_2)\ldots(x-\tau_k)$, welche wir als »individuelle» Parameter des Systems (z) bezeichnet haben, sind bei dieser Reduction als »Data» anzusehen und sind der Natur der Aufgabe gemäss, keiner Beschränkung unterworfen.

Die Parameter der Differentialgleichung eines Hauptsystems zerfallen in zwei Gruppen: in solche, welche durch die Bedingungen der Verzweigung bestimmt sind, deren Anzahl $p(i+1)-1$ ist, und die übrigen. Jene $(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\}$ Parameter, welche auch nach Angabe des Indicessystems unbestimmt bleiben, wollen wir die »characteristischen» Parameter der Gleichung nennen. Das allgemeine System (z) besitzt ebensoviele characteristische Parameter, die wir aber nicht gerade als »bestimmte Coefficienten» aufzufassen brauchen.

[1] In dem besonderen Falle $p=2$, $i=2$, sind *alle* auf die obige Art erhaltenen Gleichungen von einander unabhängig. Denn es ist $\frac{1}{2}p\{p(i-1)-(i+1)\}+1=0$.

Wir können jetzt das Resultat der vorstehenden Untersuchung in dem folgenden *Satze* aussprechen:

»Ein mehrfach lineär verknüpftes Functionensystem mit einer beliebigen Anzahl beliebiger »individueller Parameter» lässt sich stets auf eine endliche Anzahl von »Hauptsystemen» derselben Art mit vorgegebenen »characteristischen» Parametern reduciren. Die »characteristischen» Parameter des zu reducirenden Systems können *nicht* willkürlich angenommen werden, sondern müssen einem gewissen Systeme simultaner nicht lineärer algebraischer Gleichungen genügen.»

5. Will man nicht gerade auf ein Hauptsystem mit *vorgegebenen* characteristischen Parametern reduciren, dann kann man sich einer einfacheren Methode bedienen, welche im Folgenden angedeutet werden soll. Sind nemlich $y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{pi}$ einerseits und $z_{1i}, z_{2i}, \ldots, z_{pi}$ andererseits von einander unabhängige Zweigsysteme der Functionen y und z dann ist

$$\begin{vmatrix} z_{1i}, & \frac{dz_{1i}}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{p-1}z_{1i}}{dx^{p-1}} \\ z_{2i}, & \frac{dz_{2i}}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{p-1}z_{2i}}{dx^{p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{pi}, & \frac{dz_{pi}}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{p-1}z_{pi}}{dx^{p-1}} \end{vmatrix} = G_p[k\,|\,. \begin{vmatrix} y_{1i}, & \frac{dy_{1i}}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{p-1}y_{1i}}{dx^{p-1}} \\ y_{2i}, & \frac{dy_{2i}}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{p-1}y_{2i}}{dx^{p-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{pi}, & \frac{dy_{pi}}{dx}, & \ldots, & \frac{d^{p-1}y_{pi}}{dx^{p-1}} \end{vmatrix}.$$

Infolge der Gleichungen (8) der vorigen Nummer erhält man also die einfache Bedingungsgleichung:

$$(9)\qquad \begin{vmatrix} P_0, & P_1, & \ldots, & P_{p-1} \\ a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1p} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p-1,1}, & a_{p-1,2}, & \ldots, & a_{p-1,p} \end{vmatrix} = G_p[k].$$

Diese Gleichung, welche in Bezug auf x vom Grade pm ist, muss identisch für alle x erfüllt sein. Sie liefert also $pm + 1$ simultane Gleichungen. Aus diesen bestimmen sich:

$$pm + p - \frac{1}{2}p(p-1)(i-1)$$

Coefficienten in den Functionen $P_0, P_1, \ldots, P_{p-1}$, und

$$(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1) - 1\right\}$$

characteristische Parameter des Systems (y), da dieselben von einander unabhängig sind.

In dem Falle der *hypergeometrischen Functionen* $\binom{p=2}{i=2}$ wird die Zahl $(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\}$ zu Null. Die Differentialgleichung des Hauptsystems ist dann:

$$(x^2 - x)\frac{d^2y}{dx^2} + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]\frac{dy}{dx} + \alpha.\beta.y = 0.$$

Die Indices sind also so gewählt, dass $y = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Differentialgleichung genügt. Nach der üblichen Bezeichnung ist

$$y = y\left\{\begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0, & 0, & \alpha \\ 1-\gamma, & \gamma-\alpha-\beta, & \beta \end{array}\right\}.$$

Das zu reducirende System z sei gegeben durch die Characteristik:

$$z = z\left\{\begin{array}{ccc} \underline{0} & \underline{1} & \underline{\infty} \\ 0, & 0, & \alpha - n \\ 1-\gamma, & \gamma-\alpha-\beta, & \beta - n \end{array}\right\}$$

so dass also $k = 2n$. Die Gleichung (9) heisst jetzt:

$$\begin{vmatrix} P_0[n], & P_1[n-1] \\ x(x-1)\left(\frac{dP_0[n]}{dx} - \alpha\beta.P_1[n-1]\right), & P_0[n] + \frac{d}{dx}\{x(x-1).P_1[n-1]\} - [(\alpha+\beta+1)x-\gamma].P_1[n-1] \end{vmatrix} = G[2n].$$

Wir wollen nur den speciellen Fall $k = 2$ weiter verfolgen. Alsdann sei:

$$P_0[1] = a + bx; \qquad P_1[0] = c; \qquad G[2] = p + qx + x^2.$$

Die Coefficienten a, b, c bestimmen sich also aus den Gleichungen:

$$(10) \qquad \left| \begin{aligned} aa + (\gamma - 1)ac &= p, \\ 2ab - (\alpha + \beta - 1)ac + \gamma bc - \alpha\beta cc &= q, \\ bb - (\alpha + \beta)bc + \alpha\beta cc &= 1. \end{aligned} \right.$$

Setzt man

$$a + \frac{1}{2}(\gamma - 1)c = x_2,$$

$$b - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)c = x_1,$$

$$-(a + b) - \frac{1}{2}(\gamma - \alpha - \beta)c = x_3,$$

dann nehmen die Gleichungen (10) die folgende symmetrische Form an:

$$x_1^2 - (\gamma - 1)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 = p,$$
$$x_2^2 - (\alpha - \beta)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 = 1,$$
$$x_3^2 - (\alpha + \beta - \gamma)^2(x_1 + x_2 + x_3)^2 = p + q + 1.$$

Die Quadrate der neuen Unbekannten x_1, x_2, x_3 bestimmen sich aus Gleichungen *vierten* Grades. (Man vergl. Riemann, Werke, pag. 306.) Der Fall $k = 1$ lässt sich in ganz ähnlicher Weise behandeln.

6. Wir sind jetzt im Stande die Coefficienten der Functionen $H_0x, H_1x, \ldots, H_px$ in der Riemann'schen Fundamentalrelation:

$$(11) \qquad H_0x.y^{(0)} + H_1x.y^{(1)} + \ldots + H_px.y^{(p)} = 0$$

zu bestimmen. Wir denken uns zunächst die Indices in den einzelnen Functionen $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ derartig transformirt, dass bei der nachfolgenden Reduction auf *ein* Hauptsystem (y) die Grössen $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots, \mathfrak{D}_i$ gleich Null gesetzt werden können, wie wir oben angenommen haben. Dadurch treten an die Stelle von $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ andere ebenfalls zur selben Art gehörige Functionen $\eta^{(0)}, \eta^{(1)}, \ldots, \eta^{(p)}$, welche sich von den ursprünglichen nur um rationale Factoren unterscheiden. Die Reductionsgleichungen haben also die Form:

$$(12)\quad \left|\begin{array}{l} y^{(0)} = R_0^{(0)}x.\mathrm{y} + R_1^{(0)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(0)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}, \\ y^{(1)} = R_0^{(1)}x.\mathrm{y} + R_1^{(1)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(1)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y^{(p)} = R_0^{(p)}x.\mathrm{y} + R_1^{(p)}x.\dfrac{d\mathrm{y}}{dx} + \ldots + R_{p-1}^{(p)}x.\dfrac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}. \end{array}\right.$$

In diesen Gleichungen sind die Functionen Rx in mehrdeutiger Weise vollständig bestimmt. Sie enthalten in ihren Coefficienten implicite die willkürlich angenommenen »characteristischen» Parameter $k_1, k_2, \ldots, k_\rho$ der Function (y), wo zur Abkürzung

$$\rho = (p - 1)\left[\frac{1}{2}p(i - 1) - 1\right]$$

gesetzt ist.

Eliminirt man nun aus den $p + 1$ Gleichungen (12) die Grössen

$$\mathrm{y}, \frac{d\mathrm{y}}{dx}, \ldots, \frac{d^{p-1}\mathrm{y}}{dx^{p-1}}$$

dann erhält man eine Relation von der Form der Gleichung (11).

Die »characteristischen» Parameter der Functionen $y^{(0)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(p)}$ sind hierbei natürlich nicht willkürlich, sondern vielmehr Functionen der Parameter $k_1, k_2, \ldots, k_\rho$. Die Mannigfaltigkeit der Relationen (11), welche zu denselben erzeugenden Substitutionen gehören, ist daher von der Dimension $q.\rho$, wenn ρ die obige Bedeutung hat und q eine bestimmte endliche Zahl bezeichnet.

Die explicite Darstellung der Coefficienten in den Functionen H_0x, $H_1x, \ldots, H_px$ ist nur in den einfachsten Fällen möglich. Dieser Umstand beeinträchtigt jedoch unsere Theorie keineswegs, da die Schwierigkeiten im Gebiete der Algebra liegen. Wir können also die Aufgabe, welche wir uns gestellt haben als »im Allgemeinen» erledigt betrachten. Dass eine eingehende Untersuchung der bei unserem Verfahren auftretenden Systeme algebraischer Gleichungen für die Theorie der Functionensysteme *derselben Art* von grosser Wichtigkeit sein würde, ist selbstverständlich.

7. Zum Schluss will ich noch den Zusammenhang darlegen, welcher zwischen den independenten Invarianten der erzeugenden Substitutionen einer mehrfach lineär verknüpften Function und ihren »individuellen» Parametern besteht. Für ein »reducirtes» System [1] nimmt Herr POINCARÉ (Acta Mathematica, Bd. 4, p. 205) $(p^2-1)(i-1)$ independente Invarianten an, d. h. ebensoviele als die erzeugenden Substitutionen independente Coefficienten enthalten. Die Periodicität der p-fach lineär verknüpften Functionen wird nemlich bestimmt:

erstens durch $p^2 i$ Coefficienten in den Substitutionen

$$\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{\iota-1}, \mathfrak{B}_{\iota+1}, \ldots, \mathfrak{B}_{i+1}$$

zweitens durch p Coefficienten in der Substitution $\mathfrak{B}_\iota$.

Von den ersten $p^2 i$ Coefficienten können jedoch p beliebige gleich Eins gesetzt werden, da irgend welche p Initialzweige willkürliche Factoren erhalten können. Ferner sind die $p^2 i$ insoweit unbestimmten Coefficienten infolge der Gleichung (1) [N° 1] noch p^2-1 von einander unabhängigen Bedingungen unterworfen. Beachtet man endlich noch die Gleichungen:

$$\text{Det.}\,\mathfrak{B}_1 = \text{Det.}\,\mathfrak{B}_2 = \ldots = \text{Det.}\,\mathfrak{B}_i = 1$$

dann bleiben $(p^2-1)(i-1)$ Coefficienten unbestimmt.

Denken wir uns nun eine allgemeine p-fach lineär verknüpfte Function z durch ein Hauptsystem mit vorgegebenen »characteristischen» Pa-

---

[1] Man beachte, dass den Bedingungen $\text{Det.}\,\mathfrak{B}_1 = \text{Det.}\,\mathfrak{B}_2 = \ldots = \text{Det.}\,\mathfrak{B}_i$ noch *keineswegs* eine Differentialgleichung entsprechen muss, in welcher das Glied $F_{p-1}\cdot\dfrac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$ ausfällt, obwohl diese den Substitutionen auferlegte Bedingungen die Zahl der independenten Invarianten wesentlich beeinflussen. (Man vergl. Acta Mathematica, Bd. 4, p. 202.)

rametern ausgedrückt und darauf jenes Hauptsystem in ein »reducirtes» übergeführt, dann ist die Function z wesentlich determinirt

erstens durch $(p-1)\left[\frac{1}{2}p(i-1)-1\right]$ »characteristische» Parameter,

zweitens durch $p(i+1)-(i+1)$ Parameter, welche durch die Bedingungen der Verzweigung bestimmt sind,

drittens durch i endliche Verzweigungspunkte,

viertens durch k »individuelle» Parameter.

Von den i endlichen Verzweigungspunkten kann man zweien die willkürlichen Zahlwerthe 0 und 1 beilegen, so dass nur $i-2$ allgemein bleiben.

Damit jene

$$\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)+p+k-2$$

allgemeinen Bestimmungsstücke den $(p^2-1)(i-1)$ independenten Invarianten entsprechen, muss

$$k=\left[\frac{1}{2}p(p-1)-1\right]i-\left[\frac{1}{2}p(p+1)-3\right]$$

sein. Es ist also

für $p=2$ die Zahl $k=0$ für *jeden* Werth von i;

für $p=3$ die Zahl $k=2i-3$;

für $p=4$ die Zahl $k=5i-7$; etc.

Allgemein gilt der *Satz:*

»Sollen die Definitionen der mehrfach lineär verknüpften Functionen durch die independenten Invarianten der erzeugenden Substitutionen einerseits und ihre Differentialgleichung andererseits äquivalent sein (d. h. gleichviele von einander unabhängige Bestimmungsstücke enthalten), dann muss man den betreffenden Functionen im Allgemeinen eine gewisse Anzahl »individueller» Parameter zuertheilen, es sei denn dass die Differentialgleichung von der *zweiten* Ordnung wäre.»

Einen ganz analogen Satz hat Herr POINCARÉ (Acta Mathematica, Bd. 4, p. 219) aufgestellt. Nur treten dort an Stelle der »individuellen» Parameter »ausserwesentlich singuläre Punkte» (points à apparence singulière). Dieser Unterschied könnte, in gewissem Sinne, irrelevant erscheinen, da die individuellen Parameter stets als ausserwesentlich singuläre Stellen aufzufassen sind. Man beachte jedoch, dass das Umgekehrte, im Allgemeinen, keineswegs statthaft ist.

Einbeck 21. Aug. 1887.