SUR LA REPRÉSENTATION DES VALEURS LIMITES DES INTÉGRALES PAR DES RÉSIDUS INTÉGRAUX

PAR

P. TCHEBYCHEFF
à S:t PÉTERSBOURG.

(Traduit du russe[1] par Sophie Kowalevski à Stockholm.)

Dans un mémoire *Sur les valeurs limites des intégrales*, publié en 1874 dans le Journal de mathématiques de LIOUVILLE, nous avons communiqué quelques résultats concernant les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx$$

dans le cas où l'on donne les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \qquad \int_a^b x^2f(x)dx, \quad . \; . \; .$$

prises entre des limites plus vastes: $a < u$, $b > v$ et où la fonction inconnue $f(x)$ reste positive pour toutes les valeurs réelles de x entre $x = a$ et $x = b$.

D'après un théorème contenu dans ce mémoire si le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \quad . \; . \; . \; , \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx$$

---

[1] О представлении предѣльныхъ величинъ интеграловъ посредствомъ интегральныхъ вычетовъ. СПБ. 1885. Appendice au tome 51 des Annales de l'académie des sciences de S:t Pétersbourg.

est pair $= 2m$, les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx$$

ne peuvent être déterminées que dans le cas où les limites u, v satisfont à une équation, dont les coefficients dépendent de la valeur des intégrales données.

Pour obtenir cette équation et les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u f(x)dx,$$

dans le cas où u, v satisfont à cette équation, nous développons l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx$$

en une série, procédant selon les puissances décroissantes de z

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx = \frac{\int_a^b f(x)dx}{z} + \frac{\int_a^b xf(x)dx}{z^2} + \ldots.$$

Posant

$$\int_a^b f(x)dx = A_0, \quad \int_a^b xf(x)dx = A_1, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx = A_{2m-1}$$

nous obtenons donc pour l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)dx}{z-x}$$

l'expression approximative suivante, rigoureuse jusqu'au terme $\frac{1}{z^{2m}}$ inclusivement:

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}.$$

En désignant donc par

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}$$

la fraction continue, que l'on obtient en développant l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}}$$

en fractions continues et en s'arrêtant à la $m^{\text{ième}}$ réduite, nous aurons par conséquent, aussi avec un degré d'approximation jusqu'au terme $\frac{1}{z^{2m}}$ inclusivement

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}.$$

A l'aide de la fraction continue, définie de cette façon, on établit l'équation à laquelle doivent satisfaire u et v, de même que les valeurs limites correspondantes de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx.$$

En désignant par

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$$

la fraction ordinaire, à laquelle peut se réduire la fraction continue en question, et en égalant le dénominateur $\psi_m(z)$ à zéro, on obtient l'équation

$$\psi_m(z) = 0$$

à laquelle doivent satisfaire les limites u et v de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx$$

Et en désignant par

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{l-1},\quad z_l,\ \ldots,\ z_{n-1},\quad z_n,\ \ldots,\ z_m$$

toutes les racines de cette équation, disposées d'après leur grandeur croissante, on trouve que si l'on pose

$$u = z_l, \qquad v = z_n,$$

les valeurs limites de l'intégrale en question sont exprimées par les sommes

$$\frac{\varphi_m(z_{l+1})}{\psi_{m'}(z_{l+1})} + \frac{\varphi_m(z_{l+2})}{\psi_{m'}(z_{l+2})} + \ldots + \frac{\varphi_m(z_{n-1})}{\psi_{m'}(z_{n-1})},$$

$$\frac{\varphi_m(z_l)}{\psi_{m'}(z_l)} + \frac{\varphi_m(z_{l+1})}{\psi_{m'}(z_{l+1})} + \ldots + \frac{\varphi_m(z_n)}{\psi_{m'}(z_n)}.$$

Ces sommes sont composées des résidus de la fonction

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$$

par rapport aux racines de l'équation

$$\psi_m(z) = 0$$

contenues dans les limites

$$z_l, \; z_n$$

y étant ou non comprises les racines z_l et z_n elles mêmes.

Pour pouvoir exprimer ces sommes de résidus partiels par des résidus intégraux, nous conviendrons de désigner par ω une quantité positive infiniment petite. Vu que dans ce cas les racines de l'équation

$$\psi_m(z) = 0$$

contenues dans les limites

$$z_l + \omega, \qquad z_n - \omega$$

sont

$$z_{l+1}, \; z_{l+2}, \; \ldots, \; z_{n-1}$$

et les racines, contenues dans les limites

$$z_l - \omega, \qquad z_n + \omega,$$

sont

$$z_l, \; z_{l+1}, \; \ldots, \; z_n$$

nous pouvons représenter les sommes précédentes par les résidus intégraux

$$\mathop{\mathcal{E}}_{z_1+\omega}^{z_n-\omega}\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}, \qquad \mathop{\mathcal{E}}_{z_1-\omega}^{z_n+\omega}\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

En conséquence des valeurs limites trouvées pour l'intégrale

$$\int_{z_1}^{z_n} f(x)dx$$

on aura donc

$$\int_{z_1}^{z_n} f(x)dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{z_1+\omega}^{z_n-\omega}\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_{z_1}^{z_n} f(x)dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{z_1-\omega}^{z_n+\omega}\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

§ 2. Ces inégalités, de même que la solution d'un problème présentée dans un mémoire mentionnée plus haut, et d'autres problèmes du même genre, découlent immédiatement de la représentation des valeurs limites de l'intégrale

$$\int_u^v f(x)dx$$

par des résidus intégraux, dans le cas, où la limite supérieure de l'intégrale v reste arbitraire, mais la limite inférieure u coïncide avec la limite inférieure des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \; \ldots.$$

Dans ce cas les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

sont données par les formules suivantes:

(1) $$\int_a^v f(x)dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v+\omega} F(z)$$

(2) $$\int_a^v f(x)dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{v-\omega} F(z)$$

où $F(z)$ est une fonction rationnelle, dont la valeur dépend du nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \ \ldots$$

et de leur valeur. Cette fraction s'obtient facilement en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}dx$$

en fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cdots-\cfrac{1}{\alpha_m z+\beta_m-\cdots}}},$$

dont les m dénominateurs peuvent toujours être trouvées, comme nous l'avons montré, lorsque l'on connaît les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx = A_0, \qquad \int_a^b xf(x)dx = A_1, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx = A_{2m-1}.$$

En désignant comme auparavant par $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ la fraction ordinaire à laquelle se réduit la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z+\beta_1-\cfrac{1}{\alpha_2 z+\beta_2-\cdots-\cfrac{1}{\alpha_m z+\beta_m}}},$$

nous désignerons par $\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)}$ la fraction ordinaire que nous obtenons en nous arrêtant au terme

$$\frac{1}{\alpha_{m-1}z+\beta_{m-1}}.$$

Si, en outre des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx = A_0, \qquad \int_a^b xf(x)dx = A_1, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx = A_{2m-1}$$

on connaît aussi la valeur de l'intégrale

$$\int_a^b x^{2m} f(x)\,dx = A_{2m}$$

il est nécessaire, pour pouvoir déterminer la fraction rationnelle $F(z)$ dans les formules plus haut, de déterminer non seulement la fraction continue précitée et les deux fractions ordinaires $\frac{\varphi_{m-1}(z)}{\psi_{m-1}(z)}$, $\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}$ mais aussi la valeur du coefficient de z, dans le $(m+1)^{\text{er}}$ dénominateur de la fraction continue, obtenue par le développement de l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \ldots + \frac{A_{2m-1}}{z^{2m}} + \frac{A_{2m}}{z^{2m+1}}.$$

Nous désignerons ce coefficient par α_{m+1}.

§ 3. En étudiant la fraction rationnelle $F(z)$ nous remarquons que sous sa forme générale elle peut être exprimée d'une manière simple par une fraction continue. Dans cette dernière les m premiers dénominateurs sont identiques avec ceux de la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}}$$

que l'on obtient en développant l'intégrale

$$\int_a^b \frac{f(x)}{z-x}\,dx.$$

La fraction rationnelle $F(z)$ pourra donc être représentée par la formule

$$(3) \qquad F(z) = \cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cfrac{}{\ddots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m - \cfrac{1}{Z}}}}}$$

où Z est une fonction inconnue.

Cette fonction peut être exprimée à l'aide des fonctions $\psi_{m-1}(z)$, $\psi_m(z)$ seulement, si l'on connaît les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b xf(x)dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx.$$

Mais si l'on veut se servir de $2m+1$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b xf(x)dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m}f(x)dx$$

il faudra encore, pour déterminer $F(z)$, connaître une quantité constante α_{m+1}.

Dans le premier de ces deux cas, cette fonction sera donnée par la formule

$$Z = \gamma(z-v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)} \tag{4}$$

dans laquelle γ désigne la plus grande des deux quantités

$$\frac{1}{a-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right]$$

$$\frac{1}{b-v}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right].$$

Dans le second cas on trouve pour la détermination de Z deux formules différentes selon que la fraction

$$\frac{\dfrac{1}{a-v}\left[\dfrac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right] - \alpha_{m+1}}{\dfrac{1}{b-v}\left[\dfrac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right] - \alpha_{m+1}} \tag{5}$$

est positive ou négative. Dans le premier cas la fonction Z est définie par la formule

$$Z = \alpha_{m+1}(z-v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}. \tag{6}$$

Dans le second cas Z est donné par la formule

$$(7)\qquad Z = \alpha_{m+1}(z-a) - \frac{(b-a)\rho\delta}{1-\rho} + \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \frac{(b-a)^2\rho\delta}{(1-\rho)^2 z - (1-\rho)(b-a\rho)},$$

où

$$\rho = \frac{\dfrac{1}{a-v}\left[\dfrac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)} - \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right] - \alpha_{m+1}}{\dfrac{1}{b-v}\left[\dfrac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \dfrac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)}\right] - \alpha_{m+1}},$$

$$\delta = \frac{1}{b-a}\left[\frac{\psi_{m-1}(b)}{\psi_m(b)} - \frac{\psi_{m-1}(a)}{\psi_m(a)}\right] - \alpha_{m+1}.$$

§ 4. L'expression de la valeur limite de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)\,dx,$$

par les résidus intégraux nous conduit facilement à toutes les formules indiquées dans le mémoire précité.

En supposant connues les valeurs des $2m$ intégrales

$$\int_a^b f(x)dx,\qquad \int_a^b xf(x)dx,\quad \ldots\ ,\quad \int_a^b x^{2m-1}f(x)dx$$

et supposant de plus que l'on cherche la valeur limite de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

pour une valeur de v satisfaisant à l'équation

$$\psi_m(v) = 0,$$

nous remarquons que d'après le § 3 la valeur de Z sera donnée dans ce cas par la formule

$$Z = \gamma(z-v) + \frac{\psi_{m-1}(v)}{\psi_m(v)};$$

d'où il résulte, à cause de l'équation

$$\psi_m(v) = 0,$$

$$Z = \infty.$$

Par conséquent, d'après le § 3,

$$F(z) = \frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} - \frac{1}{\alpha_2 z + \beta_2} - \cdots - \frac{1}{\alpha_m z + \beta_m}.$$

En substituant à la fraction continue la fraction ordinaire qui lui est égale

$$\frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

on trouve

$$F(z) = \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Pour cette valeur de $F(z)$ les formules (1), (2) nous donnent

$$\int_a^v f(x)dx \geqq \sum_{a-\omega}^{v-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^v f(x)dx \leqq \sum_{a-\omega}^{v+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Ceci aura lieu pour toutes les valeurs de v satisfaisant à l'équation

$$\psi_m(v) = 0.$$

En posant l'un après l'autre

$$v = z_n, \qquad v = z_l,$$

(z_n et z_l signifient comme auparavant des racines de l'équation

$$\psi_m(z) = 0,$$

et $z_n > z_l$) nous déduisons de ces formules

$$\int_a^{z_n} f(x)dx \geqq \sum_{a-\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^{z_n} f(x)dx \leqq \sum_{a-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^{z_l} f(x)dx \geqq \sum_{a-\omega}^{z_l-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_a^{z_l} f(x)dx \leqq \sum_{a-\omega}^{z_l+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Et en retranchant les deux dernières inégalités des deux premières on trouve

$$\int_{z_1}^{z_n} f(x)dx \leqq \sum_{z_1-\omega}^{z_n+\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)},$$

$$\int_{z_1}^{z_n} f(x)dx \geqq \sum_{z_1+\omega}^{z_n-\omega} \frac{\varphi_m(z)}{\psi_m(z)}.$$

Et comme nous l'avons vu au § 1 ces inégalités nous conduisent aux mêmes valeurs limites de l'intégrale

$$\int_{z_1}^{n} f(x)dx$$

que nous avons communiquées dans le Journal de Liouville pour le cas considéré.

§ 5. Pour appliquer les formules (1) et (2) à la résolution du problème proposé dans le mémoire précité, nous supposons que les trois quantités données

$$p, d, k$$

sont déterminées par les formules suivantes:

$$p = \int_0^b f(x)dx,$$

$$d = \frac{\int_0^b xf(x)dx}{\int_0^b f(x)dx},$$

$$k = \int_0^b (x-d)^2 f(x)dx.$$

et que l'on veut trouver les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)dx$$

pour le cas où la fonction inconnue $f(x)$ ne devient pas négative pour des valeurs de x entre 0 et v.

Vu que les trois quantités

$$p,\ d,\ k$$

déterminent les valeurs des trois intégrales

$$\int_0^v f(x)dx \quad = p,$$

$$\int_0^v x f(x)dx = pd,$$

$$\int_0^v x^2 f(x)dx = pd^2 + k,$$

les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)dx$$

dans le problème considéré seront déterminées par les formules qui s'appliquent au cas, quand le nombre des intégrales données est impair $2m + 1$; il faut poser de plus

$$m = 1, \qquad a = 0,$$

$$A_0 = p, \qquad A_1 = pd,$$

$$A_2 = pd^2 + k.$$

Pour déterminer la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \ddots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}$$

nous développons l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} = \frac{p}{z} + \frac{pd}{z^2}$$

en une fraction continue, en nous arrêtant toutefois au premier dénominateur, ce qui nous donne

$$\frac{1}{\alpha_1 z + \beta_1} = \frac{1}{\frac{z}{p} - \frac{d}{p}}.$$

Nous trouvons donc

$$\frac{\varphi_1(z)}{\psi_1(z)} = \frac{1}{\frac{z}{p} - \frac{d}{p}}; \qquad \frac{\varphi_0(z)}{\psi_0(z)} = \frac{0}{1};$$

$$\frac{\psi_0(z)}{\psi_1(z)} = \frac{p}{z - d}.$$

Pour déterminer la quantité constante $\alpha_{m+1} = \alpha_2$, nous développons en fraction continue l'expression

$$\frac{A_0}{z} + \frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z^3} = \frac{p}{z} + \frac{pd}{z^2} + \frac{pd^2 + k}{z^3},$$

en nous arrêtant au second dénominateur et ne considérant que le premier membre de ce dernier. De cette manière nous trouvons

$$pz + \frac{pd}{z^2} + \frac{pd^2 + k}{z^3} = \cfrac{1}{\cfrac{z - d}{p} - \cfrac{1}{\cfrac{p^2}{k} z + \cdots}};$$

d'où l'on déduit, conformément à ce qui a été exposé au § 2,

$$\alpha_2 = \frac{p^2}{k}.$$

§ 6. En substituant ces valeurs dans la formule (5) on trouve la fraction

$$\frac{d - v + \frac{k}{pd}}{d - v - \frac{k}{p(b - d)}},$$

dont le signe décide, d'après le § 3, quelle des deux formules (6), (7) doit être employée pour déterminer la fonction Z.

Vu que cette fraction ne change de signe que pour les valeurs

$$v = d - \frac{k}{p(b-d)}, \qquad v = d + \frac{k}{pd},$$

pour lesquelles elle devient ∞ ou o, tandis que pour $v = \infty$ et $v = -\infty$ elle est égale à $+1$ ou -1, on voit que cette fraction sera positive pour

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)}$$

et pour

$$v > d + \frac{k}{pd};$$

tandis qu'elle est négative lorsque v est contenu entre les limites

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}.$$

Par conséquent, si $v < d - \frac{k}{p(b-d)}$ ou bien $v > d + \frac{k}{pd}$ nous devons, conformément au § 3, nous servir de la formule (6) pour déterminer la fonction Z, ce qui nous donne

$$Z = \alpha_2(z-v) + \frac{\psi_0(v)}{\psi_1(v)} = \frac{p^2}{k}(z-v) + \frac{p}{v-d}.$$

Au contraire, dans le cas où

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}$$

la fonction Z sera déterminée par la formule (7) qui nous donne

$$Z = \frac{p^2}{k}z + (2d-b-v)\frac{p^2}{k} + (b-d)(v-d)\frac{dp^3}{k^2}$$

$$-\frac{p[p(b-d)d-k][p(v-d)d-k][p(v-d)(b-d)-k]}{k^3(z-d)-pk^2(b-d)(v-d)}.$$

En passant maintenant à la détermination de la fraction rationnelle $F(z)$, conformément au § 3, nous remarquons que dans le cas considéré la fraction continue

$$\cfrac{1}{\alpha_1 z + \beta_1 - \cfrac{1}{\alpha_2 z + \beta_2 - \cdots - \cfrac{1}{\alpha_m z + \beta_m}}}$$

ne contient qu'un seul dénominateur

$$\alpha_1 z + \beta_1 = \frac{z}{p} - \frac{d}{p};$$

la formule (3) se réduit donc à

$$F(z) = \frac{1}{\frac{z}{p} - \frac{d}{p} - \frac{1}{Z}}.$$

Aux deux valeurs de Z correspondent donc les valeurs suivantes de $F(z)$:

$$F(z) = \frac{p(z - v) + \frac{k}{v - d}}{(z - v)\left(z - d + \frac{k}{p(v - d)}\right)},$$

$$F(z) = \frac{pz^2 - p(b + v - d) + k + (b - d)(k - d)p}{z(z - b)(z - v)}.$$

La première de ces valeurs aura lieu, d'après ce que nous avons vu, dans le cas où

$$v < d - \frac{k}{p(b - d)}$$

ou bien

$$v > d + \frac{k}{pd},$$

la seconde dans le cas où

$$d - \frac{k}{p(b - d)} < v < d + \frac{k}{pd}.$$

En introduisant ces valeurs de $F(z)$ dans les formules (1) et (2) et en posant $a = 0$, nous trouvons que les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_0^v f(x)dx$$

que nous cherchons dans le problème considéré, seront données par les formules

$$(8)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqq \sum_{-\omega}^{v-\omega} \frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)} \\ \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqq \sum_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)}, \end{cases}$$

dans le cas où

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)}$$

ou

$$v > d + \frac{k}{pd};$$

et par les formules

$$\int_0^v f(x)dx \geqq \sum_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2 - p(b+v-d)z + k + (b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq \sum_{-\omega}^{v+\omega} \frac{pz^2 - p(b+v-d)z + k + (b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

dans le cas où

$$d - \frac{k}{p(b-d)} < v < d + \frac{k}{pd}.$$

§ 7. Si nous nous arrêtons au cas

$$v < d - \frac{k}{p(b-d)},$$

nous remarquons que pour telles valeurs de z comprises entre $z = -\omega$ et $z = v \pm \omega$, la fraction

$$\frac{p(z-v)+\frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

ne peut devenir ∞ que pour

$$z = v,$$

vu que la seconde valeur $z = d - \frac{k}{p(v-d)}$, pour laquelle cette fraction devient ∞, surpasse, pour les valeurs considérées de v et pour ω infiniment petit, aussi bien $v + \omega$ que $v - \omega$. Quant à la valeur

$$z = v,$$

elle sera contenue, à cause de l'inégalité

$$\omega > 0,$$

dans les limites

$$-\omega, \qquad v + \omega,$$

mais elle sera en dehors des limites

$$-\omega, \qquad v - \omega.$$

Par conséquent, pour les valeurs considérées de v, le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

se réduira à zéro, tandis que le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

se réduira au résidu correspondant à $z = v$, qui est égal à

$$\frac{kp}{k + p(v-d)^2}.$$

Par conséquent, dans le cas où $v < d - \frac{k}{p(b-d)}$ les formules (8) se réduisent aux suivantes:

$$\int_0^v f(x)dx \geqq 0,$$

$$\int_0^v f(x)dx \leq \frac{kp}{k + p(v-d)^2}.$$

Passant maintenant au cas,

$$v > d + \frac{k}{pd}.$$

Nous remarquons que dans ce cas la valeur

$$z = d - \frac{k}{p(v-d)},$$

pour laquelle la fraction

$$\frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

devient infinie, est contenue aussi bien entre les limites

$$-\omega, \qquad v - \omega$$

qu'entre les limites

$$-\omega, \qquad v + \omega$$

tandis que l'autre valeur $z = v$, pour laquelle cette fraction devient aussi ∞, n'est contenue qu'entre les deux dernières limites. Par conséquent le résidu intégral

$$\mathcal{E}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{p(z-v) + \frac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z - d + \frac{k}{p(v-d)}\right)}$$

se réduit au résidu correspondant à

$$z = d - \frac{k}{p(v-d)},$$

lequel est égal à

$$\frac{p^2(v-d)^2}{k+p(v-d)^2},$$

tandis que le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{p(z-v)+\dfrac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\dfrac{v}{p(v-d)}\right)}$$

sera égal à la somme des résidus de la fraction

$$\frac{p(z-v)+\dfrac{k}{v-d}}{(z-v)\left(z-d+\dfrac{v}{p(v-d)}\right)}$$

correspondants aux deux valeurs de z, pour lesquelles cette fraction devient infinie. Cette somme est égale à p. Pour ces valeurs des résidus intégraux, les formules (8) nous donnent

$$\int_0^v f(x)dx \geqq \frac{p^2(v-d)^2}{k+p(v-d)^2},$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq p.$$

Il nous reste encore à étudier plus en détail le cas où

$$d-\frac{k}{p(b-d)} < v < d+\frac{k}{pd}.$$

Pour ces valeurs de v, les valeurs limites de intégrale

$$\int_0^v f(x)dx$$

sont données, d'après le § 6, par les formules

$$\int_0^v f(x)dx \geqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2-p(b+v-d)z+k+(b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)},$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq \mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{pz^2-p(b+v-d)z+k+(b-d)(v-d)p}{z(z-b)(z-v)}.$$

Vu que des 3 valeurs

$$z = 0, \qquad z = b, \qquad z = v$$

pour lesquelles la fraction

$$\frac{pz^2 - p(b + v - d)z + k + (b - d)(v - d)p}{z(z - b)(z - v)}$$

devient infinie, la première, $z = 0$, est contenue aussi bien entre les limites

$$-\omega, \qquad v - \omega,$$

qu'entre les limites

$$-\omega, \qquad v + \omega,$$

la seconde $z = b$ n'est contenue ni entre les premières, ni entre les secondes limites, tandis que la troisième, $z = v$ n'est contenue qu'entre les secondes limites, le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v-\omega} \frac{pz^2 - p(b + v - d)z + k + (b - d)(v - d)p}{z(z - b)(z - v)}$$

se reduit au résidu correspondant à $z = 0$, lequel est égal à

$$\frac{(b - d)(v - d)p + k}{bv}$$

tandis que le résidu intégral

$$\mathop{\mathcal{E}}_{-\omega}^{v+\omega} \frac{pz^2 - p(b + v - d)z + k + (b - d)(v - d)p}{z(z - b)(z - v)}$$

est égal à la somme des résidus correspondant à $z = 0$ et à $z = v$; ces résidus sont respectivement égaux à

$$\frac{(b - d)(v - d)p + k}{bv},$$

$$\frac{d(b - d)p + k}{(b - v)v};$$

leur somme est donc

$$\frac{(b - d)(b + d - v)p - k}{b(b - v)}.$$

Il résulte par conséquent de ces formules

$$\int_0^v f(x)dx \geqq \frac{(b-d)(v-d)p+k}{bv},$$

$$\int_0^v f(x)dx \leqq \frac{(b-d)(b+d-v)p-k}{b(b-v)}.$$

On voit donc que de l'expression des valeurs limites de l'intégrale $\int_a^v f(x)dx$ à l'aide de résidus intégraux, découlent toutes les formules communiquées dans mon mémoire, inséré dans le **Journal** de LIOUVILLE sous le titre: *Sur les valeurs limites des intégrales.*

§ 8. Il est facile de s'assurer de l'exactitude des valeurs limites de l'intégrale $\int_a^v f(x)dx$ que nous avons trouvées pour le cas où l'on connaît les valeurs des intégrales

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b xf(x)dx, \quad \int_a^b x^2f(x)dx, \ \ldots$$

et que de plus la fonction inconnue $f(x)$ reste positive entre a et b, à l'aide de l'équation

$$\int_a^b Uf(x)dx = \mathcal{E}\, UF(z)$$

laquelle aura toujours lieu, en conséquence des propriétés de la fonction rationnelle $F(z)$ déterminée par les formules (3), (4), (6), (7), sitôt que U désigne une fonction entière dont le degré est moindre que le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \quad \int_a^b xf(x)dx, \quad \int_a^b x^2f(x)dx, \ \ldots.$$

Quant à la déduction de ces mêmes formules par la méthode des quantités maxima et minima, cette question sera l'objet d'un mémoire particulier, dans lequel nous montrerons aussi d'autres applications de la fonction rationnelle $F(z)$. On verra entre autre que les deux racines de l'équation

$$\frac{1}{F(x)} = 0$$

les plus rapprochées de la racine

$$x = v$$

fournissent la solution du problème suivant par rapport à la fonction $f(x)$: *dans quelles limites, en partant de $x = v$ ou en finissant par $x = v$, la fonction $f(x)$ peut elle avoir une valeur constante égale à zéro?*

En assignant à v dans les formules qui déterminent $F(z)$ certaines valeurs spéciales, nous trouvons deux fractions $F_1(z)$, $F_2(z)$ telles, que les résidus intégraux

$$\mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{b+\omega} F_1(z)\theta(z), \qquad \mathop{\mathcal{E}}_{a-\omega}^{b+\omega} F_2(z)\theta(z)$$

représentent les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^b f(x)\theta(x)dx$$

sous condition, que pour toutes les valeurs de x entre $x = a$ et $x = b$ la fonction $\theta(x)$ reste finie et continue et que sa dérivée, dont l'ordre est égal au nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \qquad \int_a^b x^2 f(x)dx, \ldots,$$

ne change pas de signe. Si le nombre de ces intégrales est pair, ces valeurs spéciales de $F(z)$ peuvent être déduites des formules (3) et (4) en supposant $v = b$, ou bien v égal à une racine quelconque de l'équation $\psi_m(x) = 0$. Si au contraire le nombre des intégrales données

$$\int_a^b f(x)dx, \qquad \int_a^b xf(x)dx, \quad \ldots, \quad \int_a^b x^{2m} f(x)dx,$$

est impair, les fractions $F_1(z)$ et $F_2(z)$ peuvent être déduites des formules (3) et (6) en supposant $v = a$, $v = b$.

A l'aide des fractions, déterminées par les formules (3), (4), (6), (7) on peut aussi trouver les valeurs limites de l'intégrale

$$\int_a^v f(x)dx$$

quelles que soient u, v pourvu seulement, que dans les intégrales données l'une des limites soit égale à $\pm\infty$.