SUR UNE QUESTION DE MAXIMUM ET DE MINIMUM

PROPOSÉE PAR M. TCHEBYCHEFF

PAR

A. MARKOFF

à S:t PÉTERSBOURG.

M. TCHEBYCHEFF à proposé en 1874[1] une question très intéressante relative à certains maxima et minima. Ayant eu occasion d'approfondir cette matière, je me permets d'exposer ici les considérations qui m'ont amené à la résolution de la question de M. TCHEBYCHEFF d'une manière qui me semble être très générale.

Notations et conditions:

1) $\lambda_1(z)$, $\lambda_2(z)$, ..., $\lambda_{n+1}(z)$, $\Omega(z)$ sont des fonctions données de z;

2) je pose

$$D_k = \begin{vmatrix} \lambda_1(z) & , \lambda_2(z) & , \ldots, & \lambda_k(z) \\ \lambda_1'(z) & , \lambda_2'(z) & , \ldots, & \lambda_k'(z) \\ \lambda_1''(z) & , \lambda_2''(z) & , \ldots, & \lambda_k''(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{(k-1)}(z), & \lambda_2^{(k-1)}(z), & \ldots, & \lambda_k^{(k-1)}(z) \end{vmatrix}, \qquad \lambda_k^{(i)}(z) = \frac{d^i \lambda_k(z)}{dz^i}$$

3) et

$$\Delta_k(\Omega) = \begin{vmatrix} \lambda_1(z), & \lambda_2(z), & \ldots, & \lambda_k(z), & \Omega(z) \\ \lambda_1'(z), & \lambda_2'(z), & \ldots, & \lambda_k'(z), & \Omega'(z) \\ \lambda_1''(z), & \lambda_2''(z), & \ldots, & \lambda_k''(z), & \Omega''(z) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_1^{(k)}(z), & \lambda_2^{(k)}(z), & \ldots, & \lambda_k^{(k)}(z), & \Omega^{(k)}(z) \end{vmatrix};$$

[1] *Sur les valeurs limites des intégrales* (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1874).

4) a et b sont des nombres donnés,

5) $m_1, m_2, \ldots, m_\nu$ des nombres positifs et indéterminés,

6) $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$ des nombres indéterminés compris entre a et b,

7) ν restant aussi indéterminé,

8) et on a

$$D_1 > 0, \quad D_2 > 0, \quad \ldots, \quad D_{n+1} > 0$$

$$\Omega > 0, \quad \Delta_1(\Omega) > 0, \quad \Delta_2(\Omega) > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_{n+1}(\Omega) > 0$$

pour toutes les valeurs de z comprises entre a et b.

Le but final de cette note est la résolution de la question suivante: Il faut trouver les nombres

$$\nu, \quad m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \qquad y_1, y_2, \ldots, y_\nu$$

tels que les sommes

$$\sum m_i \lambda_1(y_i), \quad \sum m_i \lambda_2(y_i), \quad \ldots, \quad \sum m_i \lambda_{n+1}(y_i) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,3,\ldots,\nu)}$$

aient des valeurs prises à priori

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n+1}$$

et en même temps tels que la somme

$$\sum m_i \Omega(y_i),$$

étendue aux valeurs de y_i, qui ne dépassent pas une certaine limite v $(a < v < b)$, soit maximum ou minimum.

Remarque 1. Nous supposons d'abord que les équations

$$\sum m_i \lambda_1(y_i) = \alpha_1, \quad \sum m_i \lambda_2(y_i) = \alpha_2, \quad \ldots, \quad \sum m_i \lambda_{n+1}(y_i) = \alpha_{n+1}$$

sont compatibles.

Remarque 2. Pour plus de facilité on peut exprimer les sommes considérées de la manière suivante

$$\sum_a^b m\lambda_1(y), \quad \sum_a^b m\lambda_2(y), \quad \ldots, \quad \sum_a^b m\lambda_{n+1}(y), \quad \sum_a^b m\Omega(y)$$

et avec ça rien ne nous empêche d'étendre ces sommes à toutes les valeurs de y comprises entre a et b ou bien entre a et v: il suffit seulement de prendre m égal à zéro pour toutes les valeurs de y excepté $y_1, y_2, \ldots, y_\nu$. Remarquons qu'en résolvant la question proposée, nous obtenons en même temps les limites exactes de la valeur de l'intégrale

$$\int_a^v \Omega(y)f(y)dy,$$

lorsque les valeurs des intégrales

$$\int_a^b \lambda_1(y)f(y)dy, \qquad \int_a^b \lambda_2(y)f(y)dy, \quad \ldots, \quad \int_a^b \lambda_{n+1}f(y)dy$$

sont données et qu'aucune fonction $f(y)$ ne peut devenir négative entre les limites de l'intégration:

Formule importante:[1]

$$D_{k-1}\,.\,\Delta_k(\Omega) = D_k\,.\frac{d\Delta_{k-1}(\Omega)}{dz} - \frac{dD_k}{dz}\,.\,\Delta_{k-1}(\Omega)$$

ou bien

$$\Delta_k(\Omega) = \frac{D_k^2}{D_{k-1}}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{\Delta_{k-1}(\Omega)}{D_k}\right).$$

Théorème 1. Quelles que soient les valeurs des constantes

$$p_k,\ p_{k+1},\ p_{k+2},\ \ldots,\ p_{n+1}$$

l'équation

$$p_k\Delta_{k-1}(\lambda_k) + p_{k+1}\Delta_{k-1}(\lambda_{k+1}) + \ldots + p_{n+1}\Delta_{k-1}(\lambda_{n+1}) = 0$$

ne peut pas avoir plus de $n - k + 1$ racines entre a et b.

Démonstration. Désignons le premier membre de notre équation par $\Phi_{k-1}(z)$. En vertu de la formule précédente on a

$$\frac{D_k^2}{D_{k-1}}\cdot\frac{d}{dz}\left(\frac{\Phi_{k-1}(z)}{D_k}\right) = p_{k+1}\Delta_k(\lambda_{k+1}) + \ldots + p_{n+1}\Delta_k(\lambda_{n+1}) = \Phi_k(z)$$

et par conséquent dans l'intervalle entre a et b le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_{k-1}(z) = 0$$

---

[1] Brioschi, *Théorie des déterminants*, 1856. Formules 14 et 93.

ne peut dépasser le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_k(z) = 0$$

que d'une unité.

Pour la même raison le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_k(z) = 0$$

dans l'intervalle entre a et b ne peut surpasser que d'une unité le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_{k+1}(z) = 0$$

dans le même intervalle.

En répétant successivement les mêmes considérations nous arrivons enfin à l'équation

$$p_{n+1} D_{n+1} = 0$$

qui n'a point de racines dans l'intervalle entre a et b.

Or le nombre des racines de l'équation primitive

$$\Phi_{k-1}(z) = 0$$

dans l'intervalle de a à b ne peut surpasser que de $n - k + 1$ unités le nombre des racines de la dernière équation

$$p_{n+1} D_{n+1} = 0.$$

Notre théorème en résulte immédiatement.

Corollaire. Quels que soient les nombres

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n-\mu+1}$$

compris entre a et b et les nombres

$$A_1, A_2, \ldots, A_{n-\mu+1}, \qquad B_1, B_2, \ldots, B_\mu$$

avec la condition $n - \mu + 1 \geqq \mu$, il existe seulement un système de valeurs des coefficients

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}$$

pour lequel la fonction

$$\Phi(z) = p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_{n+1}\lambda_{n+1}(z)$$

satisfait aux équations

$$\Phi(y_1) = A_1, \quad \Phi(y_2) = A_2, \ \ldots, \ \Phi(y_\mu) = A_\mu, \ \ldots, \ \Phi(y_{n-\mu+1}) = A_{n-\mu+1}$$

$$\Phi'(y_1) = B_1, \quad \Phi'(y_2) = B_2, \ \ldots, \ \Phi'(y_\mu) = B_\mu.$$

Théorème 2. Conservant les notations du théorème précédent, nous pouvons affirmer, que le nombre des racines de l'équation

$$\Phi_{k-1}(z) = \Delta_{k-1}(\Omega)$$

comprises entre a et c $(a < c < b)$ augmenté du nombre des racines de l'équation

$$\Phi_{k-1}(z) = 0$$

comprises entre c et b ne peut être plus grand que $n - k + 2$.

Démonstration. Admettons que les racines des équations

$$\Phi_{k-1}(z) = \Delta_{k-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad \Phi_{k-1}(z) = 0,$$

étant rangées par ordre croissant, sont

$$x_1^{(k-1)}, \ x_2^{(k-1)}, \ \ldots, \ x_g^{(k-1)} \quad \text{pour la première équation et}$$
$$x_{g+1}^{(k-1)}, \ x_{g+2}^{(k-1)}, \ \ldots, \ x_{g+h}^{(k-1)} \quad \text{pour la seconde.}$$

Pour $g \overline{\overline{<}} 1$ notre théorème se ramène au précédent. Mais lorsqu'on a $g > 1$, il est bien facile de voir que l'équation

$$\Phi_k(z) = \Delta_k(\Omega)$$

aura $g - 1$ racines

$$x_1^{(k)}, \ x_2^{(k)}, \ \ldots, \ x_{g-1}^{(k)}$$

dans l'intervalle de a à $x_g^{(k-1)}$ et que l'équation

$$\Phi_k(z) = 0$$

devra contenir $h - 1$ racines comprises entre $x_{g+1}^{(k-1)}$ et b et encore une racine entre $x_{g-1}^{(k)}$ et $x_{g+1}^{(k-1)}$.

Poussant plus loin les mêmes raisonnements nous arrivons enfin à nous convaincre que l'équation

$$\Phi_{k+g-2}(z) = 0$$

doit avoir h racines entre a et b, Il en résulte, qu'en vertu du théorème précédent nous avons

$$h \leqq n - k - g + 2$$

et

$$h + g \leqq n - k + 2;$$

c'est ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. Etant donnés, dans l'intervalle entre a et b, $n + 1$ nombres

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_l < x_{l+1} < \ldots < x_{n+1}$$

dont les l premiers satisfont à l'équation

$$\Phi(z) = \Omega(z)$$

tandis que les $n - l + 1$ autres nombres satisfont à l'équation

$$\Phi(z) = 0,$$

on peut alors se convaincre, que l'on aura toujours

$$\begin{array}{rll}
\Phi(z) < \Omega(z) & \text{pour} & x_l < z < x_{l+1} \\
\Phi(z) > \Omega(z) & \text{pour} & x_{l-1} < z < x_l \\
\Phi(z) < \Omega(z) & \text{pour} & x_{l-2} < z < x_{l-1} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
(-1)^l \Phi(z) > (-1)^l \Omega(z) & \text{pour} & x_1 < z < x_2 \\
(-1)^{l+1} \Phi(z) > (-1)^{l+1} \Omega(z) & \text{pour} & a < z < x_1 \\
\Phi(z) > 0 & \text{pour} & x_l < z < x_{l+1} \\
\Phi(z) < 0 & \text{pour} & x_{l+1} < z < x_{l+2} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
(-1)^{n-l} \Phi(z) > 0 & \text{pour} & x_n < z < x_{n+1} \\
(-1)^{n-l+1} \Phi(z) > 0 & \text{pour} & x_{n+1} < z < b.
\end{array}$$

Donnant maintenant à quelques-uns des nombres

$$x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$$

des valeurs de plus en plus rapprochées jusqu'à la formation de racines multiples, il n'est point difficile de déduire des propositions d'une assez grande importance.

Théorème 3. Lorsqu'on a $\frac{n+1}{2}$ nombres

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{\frac{n+1}{2}}$$

compris entre a et b et encore $\frac{n+1}{2}+1$ nombres positifs

$$M, M_1, M_2, \ldots, M_{\frac{n+1}{2}},$$

n étant impair, on aura toujours les inégalités

$$\begin{aligned}\sum_a^{x_i} m\Omega(y) &< M\Omega(a) + M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}) + M_i\Omega(x_i)\\ &> M\Omega(a) + M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1})\end{aligned}$$

pour chaque système de nombres m et y satisfaisant aux conditions

$$m > 0, \qquad a < y < b$$

$$\sum_a^b m\lambda_k(y) = M\lambda_k(a) + M_1\lambda_k(x_1) + \ldots + M_{\frac{n+1}{2}}\lambda_k(x_{\frac{n+1}{2}}).$$

$$(k=1, 2, 3, \ldots, n+1)$$

Démonstration. Posons

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= p_1\lambda_1(z) + p_2\lambda_2(z) + \ldots + p_{n+1}\lambda_{n+1}(z)\\ \Psi(z) &= q_1\lambda_1(z) + q_2\lambda_2(z) + \ldots + q_{n+1}\lambda_{n+1}(z)\end{aligned}$$

et déterminons les constantes

$$p_1, p_2, \ldots, p_{n+1}, \qquad q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}$$

conformément aux conditions

$$\begin{array}{ll}
\Phi(a) = \Psi(a) = \Omega(a), & \\
\Phi(x_1) = \Psi(x_1) = \Omega(x_1), & \Phi'(x_1) = \Psi'(x_1) = \Omega'(x_1)\\
\Phi(x_2) = \Psi(x_2) = \Omega(x_2), & \Phi'(x_2) = \Psi'(x_2) = \Omega'(x_2)\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\Phi(x_{i-1}) = \Psi(x_{i-1}) = \Omega(x_{i-1}), & \Phi'(x_{i-1}) = \Psi'(x_{i-1}) = \Omega'(x_{i-1})\\
\Phi(x_i) = \Omega(x_i),\ \Psi(x_i) = 0, & \\
\Phi(x_{i+1}) = \Psi(x_{i+1}) = 0, & \Phi'(x_{i+1}) = \Psi'(x_{i+1}) = 0\\
\Phi(x_{i+2}) = \Psi(x_{i+2}) = 0, & \Phi'(x_{i+2}) = \Psi'(x_{i+2}) = 0\\
\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\\
\Phi(x_{\frac{n+1}{2}}) = \Psi(x_{\frac{n+1}{2}}) = 0, & \Phi'(x_{\frac{n+1}{2}}) = \Psi'(x_{\frac{n+1}{2}}) = 0.
\end{array}$$

On a alors premièrement, d'après le corollaire du théorème précédent

$$\sum_a^b m\Phi(y) > \sum_a^{x_i} m\Phi(y) > \sum_a^{x_i} m\Omega(y) > \sum_a^{x_i} m\Psi(y) > \sum_a^b m\Psi(y)$$

et d'autre part il est facile de voir que

$$\sum_a^b m\Phi(y) = M\Omega(a) + M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}) + M_i\Omega(x_i)$$

et

$$\sum_a^b m\Psi(y) = M\Omega(a) + M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}).$$

D'où résultent immédiatement nos inégalités citées ci-dessus.

Théorème 4. Lorsqu'on a $\frac{n+1}{2}$ nombres

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{\frac{n+1}{2}}$$

compris entre a et b et encore $\frac{n+1}{2} + 1$ nombres positifs

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{\frac{n+1}{2}},\ M',$$

n étant impair, on aura toujours les inégalités

$$\begin{aligned}\sum_a^{x_i} m\Omega(y) &< M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1}) + M_i\Omega(x_i)\\ &> M_1\Omega(x_1) + \ldots + M_{i-1}\Omega(x_{i-1})\end{aligned}$$

pour chaque système de nombres m et y, satisfaisant aux conditions

$$m > 0, \qquad a < y < b,$$

$$\sum_a^b m\lambda_k(y) = M_1\lambda_k(x_1) + M_2\lambda_k(x_2) + \ldots + M_{\frac{n+1}{2}}\lambda_k(x_{\frac{n+1}{2}}) + M'\lambda_k(b).$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n+1)$$

La démonstration de ce théorème est la même que celle du précédent.

Théorème 5. Si, n étant impair, il y avait un des $\frac{n+1}{2}$ nombres

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\frac{n+1}{2}}$$
$$(a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_{\frac{n+1}{2}} \leqq b)$$

égal à a ou à b et en même temps si

$$M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{\frac{n+1}{2}}$$

étaient des nombres positifs, il n'y aurait alors qu'un système de nombres m et y satisfaisant aux conditions

$$m > 0, \qquad a < y < b,$$

$$\Sigma m\lambda_k(y) = M_1\lambda_k(x_1) + M_2\lambda_k(x_2) + \ldots + M_{\frac{n+1}{2}}\lambda_k(x_{\frac{n+1}{2}}),$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n+1)$$

savoir

$$y = x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\frac{n+1}{2}}$$

$$m = M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_{\frac{n+1}{2}}.$$

Ce dernier théorème peut être déduit des précédents comme un cas particulier.

Il peut encore être démontré indépendamment par la méthode précédente.

Remarque 1. Il est évident que tous nos théorèmes ont lieu aussi dans le cas, où a et b sont remplacés par d'autres quantités a' et b' satisfaisant à la condition

$$a < a' < b' < b.$$

Remarque 2. Pour la résolution complète de notre question il faudrait donner encore quelques théorèmes semblables aux précédents.

Nous nous bornerons cependant aux théorèmes cités ci-dessus, parce que nous avons en vue de considérer seulement le cas, où n est impair et v n'est pas égal à b.

La résolution de la question posée, dans le cas de n impair et $v < b$, consiste dans la proposition suivante:

Les maximum et minimum cherchés de la somme

$$\sum_a^v m\Omega(y)$$

correspondent au cas entièrement défini où m n'est différent de zéro que pour $\frac{n+1}{2}+1$ valeurs de y, parmi lesquelles se trouvent v et un des nombres a et b.

Or le maximum ne diffère du minimum que d'un terme de toute somme $\sum_a^v m\Omega(y)$, précisément du terme, qui correspond à la valeur $y=v$: pour avoir le maximum il faut introduire ce terme dans la somme, pour le minimum il ne faut pas l'introduire.

Démonstration. L'existence du maximum et du minimum est considérée comme évidente à priori, comme on le fait souvent dans d'autres cas.

Démontrons maintenant que dans tous les cas excepté dans le cas ci-dessus on peut augmenter ou diminuer la somme $\sum_a^v m\Omega(y)$ à volonté.

Remarquons encore qu'en comparant les deux sommes nous allons souvent y laisser de côté les termes communs en diminuant d'après cela le nombre des termes.

Premier cas. Etant donné $\nu'=\frac{n+1}{2}$, soient

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_{\nu'+1}$$

des valeurs de y différentes entre elles, auxquelles correspondent des valeurs positives de m

$$m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{\nu'+1}.$$

Supposons encore que l'on a

$$y_i < v < y_{i+1}.$$

On peut donner aux nombres

$$y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_{\nu'+1}, \qquad m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_{\nu'+1}$$

quelques accroissements infiniment petits

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu'+1}, \qquad \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{\nu'+1}$$

et afin que les sommes

$$\sum_a^b m\lambda_1(y), \qquad \sum_a^b m\lambda_2(y), \quad \ldots, \quad \sum_a^b m\lambda_{n+1}(y)$$

restent sans changement, ces accroissements doivent satisfaire aux équations

$$(m_1+\mu_1)\lambda_k(y_1)+(m_2+\mu_2)\lambda_k(y_2+\varepsilon_2)+\ldots+(m_{\nu'+1}+\mu_{\nu'+1})\lambda_k(y_{\nu'+1}+\varepsilon_{\nu'+1})$$
$$=m_1\lambda_k(y_1)+m_2\lambda_k(y_2)+\ldots+m_{\nu'+1}\lambda_k(y_{\nu'+1}). \quad {\scriptstyle (k=1,2,3,\ldots,n+1)}$$

L'accroissement correspondant de la somme

$$\sum_a^v m\Omega(y)$$

est égal à

$$(m_1+\mu_1)\Omega(y_1)+(m_2+\mu_2)\Omega(y_2+\varepsilon_2)+\ldots+(m_i+\mu_i)\Omega(y_i+\varepsilon_i)$$
$$-m_1\Omega(y_1)-m_2\Omega(y_2)-\ldots-m_i\Omega(y_i).$$

Les équations précédentes ne déterminent que les rapports réciproques des accroissements

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu'+1}, \qquad \mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{\nu'+1}$$

de manière qu'on peut prendre l'un de ces accroissements comme arbitraire.

On peut encore se convaincre à l'aide du théorème 5, que toutes les quantités infiniment petites

$$\varepsilon_2,\ \varepsilon_3,\ \ldots,\ \varepsilon_{\nu'+1}$$

sont d'un même ordre et les quantités

$$\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_{\nu'+1}$$

sont du même ordre ou bien quelques-unes de ces dernières peuvent être d'un ordre supérieur.

Par conséquent ε_i peut être pris à volonté positif ou négatif.

Si l'on a $\varepsilon_i > 0$, alors d'après le théorème 3 (remplaçant a par y_1) l'accroissement de la somme $\sum_a^v m\Omega(y)$ devient positif; au cas contraire il sera négatif.

Cette transformation peut être pratiquée aussi dans le cas, où $y_1 = a$.

Mais si l'on a $y_{\nu'+1} = b$, cette transformation n'est plus possible, parce qu'alors il est impossible de changer le signe de $\varepsilon_{\nu'+1}$ à volonté $(\varepsilon_{\nu'+1} \leqq 0)$.

Dans ce cas on peut en vertu du théorème 4 augmenter ou diminuer la somme $\sum\limits_a^v m\Omega(y)$ en faisant varier les valeurs de

$$y_1, y_2, \ldots, y_{\nu'}, \qquad m_1, m_2, \ldots, m_{\nu'+1}.$$

Quant au cas de $y_1 = a$ et $y_{\nu'+1} = b$, nous le considérons à part.

Le second cas ne diffère du précédent que par

$$y_1 = a \quad \text{et} \quad y_{\nu'+1} = b.$$

Désignons par $m^{(v)}$ la valeur de m correspondante à $y = v$. On peut donner aux nombres

$$y_2, y_3, \ldots, y_{\nu'}, \qquad m_1, m_2, \ldots, m_{\nu'+1}, m^{(v)}$$

des accroissements infiniment petits

$$\varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots, \varepsilon_{\nu'}, \qquad \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{\nu'+1}, \mu^{(v)}$$

satisfaisant aux équations

$$(m_1 + \mu_1)\lambda_k(y_1) + (m_2 + \mu_2)\lambda_k(y_2 + \varepsilon_2) + \ldots + (m_{\nu'} + \mu_{\nu'})\lambda_k(y_{\nu'} + \varepsilon_{\nu'})$$
$$+ (m_{\nu'+1} + \mu_{\nu'+1})\lambda_k(y_{\nu'+1}) + \mu^{(v)}\lambda_k(v) = m_1\lambda_k(y_1) + m_2\lambda_k(y_2) + \ldots + m_{\nu'+1}\lambda_k(y_{\nu'+1}).$$
$$(k = 1, 2, 3, \ldots, n+1)$$

Le nombre de nos équations est moindre d'une unité que celui des accroissements.

Cependant dans ce cas il est impossible de changer les signes des accroissements car $m^{(v)}$ peut être égal à zéro et par conséquent on doit poser

$$\mu^{(v)} > 0$$

afin que la somme $m^{(v)} + \mu^{(v)}$ soit absolument positive. Or d'après le théorème 5 on peut démontrer, que

$$\mu_1 < 0 \quad \text{et} \quad \mu_{\nu'+1} < 0.$$

Quant à l'accroissement de la somme $\sum\limits_a^v m\Omega(y)$, il peut être pris à volonté égal à l'expression

$$(m_2 + \mu_2)\Omega(y_2 + \varepsilon_2) + \ldots + (m_i + \mu_i)\Omega(y_i + \varepsilon_i) + \mu^{(v)}\Omega(v)$$
$$-(-\mu_1)\Omega(y_1) - m_2\Omega(y_2) - \ldots - m_i\Omega(y_i)$$

ou à l'expression

$$(m_2 + \mu_2)\,\Omega(y_2 + \varepsilon_2) + \ldots + (m_i + \mu_i)\Omega(y_i + \varepsilon_i)$$
$$- (-\mu_1)\Omega(y_1) - m_2\Omega(y_2) - \ldots - m_i\Omega(y_i).$$

La première de ces expressions est positive d'après le théorème (4) et la seconde est négative.

Troisième cas. Soient

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_{\nu'}$$

des valeurs différentes de y, auxquelles correspondent des valeurs positives de m

$$m_1, \; m_2, \; \ldots, \; m_{\nu'}.$$

Nous supposons de plus qu'aucune de ces valeurs de y n'est égale ni à a ni à b.

Comme dans ce qui précède on peut donner aux nombres

$$y_1, \; y_2, \; \ldots, \; y_{\nu'}, \qquad m_1, \; m_2, \; \ldots, \; m_{\nu'}, \; m^{(v)}$$

des accroissements infiniment petits

$$\varepsilon_1, \; \varepsilon_2, \; \ldots, \; \varepsilon_{\nu'}, \qquad \mu_1, \; \mu_2, \; \ldots, \; \mu_{\nu'}, \; \mu^{(v)},$$
$$\mu^{(v)} \text{ étant } > 0.$$

Il est facile de conclure d'après le théorème 5 que l'on a

$$\varepsilon_1 < 0 \quad \text{et} \quad \varepsilon_{\nu'} > 0.$$

Ensuite d'après les théorèmes 3 et 4, comme nous l'avons fait auparavant, nous déduisons qu'on peut augmenter ou diminuer à volonté la somme

$$\sum_a^v m\,\Omega(y)$$

Conclusion. Ayant égard aux résultats de nos considérations, il n'est pas difficile de voir, comme nous l'avons dit, que les maximum et minimum cherchés ne peuvent avoir lieu que dans le cas, où

$$\nu = \frac{n+1}{2} + 1$$

et en même temps où se trouvent parmi les quantités

$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu$$

la valeur v et une des valeur a et b. Effectivement les théorèmes 3 et 4 nous montrent que dans ce cas la somme $\sum_a^v m\Omega(y)$ atteint le maximum ou le minimum selon que nous comptons ou ne comptons pas la quantité $m^{(v)}\Omega(v)$ appartenant à ses termes.

Remarque. D'une manière analogue à ce qui précède on peut donner la résolution de notre question dans les cas, où on a $v = b$ ou bien n étant pair.

Remarquons encore que dans mon mémoire *sur quelques applications des fractions continues* [1] j'ai discuté le cas particulier où

$$\lambda_1(z) = 1, \qquad \lambda_2(z) = z, \quad \ldots, \quad \lambda_{n+1}(z) = z^n.$$

Dans ce cas les inconnues

$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu$$

se déterminent comme les racines d'une certaine équation algébrique.

Quant aux inconnues

$$m_1, m_2, \ldots, m_\nu$$

on les détermine à l'aide d'un système d'équations du premier degré par les valeurs

$$y_1, y_2, \ldots, y_\nu$$

trouvées auparavant.

S:t Pétersbourg, Janvier 1886.

[1] МАРКОВЪ, А., О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей. С.-Петербургъ 1884.