ÜBER EINEN ZUSAMMENHANG

ZWISCHEN GEWISSEN LINEAREN

DIFFERENTIAL- UND DIFFERENZENGLEICHUNGEN

VON

HJ. MELLIN

in HELSINGFORS.

1. In meiner Arbeit *Zur Theorie der Gammafunction*, Bd. 8 dieses Journals S. 37—80, habe ich gewisse mit der Gammafunction sehr nahe verwandte Transcendenten untersucht. Es wurde behauptet, dass die formale Übereinstimmung, welche die Theorie dieser Functionen mit der Theorie der linearen Differentialgleichungen in gewissen Hinsichten erhält, dadurch erklärt werden kann, dass in der That auch ein bestimmter Zusammenhang zwischen diesen Functionen und den Integralen gewisser linearen Differentialgleichungen stattfindet. Am Ende der Arbeit wurde ein specieller, diesen Zusammenhang angebender Satz ausgesprochen. Es wurde zugleich behauptet, dass dieser Satz nur ein Specialfall von allgemeineren auf Differentialgleichungen der Form

$$(1) \quad (a_0 - b_0 x) x^n y^{(n)} + (a_1 - b_1 x) x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + (a_n - b_n x) y = 0$$

sich beziehenden Sätzen sei. Die Differentialgleichung (1) wurde bei jener Gelegenheit in der Gestalt

$$x^{\alpha} \frac{d}{dx} x^{\alpha_1} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} x^{\alpha_n} y = c x^{\beta} \frac{d}{dx} x^{\beta_1} \frac{d}{dx} \cdots \frac{d}{dx} x^{\beta_m} y,$$

auf die sie immer gebracht werden kann, geschrieben.

Der Zweck der vorliegenden Arbeit ist nun, die Richtigkeit der oben erwähnten Behauptungen nachzuweisen.

Obgleich es nicht immer nothwendig ist, stellen wir uns dennoch vor, dass die bestimmten Integrale, von denen im Folgenden die Rede sein wird, längs einer die Grenzen verbindenden Geraden erstreckt sind. Liegt eine singuläre Stelle zwischen den Grenzen, so kann sie mit Hülfe eines unendlich kleinen Halbkreises vermieden werden.

Ist a_0 von Null verschieden, was im Folgenden vorausgesetzt werden soll, so haben die Integrale der Differentialgleichung (1) bekanntlich die Eigenschaft, mit einer passenden Potenz von x multiplicirt, in der Umgebung von $x = 0$ endlich zu bleiben, und können in dieser Umgebung durch eine Summe von Reihen der Form

$$x^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} [c_0^{(\nu)} + c_1^{(\nu)} \log x + \ldots + c_{k-1}^{(\nu)} (\log x)^{k-1}] x^\nu,$$

dargestellt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = 0$ der Differentialgleichung (1) gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Bezeichnet also $\varphi(x)$ ein Integral dieser Differentialgleichung, so hat das bestimmte Integral

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(x) x^{z-1} dx, \tag{2}$$

für hinreichend grosse Werthe des reellen Theiles von z, sicher einen endlichen Werth, wenn der singuläre Punkt

$$x = \frac{a_0}{b_0} = a$$

der Differentialgleichung (1) von 1 verschieden ist. Den Fall wo $a = 1$ ist, wollen wir später für sich betrachten. Der Kürze halber wird daher im Folgenden, wenn das entgegengesetzte nicht gesagt wird, angenommen, dass $x = 1$ eine reguläre Stelle unserer Differentialgleichung ist. Bezeichnet man also die entgegengesetzten Werthe der Wurzeln der genannten Fundamentalgleichung mit

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

und den grössten unter den reellen Theilen von $z_1, z_2, \ldots, z_n$ mit λ, so hat das bestimmte Integral (2) immer einen endlichen Werth, wenn der reelle Theil von $z > \lambda$ ist.

Durch das bestimmte Integral (2) wird nun eine Function definirt, welche die folgende lineare Differenzengleichung erster Ordnung befriedigt

$$(3) \qquad \mathbf{r}_1(z)f(z+1) = \mathbf{r}_0(z)f(z) - R(z),$$

wo $\mathbf{r}_0(z)$, $\mathbf{r}_1(z)$, $R(z)$ ganze rationale Functionen bezeichnen.

Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich folgendermassen. Durch Multiplication mit x^{z-1} und Integration zwischen den Grenzen 0 und 1 folgt zunächst aus (1):

$$(4) \qquad \int_0^1 x^{z-1}(a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_ny)dx$$
$$= \int_0^1 x^z(b_0x^ny^{(n)} + b_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + b_ny)dx.$$

Das Verfahren der theilweisen Integration liefert ferner die Gleichung

$$(5) \qquad \int_0^1 y^{(\nu)}x^zdx = y_1^{(\nu-1)} - y_1^{(\nu-2)}z + y_1^{(\nu-3)}z(z-1) + \ldots$$
$$+ (-1)^\nu z(z-1)\ldots(z-\nu+1)\int_0^1 yx^{z-\nu}dx,$$

wo $y_1^{(\mu)}$ den Werth von $y^{(\mu)}$ für $x = 1$ bezeichnet. Aus Gleichung (4) erhellt nun, indem man auf beiden Seiten gliedweise integrirt und jedes Glied mit Hülfe von (5) transformirt, dass man auf der linken Seite ganze rationale Functionen und ausserdem das Integral

$$\int_0^1 yx^{z-1}dx = f(z)$$

und gleichfalls auf der rechten Seite ganze rationale Functionen und ausserdem das Integral

$$\int_0^1 yx^z dx = f(z+1)$$

bekommen wird. Die so erhaltene Gleichung kann nun offenbar auf die Form (3) gebracht werden.

Die ganzen Functionen $\mathbf{r}_0(z)$ und $\mathbf{r}_1(z)$ sind durch folgende Gleichungen bestimmt

$$(6)\quad \mathbf{r}_0(z) = a_n - a_{n-1}z + a_{n-2}z(z+1) + \ldots + (-1)^n a_0 z(z+1)\ldots(z+n-1)$$

$$(7)\quad \mathbf{r}_1(z) = b_n - b_{n-1}(z+1) + b_{n-2}(z+1)(z+2) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n b_0(z+1)(z+2)\ldots(z+n)$$

$R(z)$ ist höchstens $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades. Die beiden Functionen $\mathbf{r}_0(z)$ und $\mathbf{r}_1(z)$ sind von dem Integrale $\varphi(x)$ unabhängig. Die Coefficienten in $R(z)$ aber sind homogene lineare Functionen von $\varphi(1)$, $\varphi'(1)$, ..., $\varphi^{(n-1)}(1)$. Es ist offenbar

$$\mathbf{r}_0(-z) = a_n + a_{n-1}z + a_{n-2}z(z-1) + \ldots + a_0 z(z-1)\ldots(z-n+1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = 0$, und

$$\mathbf{r}_1(z-1) = b_n - b_{n-1}z + b_{n-2}z(z+1) + \ldots + (-1)^n b_0 z(z+1)\ldots(z+n-1) = 0$$

die zum singulären Punkte $x = \infty$ der Differentialgleichung (1) gehörige Fundamentalgleichung.

2. Das oben betrachtete Integral $f(z)$ kann in manchen Fällen durch einen einfachen analytischen Ausdruck dargestellt werden. Wir wollen, um dies zu zeigen, annehmen, es sei entweder $|a_0| > |b_0| \geqq 0$ oder $|a_0| = |b_0| > 0$ (nicht aber $a_0 = b_0$), und im letzten Falle der reelle Theil von

$$\varkappa = \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} - n$$

in algebraischem Sinne grösser als -1.

Setzt man

$$\frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)} = \mathbf{r}(z), \qquad \frac{R(z)}{\mathbf{r}_1(z)} = \mathbf{R}(z),$$

so folgt mit Hülfe von (4) die Gleichung

$$(8)\qquad f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z) - \mathbf{R}(z),$$

durch deren wiederholte Anwendung sich die folgende ergiebt

$$(9)\qquad f(z) = \frac{\mathbf{R}(z)}{\mathbf{r}(z)} + \frac{\mathbf{R}(z+1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)} + \dots$$

$$\dots + \frac{\mathbf{R}(z+m-1)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} + \frac{f(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)}.$$

Unter den obigen Voraussetzungen kann nun gezeigt werden, dass das Restglied in (9) stets die Null zur Grenze hat. Dies ist, wenn $|a_0| > |b_0|$ ist, unmittelbar ersichtlich; denn das Product

$$\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)$$

wird alsdann mit wachsendem m unendlich, während $f(z+m)$, da in (2) die Veränderliche x auf das Intervall $0\dots 1$ beschränkt ist, sich der Grenze Null nähert. Ist $|a_0| = |b_0|$, so setzen wir $\frac{a_0}{b_0} = a$ und bezeichnen die Wurzeln der Gleichungen

$$\mathbf{r}_0(z) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{r}_1(z) = 0$$

beziehungsweise mit

$$z_1,\ z_2,\ \dots,\ z_n$$

und

$$z'_1,\ z'_2,\ \dots,\ z'_n.$$

Dann ist

$$\varkappa = z'_1 + z'_2 + \dots + z'_n - z_1 - z_2 - \dots - z_n.$$

Bringt man das Restglied in (9) auf die Form

$$\frac{f(z+m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} = \frac{a^m m^\varkappa}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} \cdot \frac{f(z+m)}{a^m m^\varkappa},$$

so geht aus § 2 meiner oben citirten Arbeit hervor, dass der erste Factor rechter Hand für wachsendes m sich der endlichen Grenze

$$\lim_{m=\infty} \frac{a^m m^\varkappa}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\dots\mathbf{r}(z+m-1)} = \frac{\Gamma(z-z_1)\Gamma(z-z_2)\dots\Gamma(z-z_n)}{\Gamma(z-z'_1)\Gamma(z-z'_2)\dots\Gamma(z-z'_n)}$$

nähert. Da der reelle Theil von z grösser als λ vorausgesetzt wird, wo

λ die in § 1 bestimmte Zahl bedeutet, so giebt es offenbar eine positive Constante A, welche die Bedingung

$$|yx^z| < A$$

erfüllt, wenn x auf das Intervall $0 \ldots 1$ beschränkt ist. In Folge eines bekannten Satzes aus der Theorie der bestimmten Integrale ist daher

$$|f(z+m)| \leq \int_0^1 |yx^z| x^{m-1} dx < A \int_0^1 x^{m-1} = \frac{A}{m}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\left|\frac{f(z+m)}{a^m m^x}\right| < \left|\frac{A}{m^{x+1}}\right|.$$

Da unserer Annahme nach der reelle Theil von $x > -1$ ist, so erhellt hieraus, dass das Restglied in (9) für wachsendes m sich der Grenze Null nähert.

Hiermit ist nun unter den oben erwähnten Voraussetzungen dargethan, nicht nur dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}$$

wenigstens für diejenigen Werthe von z, für welche das Integral eine bestimmte Bedeutung hat, eine convergirende ist, sondern auch dass

$$(10) \qquad \int_0^1 yx^{z-1} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}.$$

Der Convergenzbereich der rechten Seite von (10) ist nicht wie jener Bereich, in dem die linke Seite einen bestimmten Sinn hat, ein beschränkter. Es kann unter den oben gemachten Voraussetzungen bewiesen werden, dass diese Reihe immer convergirt, wenn nur z von den Wurzeln der Gleichungen

$$\mathbf{r}_0(z+\nu) = 0 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

verschieden ist. Nehmen wir zunächst an, es sei $|a_0| > |b_0|$, so nähert sich offenbar der Quotient eines Gliedes der Reihe durch das vorhergehende, d. h. die Grösse

$$\frac{\mathbf{R}(z+m)}{\mathbf{R}(z+m-1)} \cdot \frac{\mathbf{r}_1(z+m)}{\mathbf{r}_0(z+m)},$$

wenn m ohne Ende wächst, einer Grenze, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, und es ergiebt sich leicht, dass die Reihe in der Nähe jeder von den Wurzeln der genannten Gleichungen verschiedenen Stelle unbedingt und gleichmässig convergirt. Ist ferner $|a_0| = |b_0|$, so entwickeln wir den obigen Quotienten nach positiven Potenzen von $\frac{1}{m}$ und erhalten nach einer einfachen Rechnung

$$\frac{\mathbf{R}(z+m)}{\mathbf{R}(z+m-1)} \cdot \frac{\mathbf{r}_1(z+m)}{\mathbf{r}_0(z+m)} = a\left(1 + \frac{k-n-\varkappa}{m} + \frac{c_1}{m^2} + \ldots\right),$$

wo k die Gradzahl des Zählers von $\mathbf{R}(z)$ und $c_1, c_2, \ldots$ von m unabhängige Grössen bezeichnen. Weil k höchstens gleich $n - 1$ und der reelle Theil von $\varkappa$ grösser als -1 ist, so ist der reelle Theil von $k - n - \varkappa$ jedenfalls negativ. Da die Grösse a, deren absoluter Betrag gleich 1 ist, von der Einheit verschieden ist, so sind nach einem bekannten Satze für die Reihe (10) die hinreichenden Convergenzbedingungen erfüllt.

In meiner Arbeit *Zur Theorie der Gammafunction* bin ich, von der Gammafunction ausgehend, auf einem anderen Wege zu Reihen der Form (10) gekommen, indem gewisse anfangs durch Partialbruchreihen dargestellte Functionen auf diese Form gebracht wurden. Stellt man die Ergebnisse dieser Arbeit mit dem Obigen zusammen, so erhellt, dass eine grosse Anzahl bestimmter Integrale auf jene Functionen zurückgeführt werden kann. Zwischen der Differentialgleichung

$$(a_0 - b_0 x)x^n y^{(n)} + (a_1 - b_1 x)x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + (a_n - b_n x)y = 0$$

einerseits und der Gammafunction andererseits ergiebt sich zugleich ein interessanter Zusammenhang, der aus der folgenden Darstellung hervorgehen wird. Fassen wir zunächst den Fall, wo $|a_0| > |b_0|$ ist, vorzugsweise ins Auge, so kann dieser Zusammenhang in aller Kürze folgendermassen angegeben werden.

Bezeichnet man mit b die erste der Grössen $b_0, b_1, \ldots, b_n$, die nicht gleich Null ist, und setzt

$$\mathbf{r}_0(z) = (-1)^n a_0(z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n)$$
$$\mathbf{r}_1(z) = (-1)^{n-\nu} b(z - z_1')(z - z_2') \ldots (z - z_\nu')$$
$$F(z) = \left(\frac{a_0}{b}\right)^z \frac{\Gamma(z - z_1)\Gamma(z - z_2) \ldots \Gamma(z - z_n)}{\Gamma(z - z_1')\Gamma(z - z_2') \ldots \Gamma(z - z_\nu')},$$

so ist $F(z)$ eine der Gleichung

$$F(z + 1) = \mathbf{r}(z)F(z)$$

genügende Function. Diese Gleichung kann als ein Specialfall von (8) aufgefasst werden. Dem MITTAG-LEFFLER'schen Satze gemäss setze man nun

$$F(z) = P(z) + Q(z),$$

wo $P(z)$ eine Partialbruchreihe und $Q(z)$ eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet. In der oben genannten Arbeit ist gezeigt worden, dass $P(z)$ einer Differenzengleichung der Form (8) Genüge leistet. Andererseits überzeugt man sich ohne Schwierigkeit, wenn man die Abhängigkeit der rationalen Function $R(z)$ von $y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}$ beachtet, dass es unter den particulären Integralen der obigen Differentialgleichung eines und zwar nur ein einziges η giebt, für welches die durch

$$f(z) = \int_0^1 \eta x^{z-1} dx$$

definirte Function $f(z)$ dieselbe Differenzengleichung genügt wie $P(z)$. Da die beiden Functionen $P(z)$ und $f(z)$ ausserdem die Bedingung

$$\lim_{m=\infty} P(z + m) = 0 = \lim_{m=\infty} f(z + m)$$

erfüllen, so folgt leicht aus den früheren Betrachtungen, dass sie im ganzen Gültigkeitsbereich des Integrals übereinstimmen müssen. Es giebt somit ein particuläres Integral η der Differentialgleichung (1), für welches

$$P(z) = \int_0^1 \eta x^{z-1} dx.$$

Die beständig convergirende Potenzreihe $Q(z)$ genügt auch einer Differenzengleichung der Form (8). Dass dieselbe, sowie auch die Function $F(z)$, mit Hülfe eines particulären Integrals der Differentialgleichung (1) auf die Form eines bestimmten Integrals gebracht werden kann, wollen wir im Folgenden für einen ziemlich umfassenden Fall nachweisen.

3. Es soll nunmehr vorausgesetzt werden, dass a_0 und b_0 beide von Null verschieden sind. Die zum singulären Punkte

$$x = \frac{a_0}{b_0} = a$$

der Differentialgleichung (1) gehörige determinirende Fundamentalgleichung lautet

$$\rho(\rho - 1) \ldots (\rho - n + 2)(\rho + \varkappa + 1) = 0.$$

Das zur Wurzel $\rho = -\varkappa - 1$ gehörige Integral, welches im Folgenden mit η bezeichnet wird, ist nun besonders bemerkenswerth. Der obigen Voraussetzung fügen wir nun noch die Bedingung hinzu, dass der reelle Theil von $\varkappa$ kleiner als $-n$ sein soll. Es sind alsdann die Werthe

$$\eta_a, \eta'_a, \ldots, \eta_a^{(n-1)},$$

welche $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ für $x = a$ annehmen, alle gleich Null, und das Integral

$$(11) \qquad f(z) = \int_0^a \eta x^{z-1} dx$$

hat sicher eine bestimmte Bedeutung, wenn der reelle Theil von z grösser ist als eine gewisse reelle Zahl λ, die von den Wurzeln der zum singulären Puncte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung abhängig ist.

Da $\eta_a, \eta'_a, \ldots, \eta_a^{(n-1)}$ gleich Null sind, so folgt durch wiederholte theilweise Integration

$$\int_0^a \eta^{(\nu)} x^z dx = (-1)^\nu z(z-1) \ldots (z - \nu + 1) \int_0^a \eta x^{z-\nu} dx. \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Mit Hülfe dieser Formel folgert man nun aus der Gleichung

$$\int_0^a x^{z-1}(a_0 x^n \eta^{(n)} + a_1 x^{n-1}\eta^{(n-1)} + \ldots + a_n\eta)\, dx$$

$$= \int_0^a x^z(b_0 x^n \eta^{(n)} + b_1 x^{n-1}\eta^{(n-1)} + \ldots + b_n\eta) dx$$

ganz so wie in § 1, dass $f(z)$ der linearen Differenzengleichung

$$\mathbf{r}_1(z)f(z+1) = \mathbf{r}_0(z)f(z)$$

oder

$$f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z)$$

Genüge leistet, wo $\mathbf{r}_0(z)$ und $\mathbf{r}_1(z)$ durch die Gleichungen (6) und (7) bestimmt sind.

Setzt man

$$\mathbf{r}_0(z) = (-1)^n a_0(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)$$

$$\mathbf{r}_1(z) = (-1)^n b_0(z-z_1')(z-z_2')\ldots(z-z_n')$$

$$\mathbf{r}(z) = a\frac{(z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n)}{(z-z_1')(z-z_2')\ldots(z-z_n')}$$

$$F(z) = a^z\frac{\Gamma(z-z_1)\Gamma(z-z_2)\ldots\Gamma(z-z_n)}{\Gamma(z-z_1')\Gamma(z-z_2')\ldots\Gamma(z-z_n')}, \tag{12}$$

so ist $F(z)$ eine Function, welche ebenfalls die Gleichung

$$F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$$

befriedigt. Es soll nun gezeigt werden, dass sich $f(z)$ und $F(z)$ nur durch einen constanten Factor von einander unterscheiden können.

Das bestimmte Integral $f(z)$ hat folgende Eigenschaften:

I. Die Gleichung $f(z+1) = \mathbf{r}(z)f(z)$ besteht für alle Werthe von z, für die das Integral einen bestimmten Sinn hat.

II. Man kann eine reelle Zahl α so annehmen, dass sie in algebraischem Sinne grösser als der reelle Theil einer jeden der Grössen $z_1', z_2', \ldots, z_n'$ ist, und dass $f(z)$ in der Nähe jeder Stelle $z_0 = \zeta + i\zeta'$, für welche $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ ist, in eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihe entwickelbar ist. Das letztere ist die Folge eines bekannten Satzes aus der Theorie der bestimmten Integrale.[1]

III. In dem soeben erwähnten Bereiche von z kann der absolute Betrag von $a^{-z}f(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Es ist nämlich, wenn man $x = at$ setzt,

$$a^{-z}f(z) = a^{-z}\int_0^a \eta x^{z-1}\,dx = \int_0^1 \eta t^{z-1}\,dt$$

und t eine *reelle* Veränderliche, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung sofort ergiebt.

Betrachten wir jetzt die Function $F(z)$, so ist unmittelbar ersichtlich, dass sie die Eigenschaften I und II besitzt. Mit Hülfe des analytischen Ausdruckes der Gammafunction findet man ohne besondere Schwierigkeit, dass $F(z)$ auch die Bedingung III erfüllt.

Nun habe ich mich von der Richtigkeit des folgenden Satzes überzeugt, der übrigens nur ein Specialfall eines viel allgemeineren ist.

Es giebt, abgesehen von einem constanten Factor, nur eine einzige analytische Function, welche die Gleichung $F(z+1) = \mathbf{r}(z)F(z)$ *befriedigt und ausserdem die unter II und III erwähnten Eigenschaften besitzt, und zwar ist diese Function identisch mit*

$$a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\Gamma(z-z_2)\ldots\Gamma(z-z_n)}{\Gamma(z-z_1')\Gamma(z-z_2')\ldots\Gamma(z-z_n')}.$$

In Folge dieses Satzes ist

$$a^z \frac{\Gamma(z-z_1)\Gamma(z-z_2)\ldots\Gamma(z-z_n)}{\Gamma(z-z_1')\Gamma(z-z_2')\ldots\Gamma(z-z_n')} = C \,.\int_0^a \eta x^{z-1}\,dx \tag{13}$$

für alle Werthe von z, für welche das Integral einen bestimmten Sinn hat.

Durch diese allgemeine und, so viel ich weiss, neue Gleichung wird eine grosse Menge bestimmter Integrale auf die Gammafunction zurückgeführt.

---

[1] Siehe SCHEEFFER, *Zur Theorie der Functionen* $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, CRELLES Journal, Bd. 97, S. 237.

In der Theorie der bestimmten Integrale hat bekanntlich die Gammafunction eine grosse Anwendung. Es sind besonders die Gleichungen

$$\frac{\Gamma(z)}{m^z} = \int_0^\infty e^{-mx} x^{z-1} dx \tag{14}$$

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(a)}{\Gamma(z+a)} = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{a-1} dx, \tag{15}$$

welche sehr oft benutzt werden. Deswegen und weil die Gleichung (15) nur ein Specialfall von (13) ist, gewinnt diese allgemeinere Gleichung ein besonderes Interesse.

Ich behalte mir vor bei einer anderen Gelegenheit zu zeigen, dass die Gleichung (14) in ähnlicher Weise wie (15) verallgemeinert werden kann.

Die Potenzen des EULERschen Integrals erster Gattung können nun beispielsweise in der Form eines bestimmten Integrals ausgedruckt werden. Setzt man nämlich

$$a = 1,\ z_1 = z_2 = \ldots = z_n = 0,\ z_1' = z_2' = \ldots = z_n' = -\alpha,$$

so wird

$$\left(\frac{\Gamma(z)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(z+\alpha)}\right)^n = C.\int_0^1 \eta x^{z-1} dx,$$

wo η die folgende Differentialgleichung befriedigt

$$\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}x\ldots x\frac{d}{dx}y = x^\alpha \frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}x\ldots x\frac{d}{dx}x^{1-\alpha}y.$$

Die Anzahl der bezeichneten Differentiationen ist auf beiden Seiten gleich n. Nimmt man an, es sei α eine positive ganze Zahl, so erhält man eine Verallgemeinerung der Gleichung

$$\frac{1\cdot 2\ldots(\alpha-1)}{z(z+1)\ldots(z+\alpha-1)} = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{\alpha-1} dx.$$

Durch eine geeignete Specialisirung von (13) erhält man ferner die Gleichung

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(z-\gamma+1)}{\Gamma(z-\alpha+1)\Gamma(z-\beta+1)}$$

$$= C.\int_0^1 F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma-\alpha-\beta+1,\ 1-x)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}x^{z-1}dx,$$

wo F die hypergeometrische Reihe bezeichnet.

Ist a von 1 verschieden, so kann offenbar die oben betrachtete Function $F(z)$ folgendermassen als Summe zweier Integrale dargestellt werden

$$F(z) = \int_0^a \eta x^{z-1}dx = \int_0^1 \eta x^{z-1}dx + \int_1^a \eta x^{z-1}dx, \tag{16}$$

wobei η statt $C.\eta$ geschrieben ist. Setzen wir

$$P(z) = \int_0^1 \eta x^{z-1}dx$$

$$Q(z) = \int_1^a \eta x^{z-1}dx,$$

so hat das Integral $Q(z)$ für jeden Werth von z eine bestimmte Bedeutung und kann in Folge eines schon früher benutzten Satzes in der Nähe jeder endlichen Stelle z_0 nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z-z_0$ entwickelt werden. Sie hat mithin den Charakter einer ganzen Function und kann daher in eine beständig convergirende Potenzreihe entwickelt werden. Nach § 1 befriedigt $P(z)$ eine Differenzengleichung der Form

$$P(z+1) = \mathbf{r}(z)P(z) - \mathbf{R}(z),$$

und mithin $Q(z) = F(z) - P(z)$ die Gleichung

$$Q(z+1) = \mathbf{r}(z)Q(z) + \mathbf{R}(z). \tag{17}$$

In der Umgebung von $x = 0$ kann das Integral η durch eine Summe von Reihen der Form

$$\eta_\rho = x^\rho \sum_{\nu=0}^{\infty} [C_0^{(\nu)} + C_1^{(\nu)}\log x + \ldots + C_{k-1}^{(\nu)}(\log x)^{k-1}]x^\nu,$$

dargestellt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Diese Reihen convergiren bekanntlich innerhalb eines Kreises mit dem Mittelpunkte $x = 0$ und dem Radius $|a| = \left|\frac{a_0}{b_0}\right|$. Ist nun $|a| > 1$, so kann offenbar der Ausdruck $x^{z-1}\eta_\rho$ mit Hülfe der Formel

$$\int_0^1 x^{z-1}(\log x)^{m-1}dx = \frac{(-1)^{m-1}1.2\ldots(m-1)}{z^m}.$$

gliedweise integrirt werden, und es ergiebt sich dann eine gewöhnliche Partialbruchreihe der Form

$$(18)\qquad \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A_1^{(\nu)}}{z+\rho+\nu}+\frac{A_2^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^2}+\ldots+\frac{A_k^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^k}\right),$$

welche immer convergirt, wenn z von den Grössen

$$-\rho-\nu \qquad \left(\begin{smallmatrix}\rho = -z_1, & -z_2, & \ldots, & -z_n\\ \nu = 0, & 1, & 2, & \ldots\end{smallmatrix}\right)$$

verschieden ist. Das Integral $P(z)$ kann mithin in der Form einer Summe von Partialbruchreihen der Gestalt (18) ausgedruckt werden. Hiermit vergleiche man § 5 meiner früher erwähnten Abhandlung.

Auch im Falle $|a_0| = |b_0|$ ist, wie ich hier nicht näher ausführen will, die gliedweise Integration erlaubt, wenn x die oben festgesetzte Bedingung erfüllt. Diese Bedingung ist übrigens für eine solche Integration, wenn auch hinreichend, bei weitem nicht immer nothwendig. Es soll bei dieser Gelegenheit auch nicht näher erörtert werden, ob diese Bedingung für die übrigen in diesem § dargestellten Resultate nothwendig sei. In der That kann ich gegenwärtig keinenfalls eine vollständige Darstellung des Gegenstandes dieser Arbeit beabsichtigen, weil eine solche Darstellung von einigen allgemeinen, auf Gammafunctionen sich beziehenden Sätzen vorausgegangen werden muss, die sich nicht in früheren Arbeiten finden dürften, wenn man von einigen ganz speciellen, von SCHEEFFER[1] bewiesenen absieht. In der nächsten Zeit werde ich eine Arbeit veröffentlichen, wo ich den Gegenstand meiner früheren und der vorliegenden Abhandlung in einer vollständigeren Gestalt darzustellen beabsichtige.

---

[1] *Zur Theorie der Functionen* $\Gamma(z)$, $P(z)$, $Q(z)$, CRELLE's Journal, Bd. 97.

4. Ist b_0 von Null verschieden, so können die Integrale y der Differentialgleichung (1) in der Umgebung von $x = \infty$ durch eine Summe von Reihen der Form

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\rho} \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[C_0 + C_1 \log \frac{1}{x} + \ldots + C_{k-1} \left(\log \frac{1}{x}\right)^{k-1}\right] \left(\frac{1}{x}\right)^{\nu},$$

dargestellt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Bezeichnet man wie früher die Wurzeln der Gleichung $\mathbf{r}_1(z) = 0$ mit $z'_1, z'_2, \ldots, z'_n$, so sind nach § 1 $z'_1 + 1, z'_2 + 1, \ldots, z'_n + 1$ die Wurzeln der genannten Fundamentalgleichung. Ist nun der singuläre Punkt $x = \frac{a_0}{b_0} = a$ von 1 verschieden, was in diesem § angenommen wird, so ist, damit das Integral

$$\mathfrak{g}(z) = \int_1^{\infty} y x^{z-1} dx \tag{19}$$

einen bestimmten Werth habe, nach dem gesagten im Allgemeinen erforderlich und immer hinreichend, dass der reelle Theil von z in algebraischem Sinne kleiner als die reelle Zahl μ sei, womit der kleinste unter den reellen Theilen von $z'_1 + 1, z'_2 + 1, \ldots, z'_n + 1$ bezeichnet wird.

In § 1 ist gezeigt worden, dass das Integral

$$f(z) = \int_0^1 y x^{z-1} dx \tag{20}$$

die Gleichung

$$\mathbf{r}_1(z) f(z+1) = \mathbf{r}_0(z) f(z) - R(z) \tag{21}$$

befriedigt. In ganz ähnlicher Weise findet man jetzt, dass $\mathfrak{g}(z)$ der Gleichung

$$\mathbf{r}_1(z) \mathfrak{g}(z+1) = \mathbf{r}_0(z) \mathfrak{g}(z) + R(z) \tag{22}$$

Genüge leistet. Die ganzen Functionen $\mathbf{r}_0(z)$ und $\mathbf{r}_1(z)$ sind durch die Gleichungen (6) und (7) bestimmt. Die ganze Function $R(z)$ ist auch in den beiden Gleichungen (21) und (22) dieselbe, wenn y in (19) und (20) dasselbe Integral bezeichnet, was im Folgenden angenommen wird.

Setzt man wie früher in § 2

$$\frac{\mathbf{r}_0(z)}{\mathbf{r}_1(z)} = \mathbf{r}(z), \qquad \frac{R(z)}{\mathbf{r}_1(z)} = \mathbf{R}(z),$$

so folgt aus (22)

$$\mathfrak{g}(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathfrak{g}(z) + \mathbf{R}(z) \tag{23}$$

und durch wiederholte Anwendung dieser Gleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}(z) = \mathbf{R}(z-1) + \mathbf{r}(z-1)\mathbf{R}(z-2) + \dots \\ \dots + \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\dots\mathbf{r}(z-m+1)\mathbf{R}(z-m \\ + \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\dots\mathbf{r}(z-m)\mathfrak{g}(z-m). \end{aligned} \tag{24}$$

Es sei nun für einen Augenblick entweder $|a_0| < |b_0|$ oder $|a_0| = |b_0|$, und im letzten Falle der reelle Theil von

$$\varkappa = \frac{b_1}{b_0} - \frac{a_1}{a_0} - n = z'_1 + z'_2 + \dots + z'_n - z_1 - z_2 - \dots - z_n$$

in algebraischem Sinne grösser als -1, so kann bewiesen werden, dass das Restglied in (24) für wachsendes m sich der Grenze Null nähert. Dies ist, wenn $|a_0| < |b_0|$ ist, unmittelbar ersichtlich; denn das Product

$$\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\dots\mathbf{r}(z-m)$$

wird alsdann mit wachsendem m unendlich klein, was offenbar auch mit $\mathfrak{g}(z-m)$ der Fall ist. Ist $|a_0| = |b_0|$, so bringen wir das Restglied in (24) auf die Form

$$\begin{aligned} &\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\dots\mathbf{r}(z-m)\mathfrak{g}(z-m) \\ &= a^{-m}m^{\varkappa}\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\dots\mathbf{r}(z-m)\cdot\frac{\mathfrak{g}(z-m)}{a^{-m}m^{\varkappa}}. \end{aligned}$$

Aus § 2 meiner früheren Abhandlung ergiebt sich, dass der erste Factor rechter Hand für wachsendes m sich der endlichen Grenze

$$\begin{aligned} &\lim_{m=\infty} a^{-m}m^{\varkappa}\mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\dots\mathbf{r}(z-m) \\ &= \frac{\Gamma(1+z'_1-z)\Gamma(1+z'_2-z)\dots\Gamma(1+z'_n-z)}{\Gamma(1+z_1-z)\Gamma(1+z_2-z)\dots\Gamma(1+z_n-z)} \end{aligned}$$

nähert. Da der reelle Theil von z kleiner als die oben genannte Zahl μ vorauszusetzen ist, so giebt es offenbar eine positive Constante A, welche die Bedingung

$$|yx^z| < A$$

erfüllt, wenn x auf das Intervall $1 \ldots \infty$ beschränkt ist. In Folge eines Satzes aus der Theorie der bestimmten Integrale ist dann

$$|\mathfrak{g}(z-m)| \leq \int_1^\infty |yx^z| x^{-m-1} dx < A\int_1^\infty \frac{dx}{x^{m+1}} = \frac{A}{m}$$

und mithin

$$\left|\frac{\mathfrak{g}(z-m)}{a^{-m} m^{\varkappa}}\right| < \frac{A}{m^{\varkappa+1}}.$$

Da unserer Annahme nach der reelle Theil von $\varkappa > -1$ ist, so folgt hieraus dass das Restglied in (24) für wachsendes m sich der Grenze 0 nähert. Hiermit ist nun unter den oben erwähnten Voraussetzungen nachgewiesen, nicht nur dass die Reihe

$$\mathbf{R}(z-1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-\nu+1)\mathbf{R}(z-\nu)$$

wenigstens für diejenigen Werthe von z, für welche das Integral eine Bedeutung hat, eine convergirende ist, sondern auch dass

$$(25) \quad \int_1^\infty yx^{z-1}dx = \mathbf{R}(z-1) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}(z-1)\mathbf{r}(z-2)\ldots\mathbf{r}(z-\nu+1)\mathbf{R}(z-\nu).$$

In ähnlicher Weise wie in § 2 wird gezeigt, dass der Convergenzbereich dieser Reihe nicht, wie der Bereich von z in dem das Integral einen bestimmten Sinn hat, ein beschränkter ist.

Die beiden Integrale (19) und (20) haben im Allgemeinen nicht gleichzeitig eine bestimmte Bedeutung. Damit dies der Fall sei, müssen die Wurzeln der zu den singulären Punkten $x = 0$ und $x = \infty$ gehörigen Fundamentalgleichungen eine gewisse Bedingung erfüllen. Bezeichnet λ den in algebraischem Sinne grössten Werth, den der reelle Theil einer Wurzel der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ haben kann, so hat das Integral (20) eine bestimmte Bedeutung, wenn der reelle Theil von $z > \lambda$ ist. Das Integral (19) hat auch eine bestimmte Bedeutung, wenn der reelle Theil von $z < \mu$ ist, wo μ die oben angegebene Zahl bezeichnet. Ist also $\lambda < \mu$, so haben diese Integrale gleichzeitig eine bestimmte Bedeutung, wenn der reelle Theil von $z = \zeta + i\zeta'$ die Bedingung

$$\lambda < \zeta < \mu \tag{26}$$

erfüllt. In dem durch (26) charakterisirten Bereich von z stimmt alsdann das Integral

$$\int_0^\infty yx^{z-1}dx = \int_0^1 yx^{z-1}dx + \int_1^\infty yx^{z-1}dx \tag{27}$$

mit einer analytischen Function $\Phi(z)$ überein, die in Folge von (21) und (22) die Eigenschaft

$$\Phi(z + 1) = \mathbf{r}(z)\,\Phi(z)$$

besitzt. Bezeichnet also $F(z)$ die durch (12) definirte Function, so kann

$$\Phi(z) = \varphi(z)\,F(z)$$

gesetzt werden, wo $\Phi(z)$ eine periodische Function bezeichnet, die ich bei einer anderen Gelegenheit bestimmen werde.

Ist $|a_0| = |b_0|$ und der reelle Theil von $\varkappa > -1$, so convergiren die Reihen (10) und (25) gleichzeitig. Setzt man unter dieser Annahme

$$\Phi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z + m)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z + 1)\ldots\mathbf{r}(z + m)} + \mathbf{R}(z - 1) \tag{28}$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathbf{r}(z - 1)\mathbf{r}(z - 2)\ldots\mathbf{r}(z - \nu + 1)\mathbf{R}(z - m),$$

so ist $\Phi(z)$ eine analytische Function mit der Eigenschaft

$$\Phi(z + 1) = \mathbf{r}(z)\,\Phi(z).$$

Diese Function kann offenbar auf die Form (27) gebracht werden, wenn die Bedingung $\lambda < \zeta < \mu$ erfüllt ist.

5. Nunmehr betrachten wir das Integral

$$\mathfrak{g}(z) = \int_a^\infty \eta x^{z-1}dx, \tag{29}$$

wo η dieselbe Bedeutung hat wie in § 3. Der Einfachheit halber wird angenommen, dass das Integral längs einer Geraden erstreckt ist, deren Verlängerung durch den Origo geht. Wenn der reelle Theil von $x < -n$ ist, so sind die Werthe, welche $\eta, \eta', \ldots, \eta^{(n-1)}$ für $x = a$ annehmen, alle gleich Null. Hieraus folgt nun leicht, dass $\mathfrak{g}(z)$ der Differenzengleichung

$$(30) \qquad \mathfrak{g}(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathfrak{g}(z)$$

Genüge leistet.

Das Integral $\mathfrak{g}(z)$ hat folgende Eigenschaften.

I. Die Gleichung $\mathfrak{g}(z+1) = \mathbf{r}(z)\mathfrak{g}(z)$ besteht für alle Werthe von z, für die das Integral einen bestimmten Sinn hat.

II. Man kann eine reelle Zahl $\alpha + 1$ so annehmen, dass sie in algebraischem Sinne kleiner als der reelle Theil einer jeden der Grössen $z_1 + 1, z_2 + 1, \ldots, z_n + 1$ ist, und dass $\mathfrak{g}(z)$ in der Nähe jeder Stelle $z_0 = \zeta + i\zeta'$, für welche $\alpha \leqq \zeta \leqq \alpha + 1$ ist, in eine nach positiven ganzzahligen Potenzen von $z - z_0$ fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. (Vergl. § 3, II.)

III. In dem soeben erwähnten Bereiche von z kann der absolute Betrag von $a^{-z}\mathfrak{g}(z)$ nicht über eine gewisse endliche Grenze wachsen. Es ist nämlich, wenn man $x = at$ setzt,

$$a^{-z}\mathfrak{g}(z) = a^{-z}\int_a^\infty \eta x^{z-1}dx = \int_1^\infty \eta t^{z-1}dt,$$

und t eine reelle Veränderliche, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergiebt.

Betrachtet man die Function

$$G(z) = a^z \frac{\Gamma(1 + z_1' - z)\Gamma(1 + z_2' - z)\ldots\Gamma(1 + z_n' - z)}{\Gamma(1 + z_1 - z)\Gamma(1 + z_2 - z)\ldots\Gamma(1 + z_n - z)},$$

so erhellt leicht, dass sie die Eigenschaften I und II besitzt. Mit Hülfe des bekannten analytischen Ausdruckes der Gammafunction überzeugt man sich, dass $G(z)$ auch die Bedingung III erfüllt. Es gilt nun folgender Satz, der aus dem entsprechenden in § 3 abgeleitet werden kann.

Es giebt, abgesehen von einem constanten Factor, nur eine einzige analytische Function, welche die Gleichung $G(z+1) = \mathbf{r}(z)G(z)$ befriedigt und ausserdem die unter II und III bezeichneten Eigenschaften besitzt, und zwar ist diese Function identisch mit $G(z)$.

In Folge dieses Satzes ist

$$(31) \qquad a^z \frac{\Gamma(1+z_1'-z)\Gamma(1+z_2'-z)\ldots\Gamma(1+z_n'-z)}{\Gamma(1+z_1-z)\Gamma(1+z_2-z)\ldots\Gamma(1+z_n-z)} = C\int_a^\infty \eta x^{z-1}dx.$$

Die in § 3 betrachtete Function $F(z)$ ist mit $G(z)$ mittelst der Gleichung

$$(32) \qquad G(z) = F(z)\frac{\sin\pi(z-z_1)\sin\pi(z-z_2)\ldots\sin\pi(z-z_n)}{\sin\pi(z-z_1')\sin\pi(z-z_2')\ldots\sin\pi(z-z_n')}$$

verbunden.

6. Im Vorigen haben wir die Integrale

$$(33) \qquad \int_0^a yx^{z-1}dx, \qquad \int_a^\infty yx^{z-1}dx, \qquad a = \frac{a_0}{b_0}$$

nur für den Fall betrachtet, wo y dem zur Wurzel $\rho = -\varkappa - 1$ der Fundamentalgleichung

$$\rho(\rho-1)\ldots(\rho-n+2)(\rho+\varkappa+1) = 0$$

gehörigen Integrale η gleich ist. Aus dieser Fundamentalgleichung und aus der allgemeinen Form der Integrale der Differentialgleichung (1) für die Umgebung von $x = 0$ und $x = \infty$ erhellt sofort, dass das erste Integral für hinreichend grosse und das zweite für hinreichend kleine Werthe des reellen Theiles von z eine bestimmte Bedeutung hat, wenn y irgend eine lineare Function der zu den Wurzeln $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ gehörigen Integrale bezeichnet.

Durch die Substitution $x = at$ gehen die Integrale (33) in die folgenden über

$$\int_0^a yx^{z-1}dx = a^z\int_0^1 yt^{z-1}dt, \qquad \int_a^\infty yx^{z-1}dx = a^z\int_1^\infty yt^{z-1}dt,$$

wo y, wenn t als unabhängige Veränderliche betrachtet wird, eine Differentialgleichung befriedigt, die ebenfalls die allgemeine Form (1) hat, für die aber der Punkt $t = 1$ ein singulärer ist. Es darf daher angenommen werden, dass a in den Integralen (33) gleich 1 ist.

Bezeichnet nun y eine lineare Function der zu den Wurzeln $\rho = 0, 1, 2, \ldots, n-2$ gehörigen Integrale, so hat das bestimmte Integral

$$f(z) = \int_0^1 y x^{z-1} dx \tag{34}$$

einen endlichen Werth, wenn der reelle Theil von $z > \lambda$ ist, wo λ die früher angegebene Zahl bedeutet. In Folge dessen, was in § 1 dargestellt ist, genügt $f(z)$ der Gleichung

$$\mathbf{r}_1(z)f(z+1) = \mathbf{r}_0(z)f(z) - R(z).$$

Wenn man die Bildungsweise der Coefficienten der ganzen Function $R(z)$ beachtet, so ergiebt sich für den gegenwärtigen Fall $(a_0 = b_0)$, dass $R(z)$ höchstens $(n-2)^{\text{ten}}$ Grades sein kann. Nehmen wir jetzt an, es sei der reelle Theil von $\varkappa > -1$, so ergiebt sich ganz so wie in § 2, dass $f(z)$ durch die Reihe (10) dargestellt werden kann.

Ist der reelle Theil von $z < \mu$, wo μ die in § 4 definirte Zahl bezeichnet, und werden die obigen Voraussetzungen festgehalten, so erhält man für

$$\mathfrak{g}(z) = \int_1^\infty y x^{z-1} dx \tag{35}$$

die Reihenentwickelung (25).

In den Fällen, wo die bestimmten Integrale (34) und (35) nicht in Reihen der oben genannten Form entwickelt werden können, sind sie, wie ich hier nicht näher ausführen will, durch gewöhnliche Partialbruchreihen darstellbar, und zwar auch wenn y das allgemeine Integral bezeichnet.

7. Die in der vorliegenden und in meiner früher erwähnten Arbeit entwickelten oder angedeuteten Sätze gehören zu einer sehr umfassenden Theorie, wo lineare Differenzengleichungen beliebiger Ordnung in Zusammenhang mit linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten in der vorhin angegebenen Weise untersucht werden können. Da die Gammafunction für die Theorie der linearen Differenzengleichungen von grosser Wichtigkeit ist, so wird sie, in Folge des innigen Zusammenhanges zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen, auch in

der Theorie der linearen Differentialgleichungen eine interessante und wichtige Anwendung haben. Der Zweck der nachfolgenden Betrachtungen ist, das Gesagte etwas näher auseinanderzusetzen.

Dass die Gammafunction auch in der Theorie der linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung in Betracht genommen werden muss, ergiebt sich folgenderweise. Bezeichnen $\mathbf{r}_{01}(z), \ldots, \mathbf{r}_{0m}(z)$ rationale Functionen, und setzt man, unter $F_1(z), \ldots, F_m(z)$ verschiedene Functionen der Form

$$a^z \frac{\Gamma(z-a_1)\ldots\Gamma(z-a_\mu)\Gamma(a'_1-z)\ldots\Gamma(a'_{\mu'}-z)}{\Gamma(z-b_1)\ldots\Gamma(z-b_\nu)\Gamma(\beta'_1-z)\ldots\Gamma(\beta'_{\nu'}-z)}$$

verstehend:

$$F(z) = \mathbf{r}_{01}(z)F_1(z) + \ldots + \mathbf{r}_{0m}(z)F_m(z),$$

so ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathbf{r}_{01}(z)F_1(z) + \ldots + \mathbf{r}_{0m}(z)F_m(z) \\ F(z+1) &= \mathbf{r}_{11}(z)F_1(z) + \ldots + \mathbf{r}_{1m}(z)F_m(z) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F(z+m) &= \mathbf{r}_{m1}(z)F_1(z) + \ldots + \mathbf{r}_{mm}(z)F_m(z), \end{aligned}$$

wo $\mathbf{r}_{11}(z), \ldots, \mathbf{r}_{mm}(z)$ rationale Functionen bezeichnen. Aus diesen Gleichungen folgt durch Elimination von $F_1(z), \ldots, F_m(z)$ die homogene lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung

$$\mathbf{r}_0(z)F(z) + \mathbf{r}_1(z)F(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)F(z+m) = 0. \tag{36}$$

Es kann offenbar angenommen werden, dass $\mathbf{r}_0(z), \ldots, \mathbf{r}_m(z)$ *ganze* rationale Functionen bedeuten. Nach dem MITTAG-LEFFLER'schen Satze kann $F(z)$ auf die Form

$$F(z) = P(z) + Q(z) \tag{37}$$

gebracht werden, wo $P(z)$ eine Partialbruchreihe und $Q(z)$ eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet. Stellt man die letzte Gleichung mit (1) zusammen, so folgt unmittelbar, dass $P(z)$ der Gleichung

$$\mathbf{r}_0(z)P(z) + \mathbf{r}_1(z)P(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)P(z+m) = R(z) \tag{38}$$

genügen muss, wo $R(z)$ eine ganze, rationale oder transcendente, Function bezeichnet. Aus den Gleichungen (36), (37) und (38) folgt sodann, dass $Q(z)$ der Gleichung

$$\mathbf{r}_0(z)P(z) + \mathbf{r}_1(z)P(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)P(z+m) = -R(z)$$

Genüge leistet. Diese letzte Gleichung sagt natürlich nur in dem Falle etwas Bemerkenswerthes aus, wo sich $R(z)$ auf eine *rationale* ganze Function reducirt, was sehr oft der Fall ist. — Die beiden Functionen $P(z)$ und $Q(z)$ können ebenso wie $F(z)$, als eine Summe von Functionen, die lineare Differenzengleichungen erster Ordnung befriedigen, dargestellt werden. Setzt man nämlich

$$\mathbf{r}_{0\lambda}(z)F_\lambda(z) = P_\lambda(z) + Q_\lambda(z), \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, m)$$

wo $P_\lambda(z)$ eine Partialbruchreihe und $Q_\lambda(z)$ eine beständig convergirende Potenzreihe bezeichnet, so kann offenbar

$$P(z) = P_1(z) + \ldots + P_m(z)$$
$$Q(z) = Q_1(z) + \ldots + Q_m(z),$$

gesetzt werden, woraus sich die Richtigkeit der Behauptung ergiebt, da $\mathbf{r}_{0\lambda}(z)F_\lambda(z)$, und somit auch $P_\lambda(z)$ und $Q_\lambda(z)$, eine lineare Differenzengleichung erster Ordnung befriedigt.

Für die Integration linearer Differenzengleichungen höherer Ordnung ist durch die obige Betrachtung sehr wenig geleistet, da wir dabei nicht von einer beliebig *gegebenen* Differenzengleichung ausgegangen sind. Durch eine weitere Verfolgung der nachstehenden kurzen Andeutungen kann aber die Theorie der linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung in vollständiger Uebereinstimmung mit der Theorie der Gleichungen erster Ordnung entwickelt werden.

Es sei

$$(39) \qquad \mathbf{r}_0(z)f(z) + \mathbf{r}_1(z)f(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)f(z+m) = R(z)$$

eine beliebige Differenzengleichung, wo $\mathbf{r}_0(z), \ldots, \mathbf{r}_m(z)$ bestimmte ganze rationale Functionen bezeichnen, $R(z)$ aber als eine unbestimmte ganze, rationale oder transcendente, Function betrachtet wird. Versucht man diese Gleichung durch eine Partialbruchreihe der Form

$$(40) \qquad f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-a+\nu)^\mu} + \frac{A_{\mu-1}^{(\nu)}}{(z-a+\nu)^{\mu-1}} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-a+\nu}\right)$$

zu befriedigen, so findet man zunächst, dass $z = a$ eine μ-fache Wurzel der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ sein muss. Ferner müssen die Constanten A den folgenden Gleichungen genügen:

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{r}_0(a-1)A_\mu^{(1)} + \mathbf{r}_1(a-1)A_\mu^{(0)} = 0\\
&[\mathbf{r}_0(a-1)A_{\mu-1}^{(1)} + \mathbf{r}_0'(a-1)A_\mu^{(1)}] + [\mathbf{r}_1(a-1)A_{\mu-1}^{(0)} + \mathbf{r}_1'(a-1)A_\mu^{(0)}] = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Big[\mathbf{r}_0(a-1)A_1^{(1)} + \ldots + \frac{\mathbf{r}^{(\mu-1)}(a-1)}{\underline{|\mu-1}}A_\mu^{(1)}\Big]\\
&\qquad\qquad + \Big[\mathbf{r}_1(a-1)A_1^{(0)} + \ldots + \frac{\mathbf{r}^{(\mu-1)}(a-1)}{\underline{|\mu-1}}A_1^{(0)}\Big] = 0
\end{aligned}\right.$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{r}_0(a-m+1)A_\mu^{(m-1)} + \ldots + \mathbf{r}_{m-1}(a-m+1)A_\mu^{(0)} = 0\\
&[\mathbf{r}_0(a-m+1)A_{\mu-1}^{(m-1)} + \mathbf{r}_0'(a-m+1)A_\mu^{(m-1)}] + \ldots\\
&\qquad\qquad \ldots + [\mathbf{r}_{m-1}(a-m+1)A_{\mu-1}^{(0)} + \mathbf{r}_{m-1}'(a-m+1)A_\mu^{(0)}] = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Big[\mathbf{r}_0(a-m+1)A_1^{(m-1)} + \ldots + \frac{\mathbf{r}_0^{(\mu-1)}(a-m+1)}{\underline{|\mu-1}}A_\mu^{(m-1)}\Big] + \ldots\\
&\qquad\qquad \ldots + \Big[\mathbf{r}_{m-1}(a-m+1)A_1^{(0)} + \ldots + \frac{\mathbf{r}_{m-1}^{(\mu-1)}(a-m+1)}{\underline{|\mu-1}}A_\mu^{(0)}\Big] = 0
\end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\mathbf{r}_0(a-\nu)A_\mu^{(\nu)} + \ldots + \mathbf{r}_m(a-\nu)A_\mu^{(\nu-m)} = 0\\
&[\mathbf{r}_0(a-\nu)A_{\mu-1}^{(\nu)} + \mathbf{r}_0'(a-\nu)A_\mu^{(\nu)}] + \ldots + [\mathbf{r}_m(a-\nu)A_{\mu-1}^{(\nu-m)} + \mathbf{r}_m'(a-\nu)A_\mu^{(\nu-m)}] = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\Big[\mathbf{r}_0(a-\nu)A_1^{(\nu)} + \ldots + \frac{\mathbf{r}_0^{(\mu-1)}(a-\nu)}{\underline{|\mu-1}}A_\mu^{(\nu)}\Big] + \ldots\\
&\qquad\qquad \ldots + \Big[\mathbf{r}_m(a-\nu)A_1^{(\nu)} + \ldots + \frac{\mathbf{r}_m^{(\mu-1)}(a-\nu)}{\underline{|\mu-1}}A_\mu^{(\nu-m)}\Big] = 0
\end{aligned}\right.$$

$$(\nu = m,\ m+1,\ m+2,\ \ldots)$$

Es seien nun die Grössen $\mathbf{r}_0(a-\nu)$, $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, der Einfachheit halber von Null verschieden, so erhellt aus den obigen Gleichungen, dass zu der μ-fachen Wurzel $z = a$ der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ μ von einander linear unabhängige Partialbruchreihen der Form (40) gehören, welche die Differenzengleichung (39) wenigstens *formell* befriedigen. Die Constanten $A_\mu^{(0)}, \ldots, A_1^{(0)}$ des ersten Gliedes von $f(z)$ können beliebig angenommen werden; die Constanten der folgenden Glieder erhalten nachher eindeutig bestimmte Werthe, die mit Hülfe der obigen Gleichungen als homogene lineare Functionen von $A_\mu^{(0)}, \ldots, A_1^{(0)}$ ausgedruckt werden können.

Aus dem Beweise des MITTAG-LEFFLER'schen Satzes geht hervor, dass die ganzen rationalen Functionen $\mathfrak{g}_\nu(z)$, $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$, immer so gebildet werden können, dass die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z-a+\nu)^\mu} + \ldots + \frac{A_1^{(\nu)}}{z-a+\nu} + \mathfrak{g}_\nu(z)\right)$$

gleichmässig convergirt. Hieraus erhellt nun zwar leicht, dass man immer die Differenzengleichung (39) befriedigende Functionen bilden kann, wenn $R(z)$ nur der Bedingung, eine ganze Function zu sein, unterworfen ist. Das grösste Interesse kommt indessen solchen Functionen zu, für welche die entsprechenden Functionen $R(z)$ rational sind. Ein ziehmlich umfassender Fall, wo man solche Functionen erhält, soll hier angegeben werden. Bezeichnet man mit n die positive ganze Zahl, welche die überhaupt höchste in irgend einer der Coefficienten $\mathbf{r}_0(z), \ldots, \mathbf{r}_m(z)$ vorkommende Potenz von z angiebt, und setzt man

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_0(z) &= c_0^{(0)}z^n + c_1^{(0)}z^{n-1} + \ldots + c_n^{(0)}\\
\mathbf{r}_1(z) &= c_0^{(1)}z^n + c_1^{(1)}z^{n-1} + \ldots + c_n^{(1)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mathbf{r}_m(z) &= c_0^{(m)}z^n + c_1^{(m)}z^{n-1} + \ldots + c_n^{(m)},
\end{aligned}$$

so ist die Reihe (40), wie auch die Constanten A des ersten Gliedes angenommen werden, gleichmässig convergent, wenn jede Wurzel der Gleichung

$$c_0^{(0)} + c_0^{(1)}x + \ldots + c_0^{(m)}x^m = 0 \tag{41}$$

dem absoluten Betrage nach grösser als 1 ist. — Die Richtigkeit dieses Satzes ergiebt sich am einfachsten aus den Betrachtungen, welche im

Folgenden über lineare Differentialgleichungen angestellt werden. — In diesem Falle gehören also zu jeder μ-fachen Wurzel $z = a$ der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ μ von einander linear unabhängige, die Differenzengleichung (39) befriedigende Partialbruchreihen der Form (40), durch welche jede andere zu derselben Wurzel gehörige Reihe als homogene lineare Function ausgedruckt werden kann. Jede homogene lineare Function von diesen zu derselben oder zu verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\mathbf{r}_0(z) = 0$ gehörigen Reihen befriedigt offenbar auch die Differenzengleichung (39). Dass die ganze Function $R(z)$, welche von der jedesmal in Betracht genommenen Function abhängig ist, rational sein muss, geht auch in ziemlich einfacher Weise hervor. — Es ist zu bemerken, dass die obige auf die Wurzeln der Gleichung (41) sich beziehende Voraussetzung für die Convergenz der erhaltenen Partialbruchreihen (40) nicht immer nothwendig ist.

Die soeben betrachteten Functionen können auch auf eine andere Form gebracht werden. Setzt man nämlich

$$\frac{\mathbf{r}_1(z)}{\mathbf{r}_0(z)} = -\mathbf{R}_1(z), \; \ldots, \; \frac{\mathbf{r}_m(z)}{\mathbf{r}_0(z)} = -\mathbf{R}_m(z), \; \frac{R(z)}{\mathbf{r}_0(z)} = \mathbf{R}(z),$$

so können sie, wie ich hier nicht näher ausführen will, durch die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \varphi_\nu(z) \tag{42}$$

dargestellt werden, wenn man die rationalen Functionen φ mit Hülfe der folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
\varphi_0(z) &= \mathbf{R}(z)\\
\varphi_1(z) &= \mathbf{R}_1(z)\varphi_0(z+1)\\
\varphi_2(z) &= \mathbf{R}_1(z)\varphi_1(z+1) + \mathbf{R}_2(z)\varphi_0(z+2)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_m(z) &= \mathbf{R}_1(z)\varphi_{m-1}(z+1) + \mathbf{R}_2(z)\varphi_{m-2}(z+2) + \ldots + \mathbf{R}_m(z)\varphi_0(z+m)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\varphi_\nu(z) &= \mathbf{R}_1(z)\varphi_{\nu-1}(z+1) + \mathbf{R}_2(z)\varphi_{\nu-2}(z+2) + \ldots + \mathbf{R}_m(z)\varphi_{\nu-m}(z+m)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Ein specieller Fall der obigen Reihe (42) ist die in § 2 betrachtete Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\mathbf{R}(z+\nu)}{\mathbf{r}(z)\mathbf{r}(z+1)\ldots\mathbf{r}(z+\nu)}.$$

Auf Grund der vorhergehenden Betrachtungen muss angenommen werden, dass auch zwischen den linearen Differenzengleichungen höherer Ordnung und den linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten ein demjenigen ähnlicher Zusammenhang stattfindet, der früher zwischen den linearen Differenzengleichungen erster Ordnung und den Differentialgleichungen der Form (1) nachgewiesen ist. Die Richtigkeit dieser Annahme bestätigt sich vollständig, wenn man die lineare Differentialgleichung

$$\begin{aligned} & x^n(a_0^{(0)} + a_1^{(0)}x + \ldots + a_m^{(0)}x^m)y^{(n)} \\ & + x^{n-1}(a_0^{(1)} + a_1^{(1)}x + \ldots + a_m^{(1)}x^m)y^{(n-1)} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \quad (a_0^{(n)} + a_1^{(n)}x + \ldots + a_m^{(n)}x^m)y = 0 \end{aligned} \tag{43}$$

zum Ausgangspunkt der Untersuchungen wählt. Ist $a_0^{(0)}$ von Null verschieden, so haben die Integrale dieser Differentialgleichung die Eigenschaft, mit einer passenden Potenz von x multiplicirt, in der Umgebung von $x = 0$ endlich zu bleiben. Bezeichnet also y ein Integral der Differentialgleichung, so hat das bestimmte Integral

$$f(z) = \int_0^1 y x^{z-1} dx \tag{44}$$

für hinreichend grosse Werthe des reellen Theiles von z, sicher einen bestimmten endlichen Werth, wenn die Wurzeln der Gleichung

$$a_0^{(0)} + a_1^{(0)}x + \ldots + a_m^{(0)}x^m = 0, \tag{45}$$

und somit die singulären Punkte der Differentialgleichung von 1 verschieden sind. Durch eine Rechnung, die der in § 1 angestellten ganz ähnlich ist, kann nun gezeigt werden, dass $f(z)$ die folgende lineare Differenzengleichung m^{ter} Ordnung befriedigt:

$$\mathbf{r}_0(z)f(z) + \mathbf{r}_1(z)f(z+1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)f(z+m) = R(z), \tag{46}$$

wo die Coefficienten durch die nachstehenden Gleichungen bestimmt sind:

$$\mathbf{r}_0(z) = a_0^{(n)} - a_0^{(n-1)} z + \dots + (-1)^n a_0^{(0)} z(z+1)\dots(z+n-1)$$
$$\mathbf{r}_1(z) = a_1^{(n)} - a_1^{(n-1)}(z+1) + \dots + (-1)^n a_1^{(0)}(z+1)(z+2)\dots(z+n)$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mathbf{r}_m(z) = a_m^{(n)} - a_m^{(n-1)}(z+m) + \dots + (-1)^n a_m^{(0)}(z+m)(z+m+1)\dots(z+m+n-1).$$

Diese Functionen sind mithin von dem Integrale y unabhängig. Die Coefficienten der ganzen Function $R(z)$, deren Gradzahl höchstens gleich $n-1$ ist, sind aber homogene lineare Functionen von den Werthen $y_1, y_1', \dots, y_1^{(n-1)}$, welche $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ für $x = 1$ annehmen.

Ist die Differenzengleichung (46), wo $R(z)$ eine unbestimmte ganze Function $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades bezeichnet, gegeben, so ist leicht zu sehen, dass immer eine solche lineare Differentialgleichung der Form (43) gefunden werden kann, dass jede durch (44) definirte Function $f(z)$ die gegebene Differenzengleichung befriedigt. Hierbei wird natürlich vorausgesetzt, dass die Integrale $f(z)$ endliche Werthe haben, was wenigstens unter den oben erwähnten Bedingungen der Fall ist.

Die Integrale der Differentialgleichung (43), wo $a_0^{(0)}$ von Null verschieden ist, können bekanntlich in der Umgebung von $x = 0$ durch eine Summe von Reihen der Form

$$y_\rho = \sum_{\nu=0}^{\infty} [B_1^{(\nu)} + B_2^{(\nu)} \log x + \dots + B_\mu^{(\nu)} (\log x)^{\mu-1}] x^{\rho+\nu}$$

ausgedruckt werden, wo ρ eine Wurzel der zum singulären Punkte $x = 0$ gehörigen Fundamentalgleichung bedeutet. Sind die Wurzeln der Gleichung (45) dem absoluten Betrage nach grösser als 1, so kann $y_\rho x^{z-1}$ zwischen den Grenzen 0 und 1 gliedweise integrirt werden. Dadurch ergiebt sich, wenn man die Formel

$$\int_0^1 x^{z-1} (\log x)^\lambda dx = \frac{(-1)^\lambda \underline{|\lambda}}{z^{\lambda+1}}$$

benutzt, ein Resultat der Form

$$\int_0^1 y_\rho x^{z-1} dx = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(\frac{A_1^{(\nu)}}{z+\rho+\nu} + \frac{A_2^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^2} + \dots + \frac{A_\mu^{(\nu)}}{(z+\rho+\nu)^\mu} \right).$$

Hiermit vergleiche man den früher erwähnten Satz über die Convergenz von Partialbruchreihen, welche einer linearen Differenzengleichung genügen.

Sind a und b zwei singuläre Stellen der Differentialgleichung (8), an denen $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ verschwinden, und setzt man entweder

$$f(z) = \int_0^a y x^{z-1} dx$$

oder

$$f(z) = \int_a^b y x^{z-1} dx,$$

so ist $f(z)$ in beiden Fällen eine Function, welche einer *homogenen* linearen Differenzengleichung genügt. — Mit Hülfe der Gammafunction kann die früher betrachtete Function $F(z)$, wenigstens in gewissen Fällen, so zusammengesetzt werden, dass sie dieselbe Differenzengleichung genügt wie $f(z)$. Es liegt daher sehr nahe anzunehmen, dass es eine ausserordentlich grosse Menge von bestimmten Integralen giebt, welche auf die Gammafunction zurückgeführt werden kann. Für die Richtigkeit dieser Annahme sprechen in der That alle im Vorhergehenden erhaltenen Resultate, besonders aber die Gleichungen (13) und (31).

Dass die Gleichung

$$f(z) = \int y x^{z-1} dx$$

einen bestimmten Zusammenhang zwischen den linearen Differential- und Differenzengleichungen vermittelt, ist wohl zuerst von LAPLACE bemerkt worden[1]. In seiner *Théorie analytique des probabilités* wird von diesem Umstande vielmals Gebrauch gemacht.

Der in Frage stehende Zusammenhang ist auch der Gegenstand eines vor kurzer Zeit publicirten Aufsatzes des Herrn PINCHERLE[2].

In der Abhandlung *Ueber die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen*[3] wendet Herr FROBENIUS eine Reihe $G(x, \rho)$ an, mit deren Hülfe er die Integration der dort betrachteten Differential-

[1] Man siehe beispielsweise § 21 in *Livre premier* seiner oben erwähnten Arbeit.

[2] *Sopra una trasformazione delle equazioni differenziali lineari in equazioni lineari alle differenze, e viceversa.* Nota del prof. S. PINCHERLE, letta al R. Istituto Lombardo nell' adunanza del 17 giugno 1886.

[3] CRELLES Journal, Bd. 76, S. 214.

gleichungen bewerkstelligt. Für den Fall wo die Coefficienten der Differentialgleichung ganze rationale Functionen sind, wird gezeigt, dass die Reihe $G(x, \rho)$, als Function von ρ betrachtet, eine lineare Differenzengleichung befriedigt. Ich halte es nicht für nöthig, den einfachen Zusammenhang zwischen dieser Reihe und den vorigen Untersuchungen näher auseinanderzusetzen.

Ich bemerke schliesslich, dass die Gleichung

$$(47) \qquad \mathbf{r}_0(z)f(z) + \mathbf{r}_1(z)f(qz) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)f(q^m z) = R(z)$$

wo q eine Constante und $\mathbf{r}_0(z), \ldots, \mathbf{r}_m(z)$, $R(z)$ ganze rationale Functionen bezeichnen, in ähnlicher Weise untersucht werden kann wie die Differenzengleichung (46). Sie sind beide specielle Fälle der Gleichung

$$\mathbf{r}_0(z)f(\vartheta^0) + \mathbf{r}_1(z)f(\vartheta^1) + \ldots + \mathbf{r}_m(z)f(\vartheta^m) = R(z),$$

wo

$$\vartheta^0 = z, \qquad \vartheta^1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \qquad \vartheta^2 = \vartheta(\vartheta), \quad \ldots, \quad \vartheta^m = \vartheta(\vartheta^{m-1}).$$

Mit Hülfe des aus der Theorie der elliptischen Functionen bekannten Productes

$$\prod_{\nu=0}^{\infty}(1 + q^\nu z), \qquad |q| < 1,$$

können specielle Functionen gebildet werden, welche eine Gleichung der Form (47) befriedigen [1].

[1] Vergl. meine Abhandlung: *En grupp af transcendenta funktioner, hvilka besitta egenskaper liknande den, som tillkommer det reciproka värdet af den oändliga produkten* $\prod_\nu(1 + q^\nu z)$, in Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1884, N:o 5, S. 125.