NOTE

SUR UN DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE

$$\int_0^a e^{x^2} dx$$

PAR

T. J. STIELTJES

À PARIS.

Lorsque la fonction $f(x)$ devient infinie pour une valeur $x = c$ comprise entre a et b, cette circonstance peut ôter toute signification précise à l'intégrale

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Comme on sait, CAUCHY a introduit dans ce cas la considération de l'expression

$$\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Il peut arriver que cette expression tend vers une limite déterminée lorsque la quantité positive ε tend vers zéro, cette limite est alors appelée par CAUCHY la *valeur principale* de l'intégrale

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon=0} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx.$$

Cette extension de la conception d'une intégrale définie n'est pas généralement admise, on l'a souvent rejetée à cause de sa nature trop arbitraire ou artificielle.

Acta mathematica. 9. Imprimé le 6 Décembre 1886.

RIEMANN, dans un mémoire célèbre (Werke, p. 226) s'exprimait de la manière suivante:

»Dans certaines recherches particulières, d'autres déterminations de CAUCHY sur la conception d'une intégrale définie dans les cas où celle-ci n'existe pas d'après sa définition fondamentale, peuvent être utiles, mais elles ne sont pas généralement admises, leur nature trop arbitraire ne s'y prêtant guère d'ailleurs.»

La valeur principale d'une intégrale étant une quantité nettement définie, il semble que l'admissibilité d'une telle idée doive dépendre surtout de l'utilité qu'elle peut avoir. Nous croyons que les développements suivants montrent clairement, par un exemple, que les »recherches particulières» où la conception de CAUCHY est de la plus grande utilité (ou plutôt nécessaire, si nous ne nous trompons pas), ne manquent pas.

1. Nous considérons la fonction:

$$\varphi(a) = \int_0^a e^{x^2} dx$$

et nous supposons la variable réelle et positive.

On trouve facilement ce développement:

$$(1) \qquad \varphi(a) = e^{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \frac{1.3}{8a^5} + \frac{1.3.5}{16a^7} + \dots\right]$$

$$= T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + \dots$$

La série est divergente, mais on peut regarder cette formule simplement comme une manière symbolique d'exprimer que pour $a = \infty$ on a

$$\lim a e^{-a^2} \varphi(a) = \frac{1}{2},$$

$$\lim a^3 \left[e^{-a^2}\varphi(a) - \frac{1}{2a}\right] = \frac{1}{4},$$

etc.

Nous rencontrerons dans la suite encore d'autres développements divergents, on devra toujours les interpréter d'une manière analogue.

Nous nous proposons maintenant d'étudier ce développement et de montrer comment il peut servir à l'évaluation de $\varphi(a)$.

2. Une intégration par parties donne

$$\varphi(a) = \frac{e^{a^2}}{2a} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{a} x^{-2} e^{x^2} dx,$$

$$(2)\quad \varphi(a) = e^{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n a^{2n-1}}\right] + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_{a_n}^{a} x^{-2n} e^{x^2} dx$$

$$= T_1 + T_2 + \ldots + T_n + R_n,$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n$ étant certaines constantes positives parfaitement déterminées. En effet, les fonctions qui figurent aux deux membres de (2) ont même dérivée. Ces deux fonctions seront donc identiques lorsqu'on pourra déterminer a_n de manière qu'elles soient égales pour une valeur particulière de a. Or si l'on prend a positif mais assez petit pour que

$$\varphi(a) < e^{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n a^{2n-1}}\right],$$

il est clair que la formule (2) détermine une valeur unique de a_n qui sera supérieure à cette valeur particulière de a.

Ces constantes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vont toujours en augmentant, c'est ce qu'on voit en posant $a = a_{n+1}$ dans la relation

$$\int_{a_n}^{a} x^{-2n} e^{x^2} dx = \frac{e^{a^2}}{2a^{2n+1}} + \frac{2n+1}{2}\int_{a_{n+1}}^{a} x^{-2n-2} e^{x^2} dx.$$

3. Il est clair que si les constantes $a_1, a_2, \ldots$ étaient connues, rien ne s'opposerait plus à un usage légitime du développement (1). Car supposons que a tombe entre a_{n-1} et a_n, alors on aura évidemment

$$\varphi(a) > T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1},$$
$$\varphi(a) < T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + T_n,$$

et on aura renfermé $\varphi(a)$ entre deux limites dont la différence est T_n. Il résulte de ce que nous trouverons plus tard que T_n est précisément le plus petit terme de la série $T_1 + T_2 + \ldots$ ou le terme qui précède ce plus petit terme et qui en diffère très peu.

La détermination des constantes $a_1, a_2, \ldots$ est donc le problème principal qui doit nous occuper.

4. Il est évident d'abord que a_n est la racine positive de l'équation transcendante

$$(3) \qquad \varphi(a) = e^{a^2}\left[\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a^3} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n a^{2n-1}}\right]$$

mais il nous semble à peu près impossible de tirer de là des expressions qui pourraient nous être utiles.

On peut mettre cette équation sous une autre forme plus avantageuse. Remarquons pour cela qu'en développant les deux membres de (2) suivant les puissances croissantes de a, on ne rencontre point de terme sans a dans le premier membre. Il doit en être de même dans le second membre, ce qui montre que a_n est une racine de l'équation transcendante

$$\frac{1}{2n-1}a^{-2n+1} + \frac{1}{2n-3}a^{-2n+3} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2n-5}a^{-2n+5} + \ldots = 0.$$

En multipliant par a^{2n-1} et en posant $a^2 = t$, a_n^2 sera donc une racine positive de

$$(4) \qquad \sum_0^\infty \frac{t^m}{(2n-2m-1)\underline{|m}} = 0.$$

Cette équation admet évidemment une seule racine positive, on montre aussi facilement que le premier membre est négatif pour $t = n$, donc

$$a_n^2 < n.$$

Mais l'équation (4), pas plus que l'équation (3), ne semble nous pouvoir conduire à ce résultat que a_n^2 est susceptible d'un développement suivant les puissances descendantes de n:

$$(5) \qquad a_n^2 = n - \frac{1}{6} + \frac{8}{405}\,\frac{1}{n} + \frac{68}{25515}\,\frac{1}{n^2} - \frac{5582}{3444525}\,\frac{1}{n^3}\ldots$$

Ce développement, quoique divergent, n'en permet pas moins de calculer les a_n avec une grande approximation comme on le voit par ces quelques valeurs:

n	a_n^2	d'après (5)	erreur
1	0,85402	0,85413	— 0,00011
2	1,84365	1,84367	— 0,00002
5	4,8373767	4,8373776	— 0,0000009.

Déjà pour $n = 3$ l'erreur n'atteint plus une unité du cinquième ordre, et on peut considérer que notre but sera atteint, dès que nous aurons établi le développement (5).

Mais cela nous a été impossible en partant des expressions analytiques que nous avons développées jusqu'ici, et nous avons dû suivre une autre voie. C'est précisément la *valeur principale* d'une certaine intégrale définie qui se présente ici, et il nous semble que, dans cette occasion, on pourrait difficilement atteindre le but d'une autre manière.

5. Supposons $a \geqq 0$ alors on a:

$$\varphi(a) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{e^{a^2(1-x^2)}}{1-x^2} dx. \tag{6}$$

On établira cette formule en montrant d'abord que pour $a > 0$ la dérivée de l'expression au second membre est e^{a^2}, et ensuite que cette expression devient infiniment petite en même temps que a. Pour abréger nous omettons cette démonstration.

Il est évident d'ailleurs que cette formule suppose bien $a \geqq 0$, car la fonction $\varphi(a)$ est impaire. Si l'on considère les valeurs imaginaires, on trouve que a doit être de la forme $re^{i\varphi}$ avec $r > 0$ et $-\frac{\pi}{4} < \varphi < +\frac{\pi}{4}$.

En employant maintenant l'identité

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \ldots + x^{2n-2} + \frac{x^{2n}}{1-x^2}$$

on a évidemment

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{v.p.} \int_0^\infty x^{2k} e^{a^2(1-x^2)} dx = \frac{1.3\ldots(2k-1)}{2^{k+1} a^{2k+1}} e^{a^2}.$$

On retrouve ainsi le développement (1) mais avec cette nouvelle expression du terme complémentaire:

$$R_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{v.p.} \int_0^\infty \frac{x^{2n}}{1-x^2} e^{a^2(1-x^2)} dx. \tag{7}$$

En partant de cette formule on peut, après avoir posé

$$a^2 = n + \eta \tag{8}$$

développer R_n suivant les puissances descendantes de n, et l'on obtient

$$(9) \qquad R_n = \frac{1}{\sqrt{2n}}\left[P_0 + \frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n^2} + \ldots\right]$$

où P_0, P_1, P_2, ... sont des polynômes en η, P_k étant du degré $2k+1$

$$(10) \qquad \begin{cases} P_0 = \eta + \frac{1}{6}, \\ P_1 = \frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{4}\eta^2 - \frac{1}{24}\eta - \frac{41}{2160}, \\ P_2 = \frac{1}{40}\eta^5 - \frac{7}{48}\eta^4 + \frac{17}{144}\eta^3 + \frac{1}{96}\eta^2 + \frac{1}{1152}\eta - \frac{157}{48384}. \end{cases}$$

Ce développement est divergent mais nous avons dit déjà quel sens précis il faut y attacher.

Pour la manière d'obtenir ce développement, nous devons renvoyer à une thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris, insérée dans les Annales scientifiques de l'École Normale ($3^{ème}$ Série, Tome 3, 1886, pag. 201—258).

On conclut de ce développement que R_n s'évanouit pour une valeur finie de η, dont on trouve le développement suivant les puissances descendantes de n égal à

$$-\frac{1}{6} + \frac{8}{405}\,\frac{1}{n} + \frac{68}{25515}\,\frac{1}{n^2}\ldots$$

et comme nous avons posé $a^2 = n + \eta$, il en résulte

$$a_n^2 = n - \frac{1}{6} + \frac{8}{405}\,\frac{1}{n} + \ldots$$

C'est précisément le développement qu'il fallait obtenir.

6. En considérant, ainsi que nous l'avons fait, la quantité a_n^2 comme racine de l'équation transcendante

$$\mathrm{v.p.}\int_0^\infty \frac{x^{2n}}{1-x^2}\, e^{a_n^2(1-x^2)}\,dx = 0$$

la restriction que n soit un nombre entier, devient inutile et l'on définit ainsi une fonction continue de n. Il est certain aussi que le développement obtenu donne une valeur fort approchée de cette fonction a_n^2 dès que n est un peu grand, sans être nécessairement entier.

Si l'on regarde, au contraire, la manière dont nous avons défini originairement la quantité a_n, on voit d'abord que l'équation (3) n'a un sens que lorsque n est entier. Il n'est pas possible d'étendre cette définition à d'autres valeurs. En regardant au contraire a_n^2 comme la racine positive de l'équation (4)

$$\sum_0^\infty \frac{t^m}{(2n-2m-1)\underline{|m}} = 0$$

on peut bien supposer n variable d'une manière continue, mais la fonction a_n^2 qu'on définit ainsi, devient discontinue lorsque la variable est égale à la moitié d'un nombre impair. Il nous semble que ces circonstances rendent à peu près impossible la déduction du développement (5) en partant directement des équations transcendantes (3) ou (4).

7. Supposons qu'on ait $a_{n-1} < a < a_n$ en sorte que

$$\varphi(a) > T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1},$$
$$\varphi(a) < T_1 + T_2 + \ldots + T_{n-1} + T_n.$$

Calculons la valeur approchée de

$$T_n = \frac{\Gamma(2n)}{(2n-1)(2a)^{2n-1}\Gamma(n)} e^{a^2}$$

en supposant a grand.

Il est visible que la quantité $\eta = a^2 - n$ reste toujours finie, elle peut à peine franchir les limites $-\frac{1}{6}$ et $-\frac{7}{6}$. En désignant donc par ε, ε', ε'', ε''' des quantités qui s'évanouissent avec $\frac{1}{n}$, on a:

$$\Gamma(2n) = (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{\frac{\pi}{n}} (1 + \varepsilon)$$

$$\Gamma(n) = n^n e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} (1 + \varepsilon')$$

$$a^{2n-1} n^{-n+\frac{1}{2}} = \left(1 + \frac{\eta}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}} = e^\eta (1 + \varepsilon'')$$

et

$$T_n = \frac{\sqrt{2n}}{2n-1} \times \frac{1+\varepsilon}{(1+\varepsilon')(1+\varepsilon'')} = \frac{1+\varepsilon'''}{a\sqrt{2}}.$$

Ainsi le développement (1) permet de renfermer $\varphi(a)$ entre deux limites dont la différence est approximativement $\frac{0.707}{a}$.

Soit $a = 4$, on voit que $a_{16} < a < a_{17}$ et nous trouvons

$$\varphi(4) > 1149\,400{,}605,$$

$$\varphi(4) < 1149\,400{,}782.$$

8. Nous ferons voir encore comment on peut pousser plus loin l'approximation et obtenir une valeur très approchée du terme complémentaire R_n.

Reprenons la formule:

$$R_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^n}\int_{a_n}^{a} x^{-2n} e^{x^2} dx = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}}\int_{a_n^2}^{a^2} x^{-n-\frac{1}{2}} e^x dx$$

ou

$$R_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1} n^{n+\frac{1}{2}}} e^n \int_{a_n^2-n}^{\eta} \frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} dx.$$

En posant

$$(11) \qquad A_n = \int_{a_n^2-n}^{0} \frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} dx$$

$$(12) \qquad B = \int_{0}^{\eta} \frac{e^x}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}} dx$$

nous aurons

$$(13) \qquad R_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1} n^{n+\frac{1}{2}}} e^n [A_n + B].$$

Il est visible que A_n est une simple constante numérique qui dépend seulement de l'entier n, et qu'on peut développer de la manière suivante:

$$A_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{n} + \frac{\alpha_2}{n^2} + \frac{\alpha_3}{n^3} + \dots \tag{14}$$

$$\alpha_0 = +\frac{1}{6},$$

$$\alpha_1 = -\frac{13}{1080},$$

$$\alpha_2 = -\frac{353}{90720},$$

$$\alpha_3 = +\frac{1423}{1088640}.$$

D'autre part, on voit aisément qu'on a

$$B = Q_0 + \frac{Q_1}{n} + \frac{Q_2}{n^2} + \frac{Q_3}{n^3} + \dots \tag{15}$$

Q_0, Q_1, Q_2, ... étant des polynômes en η qui s'évanouissent pour $\eta = 0$, Q_k du degré $2k + 1$ étant divisible par η^{k+1}. Ces polynômes sont faciles à calculer, et on trouve

$$\left\{\begin{aligned} Q_0 &= \eta, \\ Q_1 &= \eta^2\left(\frac{1}{6}\eta - \frac{1}{4}\right), \\ Q_2 &= \eta^3\left(\frac{1}{40}\eta^2 - \frac{7}{48}\eta + \frac{1}{8}\right), \\ Q_3 &= \eta^4\left(\frac{1}{336}\eta^3 - \frac{11}{288}\eta^2 + \frac{29}{240}\eta - \frac{5}{64}\right), \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right. \tag{16}$$

Ce développement de B est convergent sous la condition $|\eta| < n$ et comme on peut choisir n toujours de manière que $|\eta| \leqq \frac{1}{2}$ la convergence sera rapide et on peut évaluer facilement cette quantité avec toute approximation désirée.

Il est clair qu'en substituant les séries (14) et (15) dans la formule (13) on obtient un développement de R_n qu'on peut rapprocher de la formule (9). La seule différence est que le facteur $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ se trouve remplacé par $\frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^{n+1} n^{n+\frac{1}{2}}} e^n$, or d'après la série de STIRLING on a:

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2^{n+1}n^{n+\frac{1}{2}}} e^{n+\theta},$$

$$\theta = \left(\frac{2-1}{2}\right)\frac{B_1}{1.2n} - \left(\frac{2^3-1}{2^3}\right)\frac{B_2}{3.4n^3} + \left(\frac{2^5-1}{2^5}\right)\frac{B_3}{5.6n^5} - \ldots$$

en sorte qu'il est facile de passer de l'une des formules à l'autre.

Mais la forme (13) présente un grand avantage sur la forme (9), d'abord les polynômes Q sont plus simples et plus faciles à calculer que les polynômes P et ensuite nous savons maintenant que la divergence de la série $A_n + B$ provient uniquement de la partie A_n qui est indépendante de η.

9. Le moyen le plus simple qui permet de calculer A_n avec une approximation indéfinie, c'est de prendre $\eta = 0$ ou $a = \sqrt{n}$ dans les formules précédentes. Il vient

$$(17) \qquad \varphi(\sqrt{n}) = T_1 + T_2 + \ldots + T_n + A_n T_{n+1}.$$

Il faut calculer alors $\varphi(\sqrt{n})$ à l'aide de la série convergente

$$\varphi(a) = a + \frac{a^3}{1.3} + \frac{a^5}{1.2.5} + \ldots$$

Nous avons trouvé ainsi:

n	A_n
1	0,15231 80276 5
2	0,15987 27953 6
3	0,16227 85380 7.

D'autre part les quatres premiers termes de la série divergente (14) donnent les valeurs approchées suivantes (on a ajouté les corrections nécessaires)

0,15204 6	+ 0,00027 2
0,15983 88	+ 0,00003 40
0,16227 04	+ 0,00000 81.

On peut juger par là de l'approximation que l'on obtient pour de plus grandes valeurs de n. Dans le calcul de $\varphi(4)$ on a besoin de la constante A_{16}, et on trouve à une unité près du 8ème ordre:

$$\varphi(4) = 1149400{,}63458993.$$