SUR UNE MÉTHODE POUR OBTENIR LE DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE DE QUELQUES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

M. LERCH
à PRAGUE-VINOHRADY.

Je vais développer une méthode directe et très simple pour obtenir le développement en série trigonométrique de la fonction

$$\frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)},$$

où

$$\vartheta_0(u) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos 2nu\pi, \qquad q = e^{\tau\pi i}.$$

Ladite fonction admettant la période 1 et restant finie à l'intérieur de la bande indéfinie limitée par les deux parallèles à l'axe réel menées par les points $u = \pm\frac{\tau}{2}$, pourra s'exprimer par une série de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Phi_n(x) e^{2nu\pi i},$$

où l'on a posé

$$\Phi_n(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)} e^{-2nu\pi i} du. \tag{1}$$

Je considère d'abord l'intégrale

$$\Phi_0(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)}\,du \tag{2}$$

qui définit évidemment une fonction entière transcendante de la variable x.

D'après la formule

$$\vartheta_0(x + m + n\tau) = (-1)^n e^{-n\pi i(2x+n\tau)}\vartheta_0(x),$$

dans laquelle m, n représentent des nombres entiers, nous aurons

$$\Phi_0(x + m + n\tau) = (-1)^n e^{-n\pi i(2x+n\tau)}\,\Phi_n(x). \tag{3}$$

Or l'intégrale au second membre de la formule (1) s'évanouissant pour $x = 0$ toutes les fois que n est différent de zéro, il résulte de l'équation (3) que la fonction $\Phi_0(x)$ s'annule en posant

$$x = m + n\tau, \qquad \binom{m=0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots}{n = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3, \ldots}$$

de sorte qu'elle peut se mettre sous la forme

$$\Phi_0(x) = \frac{\vartheta_1(x)}{\sin \pi x}\,G(x), \tag{4}$$

où $G(x)$ désigne une fonction entière transcendante qui peut se réduire, bien entendu, à une constante, et où nous avons posé comme il est d'usage

$$\vartheta_1(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{4}(2n+1)^2}\sin(2n+1)u\pi.$$

L'équation (4) combinée avec la formule (3) et avec l'équation connue

$$\vartheta_1(x + m + n\tau) = (-1)^{m+n} e^{-n\pi i(2x+n\tau)}\vartheta_1(x),$$

nous donne la suivante

$$\frac{G(x + m + n\tau)}{\sin \pi(x + m + n\tau)} = \frac{(-1)^m}{\vartheta_1(x)}\,\Phi_n(x), \tag{5}$$

dont nous allons conclure que $G(x)$ est une constante.

Supposons à cet effet que x se trouve représenté par un point quelconque appartenant au *parallélogramme des périodes* dont les sommets ont pour affixes les quatre quantités $\pm\frac{1}{2}\pm\frac{\tau}{2}$, de sorte que la fonction $\vartheta_1(x)$ ne s'annule qu'au point $x = 0$. En supposant $n \gtrless 0$ ce point sera de même un zéro de la fonction $\Phi_n(x)$, et on aura d'après un théorème bien connu de M. DARBOUX[1], la formule

$$\Phi_n(x) = \lambda x \Phi'_n(x'), \tag{6}$$

où $|\lambda| < 1$, et où x' appartient aussi au parallélogramme des périodes. Comme on a

$$\Phi'_n(x') = \int_0^1 e^{-2nu\pi i}\frac{\vartheta'_0(x'+u)}{\vartheta_0(u)}du,$$

il existe une quantité finie M telle qu'on ait, pour toutes les valeurs de x en question et pour toutes les valeurs de n différentes de zéro, les deux inégalités

$$|\Phi'_n(x')| < M^{\frac{1}{2}},$$

$$\left|\frac{x}{\vartheta_1(x)}\right| < M^{\frac{1}{2}},$$

dont on conclut, au moyen de la formule (6), l'inégalité suivante

$$\left|\frac{\Phi_n(x)}{\vartheta_1(x)}\right| < M. \tag{7}$$

Or chaque quantité z, dont la partie imaginaire se trouve en dehors d'un certain intervalle fini $(-\beta i \ldots \beta i)$, pouvant se mettre sous la forme $x + m + n\tau$, où $n \gtrless 0$, on obtient des formules (5) et (7) l'inégalité

$$|G(z)| < M|\sin \pi z| \tag{8}$$

qui est satisfaite pour chacune des dites valeurs de z. Ensuite, la fonction $\Phi_0(z)$ admettant la période 1, on aura de même $G(z+1) = G(z)$, et par conséquent on pourra exprimer cette dernière fonction par une série toujours convergente de la forme

$$G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi^{2n}, \qquad \xi = e^{z\pi i}.$$

---

[1] Ce théorème peut être ici remplacé par un semblable dû à M. MANSION.

Cela étant l'inégalité (8) se décompose en les deux suivantes

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi^{2n+1}\right| < M \quad \text{pour} \quad |\xi| < e^{-\beta},$$

$$\left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \xi^{2n-1}\right| < M \quad \text{pour} \quad |\xi| > e^{\beta},$$

et celles-ci entraînent les suivantes

$$|A_{-n}| < M |\xi|^{2n-1} \qquad \text{pour} \quad |\xi| < e^{-\beta},$$

et

$$|A_n| < M |\xi|^{-2n+1} \quad \text{pour} \quad |\xi| > e^{\beta},$$

qui exigent que l'on ait $A_n = 0$ sauf pour $n = 0$. Il faut donc que l'on ait $G(z) = A_0$ et l'équation (4) deviendra, par conséquent,

$$\text{(I)} \qquad \Phi_0(x) = \int_0^1 \frac{\vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)} du = \frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0} \frac{\vartheta_1(x)}{\sin \pi x},$$

puisqu'on obtient sans peine

$$A_0 = \frac{\pi}{\vartheta_1'} = \frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0}.$$

Ensuite l'équation (5) fait voir que

$$\text{(II)} \qquad \Phi_n(x) = \frac{1}{\vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0} \frac{\vartheta_1(x)}{\sin \pi(x+n\tau)},$$

de sorte qu'on aura enfin

$$\text{(III)} \qquad \vartheta_2\vartheta_3\vartheta_0 \frac{\vartheta_0(u+x)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2nu\pi i}}{\sin \pi(x+n\tau)},$$

formule dont on conclut la suivante, après une transformation du second membre,

$$\text{(III')} \qquad \frac{\vartheta_1'\vartheta_0(u+x)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} = \frac{\pi}{\sin \pi x} + 4\pi \sum q^{mn} \sin \pi(2nu + mx),$$

les indices sommatoires étant $m = 1, 3, 5, \ldots$; $n = 1, 2, 3, \ldots$. En changeant, dans la formule (III), x en $x + \frac{\tau}{2}$ ou en $x + \frac{1}{2}$ on obtient après des transformations convenables d'autres formules analogues à (III') et c'est de ces développements que M. HERMITE avait tiré quelques formules intéressantes de la théorie des fonctions elliptiques.[1] Je me borne seulement à remarquer que la formule (III') conduit à la suivante

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0(u+x)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} dx = 2 \lg(1 + \sqrt{2}) + 4\sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(q^n) \cos 2nu\pi,$$

où nous avons posé, pour abréger,

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{1 - z^2}{1 + z^4} dz = \frac{\sqrt{2}}{4} \lg \frac{(1 + ze^{\frac{\pi i}{4}})(1 + ze^{-\frac{\pi i}{4}})}{(1 - ze^{\frac{\pi i}{4}})(1 - ze^{-\frac{\pi i}{4}})}.$$

Ce résultat peut s'exprimer plus simplement par la formule

$$\text{(IV)} \qquad \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} \frac{\vartheta_1' \vartheta_0(x+u)}{\vartheta_0(u)\vartheta_1(x)} dx = 2 \lg \Phi(u, q),$$

où l'on a posé

$$\text{(IV')} \qquad \Phi(u, q) = (1 + \sqrt{2}) \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 + q^n e^{\frac{\pi i}{4}}}{1 - q^n e^{\frac{\pi i}{4}}} \cdot \frac{1 + q^n e^{-\frac{\pi i}{4}}}{1 - q^n e^{-\frac{\pi i}{4}}} \right)^{\cos 2nu\pi}.$$

[1] Ces formules se trouvent dans un mémoire de M. LIPSCHITZ (*Bemerkungen über eine Gattung vielfacher Integrale;* Journal für Mathematik, t. **101**, p. 223) dont la seconde partie est consacrée aux résultats de M. HERMITE.