ÜBER GEWISSE EBENE CONFIGURATIONEN

VON

J. DE VRIES
in KAMPEN (Holland).

Eine ebene Figur, welche aus p Punkten und g Geraden derart zusammengesetzt ist, dass jeder Punkt mit γ Geraden und jede Gerade mit π Punkten incident ist, heisst bekanntlich eine Configuration; ich bezeichne sie mit dem Symbol (p_γ, g_π) falls γ und π verschieden sind: für $\gamma = \pi$ hat Herr REYE die Bezeichnung p_π eingeführt.[1]

Die Cf. 8_3, 9_3, 10_3 sind von Herrn KANTOR,[2] die Cf. 11_3 von Herrn MARTINETTI[3] eingehend untersucht worden, während Herr SCHÖNFLIES[4] die regelmässigen Cf. p_3 einer Betrachtung unterworfen hat. In der folgenden Arbeit sind die Eigenschaften von einigen Cf. (p_4, g_3) abgeleitet und gewisse Cf. aufgestellt worden, welche sich diesen ungezwungen anschliessen.[5]

1. Die kleinsten Zahlen, für welche eine Cf. (p_4, g_3) möglich ist, sind $p = 9$, $g = 12$. Werden aus einer $(9_4, 12_3)$ ein Punkt und die

[1] Acta Mathematica, Bd. **1**. Das von mir benutzte Symbol schliesst sich der von Herrn REYE vorgeschlagenen Bezeichnung einer räumlichen Cf. an.

[2] Sitzungsberichte d. Wiener Akademie, Bd. **84**, S. 915 und 1291.

[3] Annali di Matematica, Serie II, Bd. **15**, S. 1.

[4] Göttinger Nachrichten 1887, S. 410 und Math. Annalen Bd. **31**, S. 43.

[5] Der grössere Theil jener Eigenschaften ist enthalten in einer Arbeit *Over vlakke configuraties,* welche in den Sitz. Ber. d. Kön. Akad. d. Wiss. in Amsterdam veröffentlicht wurde (Serie III, Bd. **5**).

vier mit ihm incidenten Geraden fortgelassen, so bilden die übrigen Punkte und Geraden offenbar eine Cf. 8_3, welche, wie Herr MÖBIUS[1] zuerst gezeigt hat, niemals reell sein kann. Die ebenfalls imaginäre Cf. $(9_4, 12_3)$ wird demnach von zwei einander ein- und umbeschriebenen Vierecken und ihren in einem Punkte zusammenlaufenden vier Diagonalen gebildet.

2. Jeder Punkt einer Cf. $(12_4, 16_3)$ ist von drei Punkten getrennt;[2] ich betrachte nun zunächst diejenigen $(12_4, 16_3)$ in denen jeder Punkt mit den von ihm getrennten Punkten eine involutorische Gruppe bildet, und bezeichne mit 1234, $1'2'3'4'$, $1''2''3''4''$ die drei Quadrupel, in welche sich die Cf.-punkte alsdann anordnen lassen. Es werde ferner die Bezeichnung so gewählt, dass die Cf.-geraden $1'1''$, $2'2''$, $3'3''$, $4'4''$ nach 1 zielen und die Geraden $1'2''$, $1'3''$, $1'4''$ bezüglich die Punkte $2, 3, 4$ enthalten. Die vollständige Untersuchung ergibt nun, dass die Vertheilung der 12 Cf.-punkte über die 16 Cf.-geraden durch jede der nachstehenden Tafeln dargestellt werden kann.

A.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'1''$	$X \equiv 32'4''$	$XIV \equiv 42'3''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'4''$	$XI \equiv 33'1''$	$XV \equiv 43'2''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'3''$	$XII \equiv 34'2''$	$XVI \equiv 44'1''$.

B.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'1''$	$X \equiv 32'4''$	$XIV \equiv 42'3''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'4''$	$XI \equiv 33'2''$	$XV \equiv 43'1''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'3''$	$XII \equiv 34'1''$	$XVI \equiv 44'2''$.

---

[1] Ges. Werke, Bd. **1**, S. 445.

[2] Herr SCHÖNFLIES nennt 2 Punkte (Gerade) getrennt, wenn sie nicht mit einer Cf.-geraden (einem Cf.-punkte) incident sind. a. a. O.

C.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'3''$	$X \equiv 32'4''$	$XIV \equiv 42'1''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'4''$	$XI \equiv 33'1''$	$XV \equiv 43'2''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'1''$	$XII \equiv 34'2''$	$XVI \equiv 44'3''$.

D.

$I \equiv 11'1''$	$V \equiv 21'2''$	$IX \equiv 31'3''$	$XIII \equiv 41'4''$
$II \equiv 12'2''$	$VI \equiv 22'4''$	$X \equiv 32'1''$	$XIV \equiv 42'3''$
$III \equiv 13'3''$	$VII \equiv 23'1''$	$XI \equiv 33'4''$	$XV \equiv 43'2''$
$IV \equiv 14'4''$	$VIII \equiv 24'3''$	$XII \equiv 34'2''$	$XVI \equiv 44'1''$.

3. Die Cf. *A* ist dadurch gekennzeichnet, dass je zwei getrennte Punkte Gegenecken in zwei von Cf.-geraden gebildeten vollständigen Vierseiten sind. Die folgende Tabelle enthält die 12 Geradenquadrupel, welche den verschiedenen Vierseiten angehören.

I	*II*	*V*	*VI*	*V*	*VII*	*XIII*	*XV*
III	*IV*	*VII*	*VIII*	*VI*	*VIII*	*XIV*	*XVI*
I	*III*	*IX*	*XI*	*V*	*VIII*	*IX*	*XII*
II	*IV*	*X*	*XII*	*VI*	*VII*	*X*	*XI*
I	*IV*	*XIII*	*XVI*	*IX*	*X*	*XIII*	*XIV*
II	*III*	*XIV*	*XV*	*XI*	*XII*	*XV*	*XVI*.

In der Cf. *B* zeigen die Paare getrennter Punkte ungleiches Verhalten. Während z. B. 1 und 2 Gegenecken in zwei vollständigen Vierseiten sind, bilden die mit 1 und 3 incidenten Geraden ein Achtseit, dessen Seiten abwechselnd durch 1 und 3 laufen; ich bezeichne diese Figur als STEINERsches Achtseit mit den Hauptecken 1, 3. Die von den Cf.-

geraden gebildeten vollständigen Vierseite und STEINERschen Achtseite sind in der nachstehenden Tabelle enthalten.

I	*II*	*V*	*VI*	
III	*IV*	*VII*	*VIII*	Vierseite.
IX	*X*	*XIII*	*XIV*	
XI	*XII*	*XV*	*XVI*	

I	*IX*	*III*	*XI*	*II*	*X*	*IV*	*XII*	
I	*XIII*	*IV*	*XV*	*II*	*XIV*	*III*	*XV*	
I	*III*	*IX*	*XI*	*V*	*VII*	*XIII*	*XV*	
I	*IV*	*XIII*	*XVI*	*V*	*VIII*	*IX*	*XII*	
I	*III*	*XV*	*XIV*	*VI*	*VIII*	*XII*	*IX*	
I	*IV*	*XII*	*X*	*VI*	*VII*	*XV*	*XIII*	Achtseite.
II	*III*	*XIV*	*XV*	*VI*	*VII*	*X*	*XI*	
II	*IV*	*X*	*XII*	*VI*	*VIII*	*XIV*	*XVI*	
II	*III*	*XI*	*IX*	*V*	*VIII*	*XVI*	*XIV*	
II	*IV*	*XVI*	*XIII*	*V*	*VII*	*XI*	*X*	
V	*IX*	*VIII*	*XII*	*VI*	*X*	*VII*	*XI*	
V	*XIII*	*VII*	*XV*	*VI*	*XIV*	*VIII*	*XVI.*	

Ein weiterer Unterschied zwischen A und B ergibt sich aus der Betrachtung der Restfigur einer Cf.-geraden, d. h. der Figur, welche die von einer bestimmten Cf.-geraden getrennten Geraden enthält.[1]

In A besteht die Restfigur der I aus zwei Tripeln gegenseitig getrennter Geraden, nämlich VII, XII, XIV und $VIII, X, XV$, welche mit den Punkten $22'2''33'3''44'4''$ eine Cf. $(9_2, 6_3)$ bilden. Indem jedes Tripel sämmtliche neun Punkte enthält, können diese als Basis eines

[1] KANTOR, a. a. O., zweite Abh.

C_3-Büschels betrachtet werden. Die Restfiguren der übrigen Cf.-geraden sind Cf. $(9_2, 6_3)A$ von derselben Art.

In B können die von einer willkürlichen Geraden getrennten Geraden nicht in zwei Tripel gegenseitig getrennter Geraden angeordnet werden. Die Cf. $(9_2, 6_3)B$, welche z. B. die Punkte $22'2''33'3''44'4''$ mit den von I getrennten Geraden $VII, VIII, X, XI, XIV, XVI$ bilden, besteht aus zwei Dreiecken $33'4''$ und $44'3''$, deren Seitenpaare sich in drei nicht allineirten Punkten $22'2''$ schneiden.

Die Untersuchung der von den Tabellen C und D dargestellten Cf. ergibt, dass sie von der Cf. B nicht verschieden sind.

»Es gibt nur zwei Cf. $(12_4, 16_3)$, deren Punkte drei Quadrupel bilden, in welchen jeder Punkt von den übrigen getrennt ist.»

Ausser den beiden hier auftretenden Cf. $(9_2, 6_3)$ gibt es keine mehr; man zeigt diess am Einfachsten, wenn man ausgeht von der einzigen $(6_2, 4_3)$, dem vollständigen Vierseite.

4. Auf der C_3, welche durch die Ecken der beiden zur $(12_4, 16_3)A$ gehörigen vollständigen Vierseite $I\,II\,V\,VI$ und $II\,III\,XIV\,XV$ bestimmt ist, sind 12, $1'2'$, $1''2''$, 14, $2'3'$, $2''3''$ sechs Paare correspondirender Punkte. Indem die correspondirenden Punkte $1'3'$ aus 1 in die correspondirenden Punkte $1''3''$ projicirt werden, bilden 1 und $3 \equiv (IX, XI)$ ebenfalls ein correspondirendes Paar. Ebenso ergibt sich, dass C_3 die Punkte

$$4' \equiv (VIII, XVI) \quad \text{und} \quad 4'' \equiv (VII, XIII)$$

enthält, welche bezüglich mit $2'$ und $2''$ correspondirende Paare bilden.

»Durch jede $(12_4, 16_3)A$ lässt sich eine zweizügige C_3 legen, auf welcher die 3 Quadrupel getrennter Punkte 3 Punktquadrupel mit allineirten Tangentialpunkten sind, die 16 Geraden somit eine gemeinschaftliche Begleiterin haben.»

Dem vollständigen Vierseite $I\,II\,V\,VI$ und dem Dreiecke $33'3''$ der $(12_4, 16_3)B$ kann man eine C_3 umschreiben, auf welcher 12, $1'2'$, $1''2''$ drei Paare correspondirender Punkte sind, deren Tangentialpunkten (12), $(1'2')$, $(1''2'')$ in einer Geraden liegen. Weil ein correspondirendes Punktepaar aus jedem Punkte der C_3 in ein zweites Paar projicirt wird, und 3 als Projection von $1'$ aus $3''$ und als Projection von $2''$ aus $3'$ betrachtet werden kann, enthält C_3 auch den Punkt 4, welcher den Geraden $3''2'$, $3'1''$ gemein ist, und daher mit 3 ein Paar bildet. Die gleiche Betrachtung lehrt, dass $4' \equiv (42'', 31'')$ und $3' \equiv (41'', 32'')$, $4'' \equiv (41', 32')$ und $3'' \equiv (42', 31')$ zwei correspondirende Paare sind. Die den letzten drei Paaren entsprechenden Tangentialpunkte (34), $(3'4')$, $(3''4'')$ sind die Gegenecken der Tangentialpunkte (12), $(1'2')$, $(1''2'')$ in einem der C_3 eingeschriebenen vollständigen Vierseite.

»Jeder $(12_4, 16_3)B$ kann man eine C_3 umschreiben, auf welcher die 12 Punkte 6 correspondirende Paare desselben Systems bilden, deren zweite Tangentialpunkte allineirt sind.»

Sechs Punktquadrupel einer zweizügigen C_3, deren Tangentialpunkte die Ecken eines vollständigen Vierseits sind, bilden eine Cf. $(24_8, 64_3)$, welche die vier Cf. $(12_4, 16_3)A$ enthält, deren Geraden die Seiten des Vierseits als Begleiterinnen entsprechen.

Es kann leicht gezeigt werden, dass jene Cf. acht Cf. $(12_4, 16_3)B$ enthält.

5. In der folgenden Tafel werden die beiden $(12_4, 16_3)$ in Bezug auf einige ihrer Eigenschaften verglichen.

A.	*B.*
1. Die Cf. wird gebildet von drei Punktquadrupeln einer zweizügigen C_3; ihre Geraden haben eine gemeinschaftliche Begleiterin.	1. Die Cf. wird gebildet von sechs correspondirenden Paaren einer C_3; die sechs Tangentialpunkte sind Ecken eines vollständigen Vierseits, die Cf.-geraden haben somit eine gemeinschaftliche zweite Begleiterin.
2. Die Cf. ist unzweideutig bestimmt durch ein vollständiges Vierseit und ein Dreieck, dessen Seiten mit drei allineirten Ecken des Vierseits incident sind.	2. Die Cf. ist bestimmt durch ein vollständiges Vierseit und ein Dreieck, dessen Seiten mit drei nicht allineirten Ecken incident sind.
3. Jeder Punkt ist als Ecke sechs vollständigen Vierseiten gemein.	3. Jeder Punkt ist Ecke zweier vollständiger Vierseite und Hauptecke zweier STEINERscher Achtseite.

4. Jede Gerade ist drei vollständigen Vierseiten gemeinschaftlich.	4. Jede Gerade gehört einem vollständigen Vierseite und sechs STEINERschen Achtseiten an.
5. Die Cf. enthält zwölf vollständige Vierseite.	5. Die Cf. enthält vier vollständige Vierseite und zwölf STEINERsche Achtseite.
6. Die Restfigur jeder Cf.-geraden ist eine $(9_2, 6_3)A$.	6. Die Restfigur jeder Cf.-geraden ist eine $(9_2, 6_3)B$.
7. Greift man 6 Gerade heraus, welche einer $(9_2, 6_3)A$ angehören, so sind die übrigen 3 Cf.-punkte allineirt.	7. Entfernt man 6 Gerade, welche einer $(9_2, 6_3)A$ angehören, so sind die übrigen 3 Cf.-punkte Ecken eines von Cf.-geraden gebildeten Dreiecks.
8. Die Cf. enthält acht Quadrupel gegenseitig getrennter Geraden; jede Gerade ist zwei Quadrupeln gemeinschaftlich.	8. Die Cf. enthält keine Quadrupel gegenseitig getrennter Geraden.

6. Wird aus einer $(12_4, 16_3)A$ ein Quadrupel gegenseitig getrennter Geraden fortgelassen, dann bilden die übrigen zwölf Geraden mit den zwölf Cf.-punkten eine regelmässige 12_3. Die Entfernung der Geraden IV, VI, IX, XV ergibt zum Beispiel die durch das nachfolgende Schema dargestellte Cf.

$1\ 1'\ 1''$	$2\ 1'\ 2''$	$3\ 2'\ 4''$	$4\ 1'\ 4''$
$1\ 2'\ 2''$	$2\ 3'\ 4''$	$3\ 3'\ 1''$	$4\ 2'\ 3''$
$1\ 3'\ 3''$	$2\ 4'\ 3''$	$3\ 4'\ 2''$	$4\ 4'\ 1''$

Jeder Punkt dieser 12_3 kommt in 3 Cf.-dreiecken vor; die Cf. besteht somit entweder aus einem sich selbst ein- und umbeschriebenen Polygone oder aus einem Cyklus von Polygonen, deren jedes dem folgenden, deren letztes dem ersten eingeschrieben ist.[1] Die nähere Betrachtung der obigen Tabelle lehrt, dass letzteres hier der Fall ist; die Cf. wird gebildet von den beiden Sechsecken $1\,1'4''3\,4'3''$ und $1''4\,2'2''2\,3'$, welche ein-

[1] SCHÖNFLIES, Math. Ann. a. a. O., § 4.

ander so eingeschrieben sind, dass je zwei auf einander folgende Ecken jedes von ihnen auf zwei einander folgenden Seiten des anderen liegen.

Die Restfigur jedes Punktes dieser 12_3 besteht aus einem Tripel und einem Paare gegenseitig getrennter Punkte, enthält also 6 Cf.-gerade; die Restfigur jeder Geraden kann betrachtet werden als ein Sechsseit, aus welchem eine Seite entfernt ist.

7. Bei weiterer Betrachtung der Cf. $(12_4, 16_3)A$ ergibt sich eine Cf. $(15_4, 20_3)$, deren Eigenschaften ich hier einschalten werde. Ihre Punkte bezeichne ich durch die Combinationen *ik*, ihre Geraden durch die Combinationen *ikl* der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6; es sind alsdann die Punkte *ik*, *kl*, *li* der Geraden *ikl* incident. Die Existenz einer solchen Cf. ergibt sich auf folgende Weise. Werden die Geraden 123, 124, 125, 126 nebst den ihnen incidenten Punkten 13, 23, ... willkürlich angenommen, dann sind die 6 Schnittpunkte der Geradenpaare $1ik$, $2ik$ die Ecken eines vollständigen Vierseits, dessen Seiten die Perspectivitätsaxen der 4 Paare von Dreiecken bilden, für welche der Punkt 12 das gemeinschaftliche Perspectivitätszentrum ist.

»Zwei einem Vierstrahle eingeschriebene vollständige Vierecke bestimmen eine $(15_4, 20_3)$, in welcher die Restfigur jedes Punktes ein vollständiges Vierseit ist.»

Die Gerade 123 ist mit den Geraden $12i$, $23i$, $31i$, $(i = 4, 5, 6)$ verbunden,[1] die Gerade 456 mit den Geraden $45k, 56k, 64k, (k = 1, 2, 3)$; die 20 Geraden der Cf. bilden somit 10 Paare »associirter» Geraden: jede Gerade eines solchen Paares stellt mit den neun mit ihr verbundenen Geraden die Restfigur der zweiten Geraden dar.

»Die betrachtete $(15_4, 20_3)$ kann auf zehn Arten aus zwei Tripeln vollständiger Vierseite zusammengesetzt werden; die Vierseite jedes Tripels haben drei allineirte Ecken gemein, die übrigen neun Ecken gehören beiden Tripeln an.»

Die Cf. ist durch eines dieser Tripel vollständig bestimmt. Werden nämlich die Geraden 123, $12i$, $23i$, $31i$, $(i = 4, 5, 6)$ willkürlich angenommen, dann ist 123 die gemeinschaftliche Perspectivitätsaxe der drei

---

[1] Zwei Gerade heissen verbunden, wenn sie sich in einem Cf.-punkt schneiden. (SCHÖNFLIES, a. a. O.)

von den übrigen neun Geraden gebildeten Dreiecke. Bezeichnet man ihre Perspectivitätszentren durch 45, 56, 64, dann ist 12 das Perspectivitätszentrum der Dreiecke (14, 15, 16) und (24, 25, 26), wesshalb die Punkte 45, 56, 64 als Schnitte homologer Seiten allineirt sind.

8. In der Cf. $(12_4, 16_3)A$ bestimmt somit die Gerade I mit den mit ihr verbundenen Geraden $II\,V\,VI$, $III\,IX\,XI$, $IV\,XIII\,XVI$ eine $(15_4, 20_3)$ der betrachteten Art, welche ausser diesen 10 Cf.-geraden 9 Cf.-diagonalen enthält; die 20ste Gerade ist mit drei Schnittpunkten von je drei Cf.-diagonalen incident. Werden diese neuen Punkte mit $6'$, 8, $7''$ bezeichnet, dann ergibt sich für die $(15_4, 20_3)$ nachstehende Tafel.

1 1′ 1″	8 6′ 7″
1 2′ 2″	8 3 4
1 3′ 3″	8 3′ 4′
1 4′ 4″	8 3″ 4″
2 1′ 2″	6′ 2 3
3 1′ 3″	6′ 2′ 3′
4 1′ 4″	6′ 2″ 3″
2 2′ 1″	7″ 2 4
3 3′ 1″	7″ 2′ 4′
4 4′ 1″	7″ 2″ 4″

Die zehn Geraden der zweiten Vertikalreihe bilden mit der Restfigur $(9_2, 6_2)A$ der Geraden 1 1′1″ in Bezug auf die $(12_4, 16_3)A$ eine zweite Cf. dieser Art, welche durch die folgende Tabelle dargestellt wird.

8 6′ 7″	2 6′ 3	2′ 6′ 3′	2″ 6′ 3″
8 4 3	2 4 7″	2′ 4 3″	2″ 4 3′
8 4′ 3′	2 4′ 3″	2′ 4′ 7″	2″ 4′ 3
8 4″ 3″	2 4″ 3′	2′ 4″ 3	2″ 4″ 7″

Auf der zweizügigen C_3, welche dieser Cf. umschrieben werden kann, sind offenbar $822'2''$, $6'44'4''$, $7''33'3''$ drei Punktquadrupel.

»Die sechszehn in einer $(12_4, 16_3)A$ enthaltenen $(9_2, 6_3)A$ bestimmen ebensoviele neue Cf. $(12_4, 16_3)A$, deren jede von der ursprünglichen Cf. 6 Gerade und 9 Diagonalen absorbirt; die sechszehnte Gerade der neuen Cf. ist derjenigen Geraden der alten Cf. in einer $(15_4, 20_3)$ associirt, für welche die betreffende $(9_2, 6_3)A$ die Restfigur bildet.»

9. Die vollständige Untersuchung der Cf. $(12_4, 16_3)A$ in Bezug auf ihre sämmtlichen Restfiguren ergibt, dass die 18 Diagonalen der Cf. zu dreien nach 12 Punkten zielen, welche mit 16 Geraden incident sind, und mit diesen eine neue $(12_4, 16_3)A$ darstellen, die ich als die »associirte» Cf. bezeichne.

Nachstehende Tabelle enthält die Resultate dieser Untersuchung und die Bezeichnung der Schnittpunkte.

Geradentripel.			Schnittpunkte.
1 2	$3'$ $4'$	$1''$ $2''$	5
1 2	$1'$ $2'$	$3''$ $4''$	6
3 4	$1'$ $2'$	$1''$ $2''$	7
3 4	$3'$ $4'$	$3''$ $4''$	8
2 3	$1'$ $4'$	$1''$ $4''$	$5'$
2 3	$2'$ $3'$	$2''$ $3''$	$6'$
1 4	$2'$ $3'$	$1''$ $4''$	$7'$
1 4	$1'$ $4'$	$2''$ $3''$	$8'$
1 3	$1'$ $3'$	$2''$ $4''$	$5''$
1 3	$2'$ $4'$	$1''$ $3''$	$6''$
2 4	$2'$ $4'$	$2''$ $4''$	$7''$
2 4	$1'$ $3'$	$1''$ $3''$	$8''$

Geradenpaare, welche in einer $(15_4, 20_3)$ associirt sind:

1 1′ 1″	8 6′ 7″
1 2′ 2″	8 5′ 8″
1 3′ 3″	7 5′ 7″
1 4′ 4″	7 6′ 8″
2 1′ 2″	8 7′ 6″
2 2′ 1″	8 8′ 5″
2 3′ 4″	7 8′ 6″
2 4′ 3″	7 7′ 5″
3 1′ 3″	5 7′ 7″
3 2′ 4″	5 8′ 8″
3 3′ 1″	6 8′ 7″
3 4′ 2″	6 7′ 8″
4 1′ 4″	5 6′ 6″
4 2′ 3″	5 5′ 5″
4 3′ 2″	6 5′ 6″
4 4′ 1″	6 6′ 5″

Aus dieser Übersicht erhellt, dass die associirten von vier durch einen Cf.-punkt laufenden Geraden der einen Cf. in der associirten Cf. ein vollständiges Vierseit bilden, welches zugleich die Restfigur jenes Punktes in einer $(15_4, 20_3)$ ist, der ausser jenen 8 Geraden noch 12 Diagonalen der ersten $(12_4, 16_3)$ angehören.

Beispiel.

	1′ 2′ 7	1″ 2″ 7	
1 1′ 1″	1′ 3′ 8″	1″ 3″ 8″	8 6′ 7″
1 2′ 2″	1′ 4′ 5′	1″ 4″ 5′	8 5′ 8″
1 3′ 3″	2′ 3′ 6′	2″ 3″ 6′	7 5′ 7″
1 4′ 4″	2′ 4′ 7″	2″ 4″ 7″	7 6′ 8″.
	3′ 4′ 8	3″ 4″ 8	

Die Diagonale 12 des vollständigen Vierseits $121'2'1''2''$ wird von den Diagonalen $1'2'$, $1''2''$ beziehungsweise in 6, 5 geschnitten: 1, 2, 5, 6 sind daher harmonische Punkte.

»Die Punkte zweier associirter $(12_4, 16_3)$ trennen sich harmonisch auf den achtzehn ihnen gemeinschaftlichen Diagonalen.»

10. Die achtzehn von den 24 Punkten der beiden Cf. $(12_4, 16_3)$ gebildeten harmonischen Gruppen sind in der nachstehenden Tafel enthalten.

1 2 5 6	$1'$ $2'$ 6 7	$1''$ $2''$ 5 7
3 4 7 8	$3'$ $4'$ 5 8	$3''$ $4''$ 6 8
1 3 $5''$ $6''$	$1'$ $3'$ $5''$ $8''$	$1''$ $3''$ $6''$ $8''$
2 4 $7''$ $8''$	$2'$ $4'$ $6''$ $7''$	$2''$ $4''$ $5''$ $7''$
1 4 $7'$ $8'$	$1'$ $4'$ $5'$ $8'$	$1''$ $4''$ $5'$ $7'$
2 3 $5'$ $6'$	$2'$ $3'$ $6'$ $7'$	$2''$ $3''$ $6'$ $8'$

»Die Punkte zweier associirter $(12_4, 16_3)$ bilden mit ihren 18 gemeinschaftlichen Diagonalen eine Cf. $(24_3, 18_4)$, in welcher je vier Punkte einer Geraden eine harmonische Gruppe darstellen.»

Diese »harmonische» Cf. ist aus 2 Tripeln vollständiger Vierecke derart zusammengesetzt, dass je 2 dieser Figuren, welche nicht demselben Tripel angehören, eine gemeinschaftliche Nebenecke haben. Den 9 Nebenecken entsprechend lassen sich die Cf.-geraden demnach in 9 Paare associirter Geraden anordnen.

Aus der Tabelle ist weiter ersichtlich, dass die 8 Geraden, mit welchen eine Cf.-gerade verbunden ist, auch die ihr associirte Gerade in Cf.-punkten schneiden, während die übrigen 8 eine aus 2 Quadrupeln gegenseitig getrennter Geraden gebildete $(16_2, 8_4)$ darstellen, deren Punkte somit die Basis eines C_4-Büschels sind. Jedes associirte Geradenpaar kommt also in 2 Sextupeln gegenseitig getrennter Geraden vor; die Entfernung eines solchen Sextupels liefert eine Cf. $(24_2, 12_4)$.

11. Jedes der in der zweiten Tabelle des § 9 aufgezählten Geradenpaare enthält ein Sextupel gegenseitig getrennter Punkte der harmonischen Cf.; die Ausscheidung eines solchen Sextupels liefert offenbar eine Cf. 18_3.

Werden beispielsweise aus der Tabelle des § 10 die Punkte $11'1''86'7''$ fortgelassen, so ergibt sich die Cf.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
2 & 5 & 6 & 2' & 6 & 7 & 2'' & 5 & 7 \\
3 & 4 & 7 & 3' & 4' & 5 & 3'' & 4'' & 6 \\
3 & 5'' & 6'' & 3' & 5'' & 8'' & 3'' & 6'' & 8'' \\
2 & 4 & 8'' & 2' & 4' & 6'' & 2'' & 4'' & 5'' \\
4 & 7' & 8' & 4' & 5' & 8' & 4'' & 5' & 7' \\
2 & 3 & 5' & 2' & 3' & 7' & 2'' & 3'' & 8',
\end{array}$$

welche noch 6 Sextupel getrennter Punkte enthält, entsprechend den 6 associirten Geradenpaaren der beiden $(9_2, 6_3)$, welche in den beiden associirten $(12_4, 16_3)$ die Restfiguren der Geraden $11'1''$ und $86'7''$ sind.

»Die 18_3 besteht aus zwei Tripeln von Dreiecken ($234, 2'3'4', 2''3''4''$ und $567, 5'7'8', 5''6''8''$) in solcher Lage, dass jede Seite und ihre Gegenecke eines dem ersten Tripel entnommenen Dreiecks einer Ecke und deren Gegenseite eines Dreiecks des zweiten Tripels incident sind.»

Werden den Geraden der 18_3 die 3 associirten Geradenpaare

$$\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 3' & 4'' & 7 & 8' & 6'' \\
3 & 4' & 2'' & 6 & 7' & 8'' \\
4 & 2' & 3'' & 5 & 5' & 5''
\end{array}$$

zugesellt, so verschwinden 3 getrennte Punktsextupel und es entsteht eine Cf. $(18_4, 24_3)$, welche in Bezug auf ihre Punkte, nicht mit Rücksicht auf ihre Geraden, regelmässig ist, indem jeder Cf.-punkt in 7 Cf.-dreiecken vorkommt. (Beispielsweise gehört der Punkt 2 den Dreiecken $234, 23'5, 23'8'', 24''6, 24''5', 255', 268''$ an.)

Die letzten 3 Punktsextupel werden aufgehoben durch Hinzutreten der übrigen Geraden der obengenannten Restfiguren, also der Geradenpaare

$$\begin{array}{ccc|ccc}
2 & 4' & 3'' & 7 & 7' & 5'' \\
3 & 2' & 4'' & 5 & 8' & 8'' \\
4 & 3' & 2'' & 6 & 5' & 6'';
\end{array}$$

in der nunmehr entstandenen Cf. $(18_5, 30_3)$, welche in Bezug auf jeden ihrer Punkte gleichartig zusammengesetzt ist, erscheint jeder Punkt als Ecke von 15 Cf.-dreiecken. (Für 2 kommen z. B. zu den oben erwähnten noch die Dreiecke $23'4'$, $23''4''$, $24'5$, $24'5'$, $23''6$, $23''8''$, $258''$, $25'6$.)

12. Einer bekannten Eigenschaft der C_3 zufolge bilden die Nebenecken des Punktquadrupels 1234 mit dem Tangentialpunkte des Quadrupels ein neues Punktquadrupel.[1] Demnach gehören die 3 Tangentialpunkte und die 9 Nebenecken einer $(12_4, 16_3)A$ einer Cf. der nämlichen Art an. Indem diese Nebenecken auch als Nebenecken der Quadrupel der associirten Cf. auftreten, sind sie die Schnittpunkte der Curven 3ter Ordnung, welche den beiden Cf. umbeschrieben werden können, während sie mit den Tangentialpunkten der associirten Cf. wiederum eine $(12_4, 16_3)A$ bilden.

Mit Hülfe der nachstehenden Bezeichnung:

$$(1256, 3478) \equiv 9$$
$$(135''6'', 247''8'') \equiv 10$$
$$(147'8', 235'6') \equiv 11$$
$$(1'2'67, 3'4'58) \equiv 9'$$
$$(1'3'5''8'', 2'4'6''7'') \equiv 10'$$
$$(1'4'5'8', 2'3'6'7') \equiv 11'$$
$$(1''2''57, 3''4''68) \equiv 9''$$
$$(1''3''6''8'', 2''4''5''7'') \equiv 10''$$
$$(1''4''5'7', 2''3''6'8') \equiv 11''$$

ergibt sich, dass die 9 Nebenecken mit den Geraden

9 10' 11''	9 11' 10''
10 11' 9''	10 9' 11''
11 9' 10''	11 10' 9''

[1] Durège, *die ebenen Curven dritter Ordnung*, § 388.

incident sind, mit denen sie die Restfigur $(9_2, 6_3)$ bilden, welche den beiden von den Tangentialpunkten der beiden associirten Cf. bestimmten Cf. $(12_4, 16_3)$ gemeinschaftlich ist.

13. Werden aus der in § 11 betrachteten Cf. 18_3 die sechs gegenseitig getrennten Punkte $2\,3'\,4''\,7\,8'\,6''$ fortgelassen, so bleibt eine $(12_3, 18_2)$, deren Gerade zu zweien nach den 9 Nebenecken zielen. Fügt man diese 9 Punkte sammt drei gegenseitig getrennten Geraden der obigen $(9_2, 6_3)$ hinzu, so entsteht folgende Cf. 21_3:

5	6	9	2′	6	9′	2″	5	9″
3	4	9	4′	5	9′	3″	6	9″
3	5″	10	5″	8″	10′	3″	8″	10″
4	8″	10	2′	4′	10′	2″	5″	10″
4	7′	11	4′	5′	11′	5′	7′	11″
3	5′	11	2′	7′	11′	2″	3″	11″
9	10′	11″	10	11′	9″	11	9′	10″

In dieser aus je sechs Punkten der beiden associirten $(12_4, 16_3)$ und ihren gemeinschaftlichen Nebenecken und Diagonalen nebst drei mit Nebenecken incidenten Geraden zusammengesetzten Cf. kommt jede Nebenecke in keinem Cf.-dreiecke, jeder der übrigen Punkte in zwei Cf.-dreiecken vor. (Der Punkt 3 findet sich z. B. in den Dreiecken $3\,4\,10$, $3\,4\,11$.)

Eine von dieser Cf. durchaus verschiedene 21_3 ergibt sich, wenn aus der harmonischen Cf. die Punkte einer $(12_4, 16_3)$ fortgelassen, dagegen die Nebenecken sammt drei getrennten Geraden der zugehörigen $(9_2, 6_3)$ hinzugefügt werden. Ihre Geraden sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt.

1	2	9	1′	2′	9′	1″	2″	9″
3	4	9	3′	4′	9′	3″	4″	9″
1	3	10	1′	3′	10′	1″	3″	10″
2	4	10	2′	4′	10′	2″	4″	10″
1	4	11	1′	4′	11′	1″	4″	11″
2	3	11	2′	3′	11′	2″	3″	11″
9	10′	11″	10	11′	9″	11	9′	10″.

Die Punkte dieser 21_3 sind Ecken in 9 oder 4 Cf.-dreiecken je nachdem sie Cf.-punkt oder Nebenecke der $(12_4, 16_3)$ sind.

Indem die übrigen drei Geraden der von den Nebenecken gebildeten $(9_2, 6_3)$ von jedem Quadrupel getrennter Geraden der $(12_4, 16_3)$ getrennt sind, gibt das Hinzutreten dieser sieben Geraden zur obigen 21_3 eine neue Cf., nämlich eine $(21_4, 28_3)$. Die bezügliche Tabelle enthält ausser den im vorhergehenden Schema aufgeführten Geraden noch beispielsweise:

9 11' 10''	1 1' 1''
10 9' 11''	2 3' 4''
11 10' 9''	3 4' 2''
	4 2' 3''

Wie leicht ersichtlich, ist die Anzahl der Cf.-dreiecke, in denen ein Cf.-punkt vorkommt, in dieser Cf. die nämliche wie in der 21_3 aus welcher sie abgeleitet worden.

14. In § 8 wurde gezeigt, wie jeder Geraden der $(12_4, 16_3)A$ eine Cf. derselben Art zugeordnet ist, welcher die 9 Punkte ihrer Restfigur und die 3 Punkte der associirten Geraden angehören. Um für diese zugeordnete Cf. die associirte Cf. aufzustellen, führe ich für ihre Diagonalschnittpunkte (vgl. § 9) nachstehende Bezeichnung ein.

Diagonalentripel.			Schnitt-punkte.
8 2	4' 4''	7'' 3	(4'4'')
8 2	6' 4	3' 3''	(3'3'')
2' 2''	6' 4	7'' 3	(2'2'')
2' 2''	4' 4''	3' 3''	1
2 2'	6' 4''	7'' 3''	(22')
2 2'	4 4'	3 3'	1''
8 2''	4 4'	7'' 3''	(44')
8 2''	6' 4''	3 3'	(33')
8 2'	6' 4'	3 3''	(33'')
8 2'	4 4''	7'' 3'	(44'')
2 2''	4 4''	3 3''	1'
2 2''	6' 4'	7'' 3'	(22'')

Im Anschluss an § 9 stellt die folgende Tafel alsdann die Geraden der associirten $(12_4, 16_3)$ dar.

$1 \quad 1'' \quad 1'$	$(2'2'')\ 1''\ (22'')$	$(3'3'')\ 1''\ (33'')$	$(4'4'')\ 1''\ (44'')$
$1\ (22')(22'')$	$(2'2'')(22')\ 1'$	$(3'3'')(22')(44'')$	$(4'4'')(22')(33'')$
$1\ (33')(33'')$	$(2'2'')(33')(44'')$	$(3'3'')(33')\ 1'$	$(4'4'')(33')(22'')$
$1\ (44')(44'')$	$(2'2'')(44')(33'')$	$(3'3'')(44')(22'')$	$(4'4'')(44')\ 1'$

Mit Rücksicht auf den Umstand, dass die Punkte $1, 2, 8$ die Nebenecken des vollständigen Vierecks $3'4'3''4''$ sind, erhellt, dass die Punkte $(3'3'')$, $(4'4'')$ als Schnittpunkte von zwei Gegenseiten mit einer Diagonale durch die Punktepaare $3'3''$, $4'4''$ von 1 harmonisch getrennt werden.

»Die associirte $(12_4, 16_3)$ der einer Geraden der ursprünglichen $(12_4, 16_3)$ zugeordneten Cf. enthält die Punkte jener Geraden sammt den neun Punkten, von welchen sie durch die Punkte der ursprünglichen Cf. auf den mit ihr verbundenen Geraden harmonisch getrennt ist.»

15. Indem die Punkte $3'$, $3''$ ausser mit $4'$, $4''$ auch mit den Paaren $2'2''$, $1'1''$ ein dem obigen entsprechendes vollständiges Viereck bilden, müssen noch zwei der 28 analoge Gerade nach dem Punkt $(3'3'')$ zielen. Es sind dies die Geraden $38''$ und $46'$, von denen die zweite schon in der ersten Tabelle des vorigen Paragraphen auftrat.

Die Gerade 28 enthält ausser den Punkten $(3'3'')$, $(4'4'')$ offenbar noch zwei der Punkte, welche auf den Geraden der der ursprünglichen $(12_4, 16_3)$ associirten Cf. deren Punkte von den übrigen beiden auf der betreffenden Cf.-geraden belegenen Cf.-punkten harmonisch trennen. Diess ergibt sich aus der Betrachtung des vollständigen Vierecks $5'6'7''8''$, für welches $2, 8, 7$ die Nebenecken sind; die Diagonale 28 schneidet nämlich auf den Gegenseiten $5'7''$, $6'8''$ die von 7 harmonisch getrennten Punkte $(5'7'')$, $(6'8'')$ aus.

»Die Punkte h, welche die Punkte zweier associirter $(12_4, 16_3)$ auf deren Geraden zu harmonischen Gruppen ergänzen, bilden mit den Geraden, welche ausser den gemeinschaftlichen Cf.-diagonalen die Punkte der einen $(12_4, 16_3)$ mit denen der anderen Cf. verbinden, eine Cf. $(96_3, 72_4)$.»

Beachtet man, dass die harmonische Cf. $(24_3, 18_4)$ dreipunktige und zweipunktige Cf.-diagonalen besitzt, nämlich die 32 Geraden der beiden associirten Cf. und die 72 oben erwähnten Verbindungslinien, so kann das letzte Ergebniss auch in dieser Form ausgedrückt werden:

»Die zweipunktigen Diagonalen der harmonischen Cf. begegnen den dreipunktigen in 96 Punkten welche mit den Cf.-diagonalen der ersten Art eine $(96_3, 72_4)$ darstellen. Dabei werden auf jeder zweipunktigen Diagonale zwei, auf jeder dreipunktigen drei harmonische Gruppen gebildet, indem jede Cf.-gerade in jedem auf ihr belegenen Cf.-punkte durch je zwei dreipunktige Diagonalen von je einer zweipunktigen harmonisch getrennt wird.»

16. Indem die Punkte $(22'), (22'')$ durch die Punktepaare $2, 2'$ und $2, 2''$ von den Punkten $1'', 1'$ harmonisch getrennt sind, ist die in der letzten Tabelle des § 14 vorkommende Gerade $1(22')(22'')$ harmonisch conjugirt zu $11''1'$ in Bezug auf $12''2'$ und 12, d. h. sie trennt in einem der $(12_4, 16_3)$ angehörigen vollständigen Vierseite eine Seite harmonisch von einer zweiten Seite und einer Nebenseite. Jeder Punkt der $(12_4, 16_3)$ ist somit zwölf derartigen Geraden incident.

Die in der nämlichen Tabelle enthaltene Gerade $(2'2'')(33')(44'')$ schneidet die drei getrennten Geraden $12'2''$, $1''33'$, $1'44''$ in Punkten, welche zu $1, 1'', 1'$ in Bezug auf die anderen Punkte jeder Geraden harmonisch conjugirt sind. Jede aus Geraden der $(12_4, 16_3)$ gebildete $(9_2, 6_3)$ gibt also 6 Geraden H dieser Art: im Ganzen sind somit 96 Geraden H in jeder $(12_4, 16_3)$ vorhanden, welche zu sechsen mit den 48 Punkten h incident sind. Letzteres erhellt aus dem Umstande, dass z. B. die Gerade $12'2''$ von 6 Geradenpaaren der $(12_4, 16_3)$ getrennt ist, entsprechend den beiden Quadrupeln gegenseitig getrennter Cf.-geraden, in welchen sie vorkommt.

»In jeder $(12_4, 16_3)$ bilden die Punkte h mit den Geraden H eine $(48_6, 96_3)$, welcher die 16 Geraden der $(12_4, 16_3)$ als dreipunktige Cf.-diagonalen angehören; von den zweipunktigen Diagonalen zielen je 12 nach den 12 Punkten der $(12_4, 16_3)$, während ausserdem deren 72 zugleich Diagonalen der harmonischen Cf. sind.»

Weil jene 12×12 zweipunktige Diagonalen offenbar zu sechsen mit den Punkten h incident sind, entsteht eine Cf. $(60_{12}, 240_3)$, wenn sie mit den Punkten der $(12_4, 16_3)$ der $(48_6, 96_3)$ hinzugefügt werden.

Indem jene 72 Geraden auch je zwei Punkte h der associirten Cf. enthalten, sind sie als Cf.-diagonalen den beiden $(48_6, 96_3)$ gemeinschaftlich, welche in Bezug auf die beiden associirten $(12_4, 16_3)$ gebildet werden können: sie stellen eben die in § 15 gefundene $(96_3, 72_4)$ dar.

Werden die 16 Geraden der $(12_4, 16_3)$ als Cf.-gerade in Betracht gezogen, so ergibt sich schliesslich aus den 48 Punkten h eine Cf. $(48_7, 112_3)$, welche der $(12_4, 16_3)$ eingeschrieben ist.