BEMERKUNGEN ZUR THEORIE DER MEHRFACH LINEÄR VERKNÜPFTEN FUNCTIONEN

VON

KARL HEUN
in MÜNCHEN.

Die folgenden Zeilen enthalten Zusätze sowie eine Berichtigung zu meinen Untersuchungen in Bd. **11**, pag. 97—118 dieser Zeitschrift. Die Hauptfrage, welche hier erledigt wird, ist diese: »Wann sind $p+1$ p-fach lineär verknüpfte Functionen *gleichgruppig?*» Herr POINCARÉ hat sich eine nahe verwandte Frage in dem *Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes,* Acta Mathematica, Bd. **5**, gestellt und für $p=2$ ausführlich erörtert. Nur handelt es sich dort um Functionen derselben *Familie,* während ich Functionen derselben *Art* (genre) betrachte. Eine wesentliche Bedeutung hat dieser Unterschied nicht, da es sehr leicht ist von dem einen Falle auf den andern überzugehen. Was mich die Functionen *derselben Art* bevorzugen liess, war der Umstand, dass diese unmittelbar zu den Beziehungen führen, welche als eine Erweiterung der GAUSS'schen *relationes inter functiones contiguas* anzusehen sind. Gerade von hier aus eröffnen sich neue Gebiete für die specielle Functionentheorie. Man denke nur an die Art, wie GAUSS die Theorie der Γ-Function aus einer bestimmten *relatio inter functiones contiguas* hervorgehen lässt.

1. Die erzeugenden Substitutionen der p-fach lineär verknüpften Functionen mit $i+1$ Verzweigungspunkten besitzen (cf. Acta Mathematica, Bd. **11**, pag. 116)

$$(p^2 - 1)(i - 1) \text{ independente Coefficienten.}$$

Zu der entsprechenden Gruppe gehören unendlich viele Differentialgleichungen, die sich zunächst durch die Zahl der »individuellen» Parameter unterscheiden. Die Differentialgleichung, für welche diese Zahl gleich k ist, besitzt, abgesehen von den Verzweigungspunkten, welche wir jetzt als vorgegeben betrachten,

$$(p-1)(i+1)+(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\}+k$$

independente Parameter. Die letztere Zahl wird gleich $(p^2-1)(i-1)$, wenn

$$k=(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1)\right\}$$

angenommen wird. Hieraus folgt

Theorem I. Einem Systeme von i erzeugenden linearen Substitutionen p^{ter} Ordnung entspricht eine Differentialgleichung derselben Ordnung, welche $i+1$ beliebige Verzweigungspunkte und ebensoviele »individuelle» als »characteristische» Parameter besitzt.

Nach dem Ansatz, welchen ich in N° 5 der erwähnten Abhandlung mitgetheilt habe, kann man ein System mit einer beliebigen Anzahl *beliebiger* »individueller» Parameter auf ein *bestimmtes* gleichsgruppiges Hauptsystem reduciren. Die aus Gleichung (9) [Bd. **11**, pag. 112] fliessenden Relationen sind hinreichend zur Bestimmung der Coefficienten in der Reductionsgleichung und der »characteristischen» Parameter des Hauptsystems. Man kan jedoch denselben Ansatz benutzen um ein System (z) mit h »individuellen» Parametern auf ein gleichgruppiges Hauptsystem (y) mit *beliebigen* »characteristischen» Parametern zu reduciren. Alsdann werden aber die h »individuellen» Parameter infolge der Gleichung (9) l. c.

$$(p-1)\left\{\frac{1}{2}p(i-1)-1\right\} \text{ Bedingungen}$$

unterworfen. Sie sind also vollständig bestimmt, wenn k gleich der Zahl der »characteristischen» Parameter wird. Dass die Bestimmungsgleichungen im Allgemeinen von einander unabhängig sind, folgt aus Theorem I. —

Dem System (y) ordne man nun $p + 1$ unter einander verschiedene aber mit (y) gleichgruppige Functionen $z^{(0)}, z^{(1)}, \ldots, z^{(p)}$ mit je

$$(p - 1)\left\{\frac{1}{2}p(i - 1) - 1\right\}[= \rho]$$

»individuellen» Parametern zu und bestimme die Coefficienten nach dem erwähnten Ansatze. Hierauf eliminire man aus den $p + 1$ Reductionsgleichungen die Function (y) und ihre Derivirten. Dann entsteht eine Relation von der Form

$$\text{(a)} \qquad H_0(x) . z^{(0)} + H_1(x) . z^{(1)} + \ldots + H_p(x) . z^{(p)} = 0,$$

worin die H bekannte ganze rationale Functionen bedeuten. Dass unter den (z) in der vorstehenden Gleichung auch (y) *einmal* vorkommen kann, ist selbstverständlich. Dies führt zu

Theorem II. Zwischen $p + 1$ p-fach lineär verknüpften Functionen können nur dann Beziehungen[1] bestehen, welche den GAUSS'schen *relationes inter functiones contiguas* analog sind, wenn wenigstens p derselben ebensoviele, dem Werthe nach nicht willkürliche, »individuelle» als »characteristische» Parameter besitzen.

Ich bemerke hierzu noch, dass man zur wirklichen Aufstellung dieser Relationen am bequemsten von der Gleichung (II) [Acta Mathematica, Bd. **11**, pag. 105] ausgeht und dann analog wie in N° 5 l. c. verfährt. Wegen eines ausgeführten Beispiels vergl. man meine *Beiträge zur Theorie der LAMÉ'schen Functionen* [Math. Annalen, Bd. **32**]. In diesem Falle ist $p = 2$, $i = 3$ und $\rho = 1$.

2. Ein System (z) mit den »individuellen» Parametern $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ und dem Indicesschema

$$\left\{\begin{matrix} n_{11}, & n_{12}, & \ldots, & n_{1\,i+1} \\ n_{21}, & n_{22}, & \ldots, & n_{2\,i+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ n_{p1}, & n_{p2}, & \ldots, & n_{p\,i+1} \end{matrix}\right\}$$

[1] Ausnahmefälle können nur dann eintreten, wenn die Verzweigungsindices *bestimmten* Bedingungen genügen.

soll auf ein gleichgruppiges Hauptsystem (y), für welches $D = -m$ ist, reducirt werden. Zugleich sollen aber auch die Coefficienten in der Differentialgleichung

$$(x-\tau_1)(x-\tau_2)\ldots(x-\tau_k)\phi^p\frac{d^pz}{dx^p}+G_{p-1}.\phi^{p-1}\frac{dz^{p-1}}{dx^{p-1}}+\ldots+G_0.z=0$$

vollständig bestimmt werden.

Der Ansatz in N° 4 [l. c. pag. 109—111] giebt

$$p(m+k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1) \text{ Gleichungen,}$$

welche erfüllt sein müssen, weil (y) und (z) gleichgruppig sein sollen. Meine Behauptung (l. c., pag. 111), dass von diesen Gleichungen

$$(p-1)\left\{\frac{1}{2}(p-1)(i-1)-1\right\} \text{ Gleichungen}$$

eine Folge der übrigen seien, ist eine *unrichtige.* Sie sind vielmehr »im Allgemeinen» d. h. wenn nicht specielle Relationen für die Verzweigungsindices bestehen, alle von einander unabhängig. Hier von überzeugt man sich durch die folgenden Betrachtungen.

Als *vorgegebene* Grössen bei der Überführung von (z) auf (y) wollen wir zunächst ansehen

erstens die Verzweigungsindices der Functionen (y) und (z),

zweitens die k »individuellen» Parameter in (z).

Alsdann sind als *Unbekannte* zu betrachten

erstens die ρ »characteristischen» Parameter in (y)

zweitens $p(k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$ Coefficienten in den Functionen $G_0, G_1, \ldots, G_{p-1}$

drittens $p(m+1)-\frac{1}{2}p(p-1)(i-1)-1$ Constanten in der Reductionsgleichung.

Man erkennt, dass zur Bestimmung dieser Unbekannten die durch den Ansatz in N° 4 gelieferten $p(m+k+1)+\frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$ Gleichungen genügen, *wenn* dieselben von einander unabhängig sind. Der Ansatz in N° 5 l. c. liefert aber ebenfalls das Resultat, dass die »characteristischen»

Parameter in (y) *bestimmt* sind, wenn die »individuellen» Parameter von (z) beliebig vorgegeben sind. Ein Widerspruch in den Ergebnissen beider Reductionsmethoden ist unmöglich, denn sie folgen *beide* aus dem Princip der Irreductibilität der Differentialgleichungen für (y) und (z). Folglich sind in der That die obigen Gleichungen von einander unabhängig.

Wir wollen nun als *Daten* ansehen

erstens die ρ »characteristischen» Parameter in (y)

zweitens $k - \rho$ »individuelle» Parameter in (z)

drittens die Zahl $D = -m$,

und als *Unbekannte*

erstens $p(k+1) + \frac{1}{2}p(p+1)(i-1)$ Coefficienten in den Functionen $G_0, G_1, \ldots, G_{p-1}$

zweitens ρ »individuelle» Parameter in (z)

drittens $p(m+1) + \frac{1}{2}p(p+1)(i-1) - 1$ Constanten in der Reductionsgleichung.

Der Ansatz in N° 4 l. c. liefert wiederum die hinreichende Zahl von Bestimmungsgleichungen für die Unbekannten.

Hiernach muss der Satz auf pag. 112 l. c. durch die folgenden ersetzt werden.

Theorem III. Ein mehrfach lineär verknüpftes Functionensystem lässt sich stets auf ein Hauptsystem mit *vorgegebenen* »characteristischen» Parametern reduciren, doch werden hierbei ebensoviele »individuelle» Parameter des zu reducirenden Systems dem Werthe nach bestimmt, als das Hauptsystem »characteristische» Parameter besitzt.

Theorem IV. Ein p-fach lineär verknüpftes Functionensystem mit einer beliebigen Anzahl beliebiger »individueller» Parameter lässt sich immer durch ein Hauptsystem und $p-1$ successive Derivirte derselben lineär und rational ausdrücken. Die »characteristischen» Parameter des Hauptsystems sind durch ein gewisses System simultaner algebraischer Gleichungen bestimmt.

Nachdem die Coefficienten in der Differentialgleichung für (z) vollständig bestimmt sind, könnte man fragen, welche derselben man als characteristische Parameter ansehen soll. Es ist jedoch nicht nothwendig diese naturgemäss unbestimmte Frage durch eine willkürliche Festsetzung zu entscheiden. Da man nemlich immer eine Gleichung von der Form

$$z = P_0 . y + P_1 . \psi . \frac{dy}{dx} + \ldots + P_{p-1} . \psi^{p-1} . \frac{d^{p-1}y}{dx^{p-1}}$$

aufstellen kann, so ist (z) durch seine »individuellen» Parameter, die Zahl D und die »characteristischen» Parameter von (y) determinirt. Es erscheint mir daher am einfachsten entweder gar nicht von »characteristischen» Parametern des Systems (z) zu sprechen oder, wenn man es thut, diejenigen des Hauptsystems (y) zu verstehen.

3. In Rücksicht auf verwandte Untersuchungen anderer Mathematiker, welche die von mir als »individuelle Parameter» bezeichneten Grössen einfach »ausserwesentlich singuläre Punkte» nennen, sehe ich mich veranlasst meine abweichende Terminologie zu begründen. Zunächst führt, wie schon Riemann gezeigt hat, die natürliche Entwicklung der Theorie der mehrfach lineär verknüpften Functionen unmittelbar auf die Differentialgleichung [Acta Mathematica, Bd. **11**, pag. 105]

$$G_p[k] . \psi^p \frac{d^p z}{dx^p} + G_{p-1} . \psi^{p-1} . \frac{d^{p-1}z}{dx^{p-1}} + \ldots + G_0 . z = 0.$$

Für $p = 2$ hat man also

$$G_2[k]\psi^2 . \frac{d^2 z}{dx^2} + G_1 . \psi . \frac{dz}{dx} + G_0 . z = 0.$$

Durch eine bekannte Substitution lässt sich diese Gleichung durch die einfachere

$$G_2[k] . \psi . \frac{d^2\zeta}{dx^2} + G_1 . \frac{d\zeta}{dx} + \overline{G}_0 . \zeta = 0$$

ersetzen. Diese Form resultirt nun allerdings aus der von Herrn Fuchs gewählten wenn k Verzweigungspunkte in ausserwesentlich singuläre Punkte degeneriren. Nimmt man jedoch $p = 3$ dann ist diese Überführung nicht mehr möglich, so lange die Gleichung $G_3[k] = 0$ nur lineäre Factoren besitzt.

Es ist auch bemerkenswerth, dass man bei dem von mir eingeschlagenen Weg gar nicht auf die Theorie der logarithmischen Integrale zu recurriren braucht, wenn man nur annimmt, dass die Fundamentalgleichung für (z) ungleiche Wurzeln hat.

Frankfurt a/M. 26. Mai 1888.