SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE

PAR

EMILE PICARD

À PARIS.

Je m'occupe dans ce travail des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre, obtenues en exprimant que la variation première de l'intégrale double

$$\iint f\left(V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}\right) dx\, dy$$

est égale à zéro, en désignant par f une forme quadratique en V, $\frac{\partial V}{\partial x}$ et $\frac{\partial V}{\partial y}$, les coefficients étant des fonctions quelconques de x et y. La classe d'équations ainsi obtenue jouit de diverses propriétés remarquables; j'énoncerai seulement ici que l'on peut toujours par un changement de variables et de fonction, la transformer en une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y)u = 0.$$

C'est pourquoi je reprends dans le second chapitre l'étude de cette équation, en me proposant particulièrement la détermination d'une intégrale au moyen de ses valeurs le long d'une courbe fermée. J'ai beaucoup emprunté dans cette seconde partie à un mémoire du plus grand intérêt que M. SCHWARZ a publié en 1885 sur l'équation précédente, à l'occasion du jubilé de M. WEIERSTRASS.[1]

---

[1] *Ueber ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung,* Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn WEIERSTRASS. Acta Soc. Sc. Fennicæ, T. 15. Helsingfors 1885.

I.

1. Soit V une fonction des deux variables indépendantes x et y,

$$\text{posons}\quad V_1 = \frac{\partial V}{\partial x}, \qquad V_2 = \frac{\partial V}{\partial y}$$

et soit $f(V, V_1, V_2)$ la forme quadratique en V, V_1 et V_2

$$AV^2 + A'V_1^2 + A''V_2^2 + 2BV_1V_2 + 2B'VV_2 + 2B''VV_1$$

où les A et B représentent des fonctions de x et y.

Je considère l'intégrale double

$$\iint f(V, V_1, V_2)\,dx\,dy$$

étendue à une certaine aire. L'équation, exprimant que la variation première de cette intégrale est nulle, s'obtient immédiatement; elle peut s'écrire

$$\frac{\partial f}{\partial V} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial V_1}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial V_2}\right) = 0,$$

où, en développant, nous obtenons pour V l'équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre:

$$0 = A'\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + A''\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A''}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$+ \left(\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A\right)V$$

Ceci posé, prenons une équation linéaire aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} + fV = 0.$$

Peut-on identifier cette dernière équation à la précédente; on devrait avoir

$$A' = \lambda a, \qquad B = \lambda b, \qquad A'' = \lambda c,$$

$$\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y} = \lambda d, \qquad \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A''}{\partial y} = \lambda e, \qquad \frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A = \lambda f.$$

On voit que les cinq premières équations ne sont pas, en général, compatibles. On a en effet

$$\frac{\partial(\lambda a)}{\partial x}+\frac{\partial(\lambda b)}{\partial y}=\lambda d, \qquad \frac{\partial(\lambda b)}{\partial x}+\frac{\partial(\lambda c)}{\partial y}=\lambda e.$$

La fonction λ doit satisfaire simultanément à ces deux équations qui peuvent s'écrire

$$a\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}+b\frac{\partial \log \lambda}{\partial y}=d-\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{\partial b}{\partial y},$$

$$b\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}+c\frac{\partial \log \lambda}{\partial y}=e-\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial c}{\partial y}.$$

De ces deux équations on tire $\frac{\partial \log \lambda}{\partial x}$ et $\frac{\partial \log \lambda}{\partial y}$, d'où par conséquent on déduit une équation de condition qu'il est facile d'écrire.

Cette équation est une relation entière entre a, b, c, d, e et leurs dérivées partielles jusqu'au second ordre. Soit:

$$F(a, b, c, \ldots)=0, \tag{1}$$

F étant un polynôme. *Celui-ci sera nécessairement un invariant de l'équation,* correspondant à un changement de variables et de fonction

$$x'=\varphi(x, y),$$

$$y'=\psi(x, y),$$

$$V'=V.\chi(x, y),$$

φ, ψ et χ étant des fonctions quelconques de x et y, car la propriété qui nous occupe subsiste manifestement quand on a effectué ces changements dans l'équation.

Quand la condition (1) est remplie, λ se trouve déterminé à un facteur constant près, et par suite A', B et A''; mais il n'en est pas de même des autres coefficients, qui sont seulement liés par la relation:

$$\frac{\partial B''}{\partial x}+\frac{\partial B'}{\partial y}-A=\lambda f.$$

Il y aura donc alors une infinité de formes quadratiques

$$f(V, V_1, V_2)$$

pouvant servir à engendrer l'équation différentielle linéaire; cette indétermination nous sera, dans un moment, extrêmement utile.

2. Aux équations rentrant dans la catégorie précédente peuvent s'étendre dans une certaine mesure des résultats classiques dans la théorie de l'équation du potentiel.

Je considère une certaine région du plan R, à contour simple, et telle que, (x, y) occupant une position quelconque à son intérieur, la forme quadratique

$$f(V, V_1, V_2)$$

soit *définie;* soit alors dans R une aire A limitée par une courbe C. Il est tout d'abord immédiat qu'il existe une seule fonction $V(x, y)$ uniforme et continue dans A ainsi que ses dérivées partielles, et prenant sur le contour C une succession donnée de valeurs. Pour le montrer bien nettement nous n'avons qu'à considérer l'intégrale

$$\iint f(V, V_1, V_2)\,dx\,dy$$

qui aura un signe connu, soit le signe plus, si la forme est positive. Or supposons qu'il existe une fonction V, uniforme et continue dans A, et prenant sur le contour C la valeur zéro. L'intégrale

$$\text{(E)}\qquad \iint (AV^2 + A'V_1^2 + A''V_2^2 + 2BV_1V_2 + 2B'VV_2 + 2B''VV_1)\,dx\,dy$$

peut s'écrire, en tenant compte de ce que V est nul sur le contour

$$-\iint V\left\{A'\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + A''\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial A'}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A''}{\partial y}\right)\frac{\partial V}{\partial y}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A\right)V\right\}dx\,dy.$$

L'intégrale (E) sera par suite nulle, ce qui exige puisque la forme est définie, que V soit identiquement nulle à l'intérieur de A.

Ce premier point établi, on démontrera qu'il existe *une fonction V, continue ainsi que ses dérivées dans A, satisfaisant à l'équation différentielle et prenant sur le contour une succession donnée de valeurs.* Il n'y a qu'à répéter le raisonnement classique qui se fait dans la théorie du principe de DIRICHLET, et, bien entendu, les critiques trouvent ici leur place relativement à l'insuffisance de ce genre de démonstration, qui n'en rend pas moins d'ailleurs au moins très vraisemblable le théorème à établir. Nous passons donc, pour le moment, sur ce point qui fera tout à l'heure l'objet d'un examen approfondu (Chap. II).

3. Nous avons dit que, lorsqu'une équation linéaire satisfaisait à la condition $F = 0$, la forme quadratique correspondant à l'équation différentielle restait arbitraire dans une certaine mesure.

On peut la préciser complètement en posant, par exemple, $B'' = B' = 0$. On a alors $A = -\lambda f$, et on aura la forme:

$$f(V, V_1, V_2) = \lambda[-fV^2 + aV_1^2 + cV_2^2 + 2bV_1V_2].$$

λ est une fonction essentiellement positive (c'est une exponentielle). Les conditions pour que la forme soit définie, s'exprimeront par les inégalités

$$\begin{array}{ccc} b^2 - ac < 0, & & b^2 - ac < 0, \\ a > 0, & \text{ou} & a < 0, \\ f < 0, & & f > 0. \end{array}$$

En général, on devra chercher à tirer parti de l'indétermination des coefficients de la forme quadratique. Prenons, par exemple, l'équation

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + f(x, y)V = 0,$$

elle appartient à la classe qui nous occupe. Il suffira de prendre:

$$A' = 1, \qquad B = 0, \qquad A'' = 1,$$

et on aura

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - A = f.$$

D'après ce qui précède, dans toute région du plan ou $f(x, y)$ est négative, on peut affirmer la détermination d'une intégrale au moyen de sa valeur donnée sur le contour. D'une manière générale, la forme

$$AV^2 + V_1^2 + V_2^2 + 2B'VV_2 + 2B''VV_1$$

sera définie, si on a:

$$A > B'^2 + B''^2,$$

en remplaçant A par sa valeur, on trouve:

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - f > B'^2 + B''^2.$$

Donc les régions du plan, qui nous intéressent, sont celles *où on pourra trouver deux fonctions B' et B'' de x et y, uniformes et continues, et vérifiant cette dernière inégalité.*

Prenons le cas très particulier où f se réduit à la constante positive $+ m^2$. Cherchons si on peut trouver des régions du plan où cette détermination soit possible. Soit $B' = 0$, il nous reste:

$$\frac{\partial B''}{\partial x} - m^2 > B''^2.$$

Cherchons une fonction B'' de x telle que

$$\frac{dB''}{dx} - B''^2 = m_1^2,$$

m_1^2 étant une constante supérieure à m^2, mais en différant aussi peu qu'on voudra. On aura

$$B'' = m_1 \operatorname{tg}(m_1 x + C),$$

C étant une arbitraire.

Donc dans un intervalle compris entre deux parallèles à l'axe des y, dont la distance est moindre que $\frac{\pi}{m_1}$, on pourra certainement déterminer B' et B'' de manière à satisfaire aux conditions indiquées.

Puisque m_1 diffère aussi peu qu'on veut de m, on peut dire que pour toute aire comprise dans une bande parallèle à l'axe des y, de largeur moindre que $\frac{\pi}{m}$, on se trouvera dans les conditions voulues pour l'application du théorème. On conclut de là immédiatement, par une simple transformation de coordonnées rectangulaires qui change l'équation en elle-même, que la même remarque subsistera, quelle que soit l'orientation d'une bande, à l'intérieur de laquelle soit situé le contour, pourvu que la largeur de cette bande soit moindre que $\frac{\pi}{m}$.

4. Revenons maintenant au cas général d'une équation linéaire

$$(1)\qquad a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} + fV = 0,$$

en supposant seulement remplie la condition désignée par $F = 0$.

J'envisage d'abord l'équation

$$(2)\qquad a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} = 0,$$

qui ne diffère de la première que par la suppression du terme fV; elle appartient à la même classe d'équations, puisque F ne dépend pas de f.

L'équation (2) pourra se déduire de la considération de l'intégrale double

$$(3)\qquad \iint\left[A'\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + A''\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

car l'équation

$$-A + \frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} = \lambda f$$

sera vérifiée ici, puisque $f = 0$, par $A = B'' = B' = 0$.

Or effectuons sur x et y un changement de variables

$$x = \varphi(X, Y),$$
$$y = \chi(X, Y),$$

tel que l'expression $A'\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial V}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y} + A''\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$ prenne la forme

$$\mu\left[\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2\right].$$

Il faudra que les deux fonctions x et y de X et Y satisfassent aux deux équations

$$A'\left(\frac{\partial y}{\partial Y}\right)^2 - 2B\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial Y} + A''\left(\frac{\partial x}{\partial Y}\right)^2 = A'\left(\frac{\partial y}{\partial X}\right)^2 - 2B\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial X} + A''\left(\frac{\partial x}{\partial X}\right)^2,$$

$$A'\frac{\partial y}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X} + A''\frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial x}{\partial X} - B\left(\frac{\partial x}{\partial X}\frac{\partial y}{\partial Y} + \frac{\partial x}{\partial Y}\frac{\partial y}{\partial X}\right) = 0.$$

Or ces équations ne sont autres que celles que l'on obtient, quand on effectue le changement de variables x et y dans la forme quadratique de différentielles

$$A''dx^2 - 2Bdxdy + A'dy^2$$

et qu'on écrit que la nouvelle forme se réduit à

$$M[dX^2 + dY^2].$$

Il résulte de cette remarque que pour trouver deux fonctions x et y de X et Y satisfaisant aux conditions indiquées, il suffira d'intégrer une équation différentielle ordinaire du premier ordre.

Ainsi avec les variables X et Y l'intégrale (3) prend la forme plus simple

$$\iint \mu_1 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial Y}\right)^2\right] dXdY,$$

et par suite l'équation aux dérivées partielles

$$a\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + d\frac{\partial V}{\partial x} + e\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

va devenir

$$\mu_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial \mu_1}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial \mu_1}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

ou en posant $\mu_1 = \mu^2$

$$\mu\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + 2\frac{\partial \mu}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + 2\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} = 0.$$

Tel est un premier type des équations aux dérivées partielles qui nous occupent. Nous ne prendrons pas cependant l'équation précédente comme type normal de ces équations.

Si on pose

$$V = \frac{V_1}{\mu},$$

l'équation précédente dévient:

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2} + FV_1 = 0, \quad \text{où} \quad F = -\frac{\dfrac{\partial^2 \mu}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mu}{\partial y^2}}{\mu}.$$

Telle est la forme à laquelle peut se ramener l'équation (2), et l'équation (1) se trouvera par conséquent ramenée à la même forme. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant:

Toute équation linéaire aux dérivées partielles de la classe considérée peut, par un changement convenable de variables et de fonction, être ramenée à la forme:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + f(x, y)V = 0.$$

II.

5. Les applications faites précédemment sur l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y)u = 0$$

acquièrent donc un intérêt particulier. Nous avons vu que si, dans une certaine région du plan, on peut trouver deux fonctions continues B' et B'' telles que

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - f > B'^2 + B''^2,$$

on pourra faire usage des considérations développées dans les deux premiers paragraphes. Nous avons dit que, pour une aire comprise dans cette région, une intégrale de l'équation est déterminée par ses valeurs sur le contour. C'est là un point fondamental que nous devons maintenant reprendre, car la démonstration indiquée manque de rigueur et, de plus, ne donne aucune indication sur le moyen d'obtenir effectivement cette intégrale. Nous nous restreignons, dans cette étude, au cas où la fonction $f(x, y)$ a un signe invariable dans la région considérée; la question se présente d'ailleurs d'une manière très différente suivant que la fonction f est positive ou négative dans la région étudiée. Nous allons examiner successivement ces deux cas.

6. L'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + p(x, y)u = 0,$$

dans une région du plan où $p(x, y)$ est positive, a fait l'objet d'un mémoire extrêmement remarquable de M. SCHWARZ, publié en 1885 à l'occasion du jubilé de M. WEIERSTRASS. Je vais rappeler les résultats essentiels obtenus par l'éminent géomètre de Göttingen.

Posant, pour abréger $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, on part de ce point bien connu qu'on peut trouver une fonction u de x et y, continue dans un certain contour, s'annulant le long de ce contour et vérifiant l'équation

$$\Delta u + F(x, y) = 0.$$

Cette fonction u est donnée par l'intégrale double étendue au contour

$$u = \frac{1}{2\pi}\iint F(\xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta$$

où $G(\xi, \eta, x, y)$ désigne la fonction de GREEN relative au contour et au point (ξ, η). Ceci posé, soit donnée arbitrairement une succession continue de valeurs le long du contour. Désignons par u_0 la fonction satisfaisant à l'équation

$$\Delta u_0 = 0$$

et prenant le long du contour les valeurs données.

On forme ensuite une suite indéfinie

$$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$$

satisfaisant respectivement aux équations

$$\begin{aligned} \Delta u_1 + p u_0 &= 0, \\ \Delta u_2 + p u_1 &= 0, \\ &\cdots\cdots \\ \Delta u_n + p u_{n-1} &= 0, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

toutes ces fonctions s'annulant le long du contour; elles se trouvent ainsi de proche en proche complètement déterminées et sont données par des intégrales définies.

M. SCHWARZ considère alors la série

(S) $$u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

et cherche si on peut obtenir ainsi la solution de l'équation différentielle

$$\Delta u + pu = 0$$

prenant sur le contour les valeurs données.

Pour répondre à cette question, M. SCHWARZ introduit une grandeur qui joue un rôle essentiel. Formons, en partant de $v_0 = 1$ sur le contour, la succession

$$v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots$$

analogue aux u; posons alors

$$W_n = \iint p v_0 v_n dx dy,$$

l'intégrale double étant étendue an contour et envisageons la suite

$$W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots$$

M. SCHWARZ établit que le rapport $\frac{W_n}{W_{n-1}}$ tend vers une limite finie c. Dans le cas où c est inférieur à l'unité, on peut être certain que la série (S) converge, et résout le problème proposé.

Quand $c = 1$, il existe une intégrale de l'équation prenant la valeur zéro sur le contour et ne s'annulant pas identiquement à l'intérieur.

Tels sont les résultats si intéressants dus à M. SCHWARZ. Je considère maintenant un contour situé dans une région du plan, où non seulement $p(x, y)$ est positive, mais où de plus on peut trouver des fonctions continues B' et B'' de x et y, telles que

$$\frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - p > B'^2 + B''^2$$

Je dis que pour ce contour, on aura nécessairement

$$c < 1.$$

Pour le voir, remarquons d'abord que W_n peut s'écrire

$$W_n = \iint p v_k v_{n-k} dx dy,$$

k étant un entier compris entre zéro et n, et on a aussi

$$W_n = \iint \left(\frac{\partial v_{k+1}}{\partial x} \frac{\partial v_{n-k}}{\partial x} + \frac{\partial v_{k+1}}{\partial y} \frac{\partial v_{n-k}}{\partial y} \right) dxdy,$$

formules dont on trouvera la démonstration, d'ailleurs immédiate, dans le mémoire de M. Schwarz. Nous avons donc

$$W_{2n} = \iint p v_n^2 \, dxdy,$$

$$W_{2n-1} = \iint \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy,$$

et par suite

$$W_{2n-1} - W_{2n} = \iint \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 - p v_n^2 \right] dxdy.$$

Faisons enfin une dernière transformation. La fonction v_n s'annulant sur le contour nous avons:

$$\iint \left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 - p v_n^2 \right] dxdy$$

$$= \iint \left[A v_n^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y} \right)^2 + 2 B' v_n \frac{\partial v_n}{\partial y} + 2 B'' v_n \frac{\partial v_n}{\partial x} \right] dxdy$$

où

$$A = \frac{\partial B''}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y} - p;$$

or, dans la seconde intégrale, la forme qui figure sous le signe d'intégration est définie. Nous en concluons donc que:

$$W_{2n-1} - W_{2n} > 0;$$

la limite de $\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}}$, c'est à dire c, *ne peut donc être plus grande que l'unité.* Elle ne peut d'ailleurs être ici égale à l'unité, car nous aurions une intégrale de l'équation, uniforme et continue, s'annulant le long du contour, ce qui est impossible dans la région considérée du plan. Le théorème est donc établi.

7. Il a été essentiellement supposé dans ce qui précède, que la fonction $p(x, y)$ était *positive* dans la région du plan où sont situés les contours étudiés. M. SCHWARZ ne considère pas dans son mémoire le cas où $p(x, y)$ est négatif; nous allons ici nous occuper de ce cas. Dans toute région du plan où $p(x, y)$ est négative, la démonstration donnée par la variation de l'intégrale

$$\iint\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - pu^2\right]dxdy$$

peut trouver sa place. Il est donc *vraisemblable* qu'une intégrale se trouve déterminée par ses valeurs sur le contour; c'est ce point que nous allons établir d'une manière rigoureuse, en même temps que nous donnerons le moyen d'obtenir cette intégrale.

Considérons tout d'abord l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + |p|.u = 0,$$

$|p|$ désignant la valeur absolue de p.

Si le contour est suffisamment petit, conformément à la théorie du paragraphe précédent, on pourra intégrer l'équation par une série

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n + \ldots$$

pour des valeurs données sur le contour, et la série des valeurs absolues est convergente. Il en résulte que

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots$$

représentera l'intégrale de l'équation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + pu = 0$$

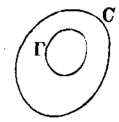
pour les mêmes valeurs données sur le contour, puisque ici $|p| = -p$.

Ceci suppose essentiellement que le contour soit assez petit pour satisfaire aux conditions du paragraphe précédent.

Avant d'aller plus loin, faisons quelques remarques importantes. Soit d'abord pour un contour C d'ailleurs quelconque dans la région où p est négatif, une fonction u vérifiant l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + pu = 0$$

et prenant sur C des valeurs positives ou nulles: Je dis qu'elle ne peut prendre des valeurs négatives à l'intérieur de C. En effet la courbe



séparant la région de l'aire où u est négative de celle où u est positive, serait une certaine courbe fermée Γ (qui peut avoir des parties communes avec C). Sur Γ, la fonction u serait nulle, elle devrait donc être nulle à l'intérieur. Il ne peut donc y avoir de valeurs négatives pour u. Soit alors u_0 l'intégrale de l'équation

$$\Delta u_0 = 0$$

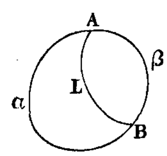
prenant sur le contour C les mêmes valeurs que u; on aura:

$$\Delta(u - u_0) + pu = 0$$

et comme u est positif, on en conclut que:

$$u - u_0 < 0,$$

car $u - u_0$, qui s'annule sur le contour, sera donnée par une intégrale dont tous les éléments sont négatifs. Ainsi pour tout point à l'intérieur u est moindre que u_0.



Supposons maintenant le contour C partagé en deux parties $A\alpha B$ et $B\beta A$, et désignons par v une intégrale de l'équation qui prenne sur la première partie la valeur zéro, et sur la seconde la valeur $+1$. Soit v_0 l'intégrale de l'équation $\Delta v_0 = 0$, satisfaisant aux mêmes conditions aux limites; on aura d'après ce qui précède $v < v_0$. Or, d'après une remarque faite par M. Schwarz, la valeur de v_0 sur une ligne L joignant le point A au point B (non tangente à C), sera moindre que q, en désignant par q un nombre plus petit que un. Nous avons donc sur L, $v < q$.

Soit enfin, pour terminer ces remarques, u une intégrale de l'équation prenant sur $A\alpha B$ la valeur zéro, et sur $A\beta B$ des valeurs positives ou négatives de module maximum g, la fonction

$$gv + u$$

satisfait à l'équation et est nulle sur la première partie du contour et positive sur l'autre; elle est donc positive sur ALB. Or on a:

$$gv + u = gq + u + g(v - q);$$

or $v - q$ est négatif; donc $gq + u$ doit être positif. On montre de même en considérant $gv - u$ que $gq - u$ est positif. *Par suite* $|u|$ *est moindre que* gq. On voit donc que le lemme fondamental dont a fait usage M. SCHWARZ dans ces belles recherches sur l'équation $\Delta u = 0$, s'étend à l'équation qui nous occupe.

8. Nous n'avons jusqu'ici pu traiter que le cas où le contour était suffisamment petit pour que nous soyons assuré de la convergence des séries employées. Nous allons montrer maintenant que, dans une région du plan où $p(x, y)$ est négatif, on peut, pour une aire quelconque, obtenir l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + pu = 0$$

prenant une succession de valeurs données sur le contour.

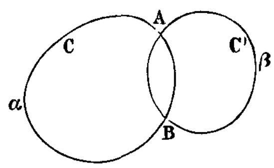
On peut en effet partager une telle aire en plusieurs autres plus petites pour lesquelles on sache, d'après ce qui précède, résoudre le problème; de plus on peut s'arranger de manière que ces aires empiètent les unes sur les autres. Si donc, sachant résoudre le problème pour deux aires ayant une partie commune, on sait le résoudre pour l'aire limitée par le périmètre extérieur des contours, nous aurons une solution complète du problème proposé. Or on voit de suite que le *procédé alterné* employé avec tant de succès par M. SCHWARZ pour l'équation

$$\Delta u = 0,$$

peut être employé pour l'équation

$$\Delta u + pu = 0.$$

C'est ce qui résulte des remarques que nous avons développées au paragraphe précédent, et il n'y aurait qu'à réproduire maintenant textuellement la belle méthode de M. SCHWARZ.[1] Si donc, par exemple, on a résolu le problème pour les contours C et C' on saura le résoudre pour l'aire limitée par $A\alpha B\beta$. Il devient manifeste alors, en allant de proche en proche, que nous pourrons intégrer l'équation



$$\Delta u + pu = 0$$

pour un contour quelconque, situé dans une région du plan où $p(x, y)$ est négatif, en nous donnant arbitrairement les valeurs de u sur ce contour.

Paris, le 4 novembre 1888.

---

[1] On trouvera exposées d'une manière très complète les recherches de M. SCHWARZ dans le troisième chapitre de la thèse de M. JULES RIEMANN sur le principe de DIRICHLET, soutenue récemment devant la faculté des sciences de Paris.