

la distance AA' est donc elle-même du n^{e} ordre; l'arc APA' est plus petit que AA_1 , qui est très petit, c'est à dire qui tend vers 0 avec μ ; l'arc APA' est donc très petit et sa courbure est finie; on peut donc assigner une limite au rapport de l'arc APA' à sa corde AA' ; ce rapport est fini et AA' est du n^{e} ordre; donc APA' est du n^{e} ordre, c. q. f. d.

D'ailleurs le nouvel arc $APA'B$ ne coupe plus l'arc AA_1 , il a seulement avec lui une partie commune APA' .

On retombe donc sur la 2^e hypothèse qui a déjà été rejetée.

La 1^{ère} hypothèse est donc seule acceptable et le théorème est démontré.

Remarque. — Nous avons supposé dans l'énoncé du théorème que les arcs AA_1 et BB_1 sont très petits et que leur courbure est finie. En réalité nous ne nous sommes servis de cette hypothèse que pour montrer que si la corde AA' est très petite du n^{e} ordre, il en est de même de l'arc APA' .

Le théorème sera donc encore vrai quand même l'arc AA_1 ne serait pas très petit et sa courbure finie, pourvu qu'on puisse assigner une limite supérieure au rapport d'un arc quelconque (faisant partie de AA_1 ou de BB_1) à sa corde.

CHAPITRE III.

Théorie des solutions périodiques.

§ 9. *Existence des solutions périodiques.*

Considérons un système d'équations différentielles

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

où les X sont des fonctions des x et d'un paramètre μ . Les X pourront aussi dépendre de t , mais ce seront alors des fonctions périodiques de cette variable et la période sera 2π .

Supposons que pour la valeur 0 du paramètre μ , ces équations admettent une solution périodique, de telle sorte que

$$x_i = \varphi_i(t),$$

φ_i étant une fonction périodique du temps dont la période sera par exemple 2π .

Posons:

$$x_i = \varphi_i + \xi_i$$

et cherchons pour les valeurs très petites de μ à trouver les valeurs des ξ que nous supposerons également très petites, il viendra

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \mu \frac{dX_i}{d\mu} + \sum_k \xi_k \frac{dX_i}{dx_k}.$$

Dans les dérivées partielles des X les x_i sont remplacés par les fonctions périodiques φ_i . Les ξ sont ainsi déterminés par des équations linéaires à second membre dont les coefficients sont des fonctions périodiques.

Deux cas peuvent se présenter.

1°. Les équations sans second membre:

$$(2) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \sum_k \xi_k \frac{dX_i}{dx_k}$$

n'admettent pas de solution périodique de période 2π .

Dans ce cas les équations à second membre en admettent une que j'écrirai:

$$\xi_i = \mu\psi_i(t),$$

ψ étant une fonction périodique de période 2π .

2°. Les équations sans second membre admettent une solution périodique de période 2π .

Alors les équations à second membre peuvent ne pas avoir de solution périodique, de telle façon qu'en général nous trouverons une solution de la forme suivante:

$$\xi_i = \mu t \phi_{1,i}(t) + \mu \phi_{0,i}(t),$$

les ϕ étant toujours des fonctions périodiques, ou même dans certains cas

$$\xi_i = \mu [t^n \phi_{n,i}(t) + t^{n-1} \phi_{n-1,i}(t) + \dots + \phi_{0,i}(t)].$$

Plaçons-nous dans le premier cas et voyons la chose de plus près. Cherchons à former une solution périodique et à la développer suivant les puissances de μ ; posons par conséquent:

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1,i} + \mu^2\varphi_{2,i} + \dots$$

Quand on substituera à la place des x_i ces valeurs dans les X_i , on trouvera

$$X_i = X_{0,i} + \mu X_{1,i} + \mu^2 X_{2,i} + \dots$$

Il est clair que les $X_{0,i}$ ne dépendent que des φ_i , les $X_{1,i}$ des φ_i et des $\varphi_{1,i}$, les $X_{2,i}$ des $\varphi_{1,i}$ et des $\varphi_{2,i}$ etc. De plus si les $\varphi_{n,i}$ sont des fonctions périodiques de t de période 2π , il en sera de même des $X_{n,i}$.

Nous avons de plus

$$X_{n,i} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n,k} + Y_{n,i}.$$

Dans le second membre, dans les dérivées $\frac{dX_i}{dx_k}$, on doit substituer les φ_i à la place des x_i ainsi que nous l'avons fait plus haut. De plus $Y_{n,i}$ ne dépendra que des φ_i , des $\varphi_{1,i}$, des $\varphi_{2,i}$, ..., des $\varphi_{n-1,i}$; mais ne dépendra plus des $\varphi_{n,i}$.

Cela posé on est conduit aux équations suivantes

$$(3) \quad \frac{d\varphi_{n,i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n,k} + Y_{n,i}.$$

Supposons qu'on ait déterminé les quantités

$$\varphi_{1,i}, \varphi_{2,i}, \dots, \varphi_{n-1,i}$$

à l'aide des équations précédentes sous forme de fonctions périodiques de t ; on pourra ensuite à l'aide des équations (3) déterminer les $\varphi_{n,i}$.

Ces équations (3) sont des équations linéaires à second membre et les coefficients sont périodiques.

Par hypothèse les équations sans second membre

$$\frac{d\varphi_{n,i}}{dt} = \sum_k \frac{dX_i}{dx_k} \varphi_{n,k},$$

qui ne sont autres que les équations (2), n'ont pas de solution périodique; donc les équations (3) en admettent une.

Il résulte de là qu'il existe des séries

$$x_i = \varphi_i + \mu\varphi_{1,i} + \mu^2\varphi_{2,i} + \dots$$

dont les coefficients sont périodiques et qui satisfont formellement aux équations (1).

Il resterait à démontrer la convergence de ces séries. Nul doute que cette démonstration ne puisse se faire directement; je ne le ferai pas toutefois, car je vais, en reprenant la question à un point de vue différent, démontrer rigoureusement l'existence des solutions périodiques, ce qui entraîne la convergence de nos séries. Nous n'aurons en effet qu'à nous appuyer sur les principes les plus connus du «calcul des limites.»

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$. Soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = 2\pi$. Les γ_i dépendront évidemment de μ et des valeurs initiales des variables et elles s'annuleront avec elles.

Cela me permet d'écrire:

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \beta_i + a_i\mu + \sum b_{ik}\beta_k + \sum [m, p_1, p_2, \dots, p_n] \mu^m \beta_1^{p_1} \beta_2^{p_2} \dots \beta_n^{p_n} \\ &= \beta_i + \psi_i, \end{aligned}$$

les a , les b et les $[m, p_1, p_2, \dots, p_n]$ étant des coefficients constants.

On obtiendra les solutions périodiques de période 2π en cherchant les cas où:

$$\gamma_i = \beta_i.$$

On peut donc considérer μ comme une donnée de la question et chercher à résoudre par rapport aux n inconnues β les équations

$$(4) \quad \psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n = 0.$$

Nous savons que les ψ sont des fonctions holomorphes de μ et des β s'annulant avec les variables. (Voir théorème III § 2.)

Si le déterminant fonctionnel des ψ par rapport aux β (c'est à dire le déterminant des b_{ik}) n'est pas nul, on peut résoudre ces n équations et on trouve comme solution:

$$\beta_i = \theta_i(\mu),$$

les θ_i étant, d'après un théorème bien connu, des fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ . (Voir théorème IV § 2.)

C'est le cas que nous avons étudié plus haut et où les équations (2) n'ont pas de solution périodique.

On doit en conclure que pour les valeurs de μ suffisamment petites, les équations (1) admettent une solution périodique.

Supposons maintenant que le déterminant fonctionnel des ϕ soit nul; nous pourrions alors, en vertu du théorème VI § 2, éliminer entre les équations (4) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$; nous arriverions ainsi à une équation unique

$$\Phi = 0$$

dont le premier membre sera développé suivant les puissances de μ et de β_n .

Il n'y aurait d'exception que si les équations (4) n'étaient pas distinctes; mais dans ce cas nous leur adjoindrions une autre équation choisie arbitrairement.

Si l'on regarde μ et β_n comme les coordonnées d'un point dans un plan, l'équation $\Phi = 0$ représente une courbe passant par l'origine. A chacun des points de cette courbe correspondra une solution périodique, de sorte que pour étudier les solutions périodiques qui correspondent aux petites valeurs de μ et des β , il nous suffira de construire la partie de cette courbe qui avoisine l'origine.

Si le déterminant fonctionnel des ϕ est nul on aura, (pour $\mu = \beta_n = 0$):

$$\frac{d\Phi}{d\beta_n} = 0.$$

En d'autres termes, la courbe $\Phi = 0$ sera tangente à l'origine à la droite $\mu = 0$, ou bien encore pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ sera une équation en β_n qui admettra 0 comme racine multiple; j'appelle m l'ordre de multiplicité de cette racine.

En vertu du théorème V § 2 on pourra trouver m séries développées suivant les puissances fractionnaires et positives de μ , s'annulant avec μ et qui substituées à la place de β_n satisfassent à l'équation $\Phi = 0$.

Considérons l'intersection de la courbe $\Phi = 0$ ou plutôt de la portion de cette courbe qui avoisine l'origine avec deux droites $\mu = \varepsilon$, $\mu = -\varepsilon$ très voisines de la droite $\mu = 0$. On obtiendra les points d'intersection en faisant $\mu = \varepsilon$, puis $\mu = -\varepsilon$ dans les m séries dont je viens de parler.

Soit m_1 le nombre des points d'intersection de $\Phi = 0$ et $\mu = +\varepsilon$ réels et voisins de l'origine. Soit m_2 le nombre des points d'intersection de $\Phi = 0$ et $\mu = -\varepsilon$ réels et voisins de l'origine.

Les trois nombres m , m_1 et m_2 seront de même parité.

Si donc m est impair, m_1 et m_2 seront au moins égaux à 1. Donc il existera des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ , tant positives que négatives.

Comment une solution périodique peut-elle disparaître quand on fait varier μ d'une manière continue? Comment peut-il se faire que le nombre des solutions pour $\mu = +\varepsilon$ soit plus petit que pour $\mu = -\varepsilon$, que $m_1 < m_2$?

J'observe d'abord qu'une solution périodique ne peut disparaître quand μ passe de la valeur $-\varepsilon$ à la valeur $+\varepsilon$ que si pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi = 0$ admet une racine multiple; en d'autres termes *une solution périodique ne peut disparaître qu'après s'être confondue avec une autre solution périodique*. De plus m_1 et m_2 étant de même parité, la différence $m_2 - m_1$ est toujours paire.

Donc les solutions périodiques disparaissent par couples à la façon des racines réelles des équations algébriques.

Un cas particulier intéressant est celui où pour $\mu = 0$, les équations différentielles (1) admettent une infinité de solutions périodiques que j'écrirai:

$$x_1 = \varphi_1(t, h), \quad x_2 = \varphi_2(t, h), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t, h),$$

h étant une constante arbitraire.

Dans ce cas les équations (4) ne sont plus distinctes pour $\mu = 0$ et Φ contient μ en facteur de sorte que nous pouvons poser:

$$\Phi = \mu \Phi_1,$$

Φ_1 étant holomorphe en β_n et μ ; d'ailleurs Φ_1 dépendra aussi de h . La courbe $\Phi = 0$ se décompose alors en deux autres, à savoir la droite $\mu = 0$ et la courbe $\Phi_1 = 0$; c'est cette dernière courbe qu'il convient d'étudier.

La courbe $\Phi = 0$ passe forcément par l'origine; il n'en est pas toujours de même de $\Phi_1 = 0$; il faudra d'abord s'arranger pour l'y faire passer,

en disposant convenablement de h . Une fois qu'on l'y aura fait passer, on l'étudiera comme on a fait de la courbe $\Phi = 0$.

Si pour $\mu = \beta_n = 0$, $\frac{d\Phi_1}{d\beta_n}$ n'est pas nul, (ou plus généralement si pour $\mu = 0$, l'équation $\Phi_1 = 0$ admet $\beta_n = 0$ comme racine multiple d'ordre *impair*) il y aura encore des solutions périodiques pour les petites valeurs de μ .

Il arrivera souvent que, même avant l'élimination, quelques-unes des fonctions ϕ_i contiennent μ en facteur. Dans ce cas on commencerait par diviser par μ les équations correspondantes.

Si les équations (1) admettent une intégrale uniforme:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \text{const.}$$

les équations (4) ne seront pas distinctes à moins que l'on n'ait à la fois

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \dots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

pour

$$x_1 = \varphi_1(0), \quad x_2 = \varphi_2(0), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(0).$$

En effet il viendra identiquement:

$$F[\varphi_i(0) + \beta_i + \phi_i] = F[\varphi_i(0) + \beta_i].$$

Si par exemple pour $x_i = \varphi_i(0)$, $\frac{dF}{dx_i}$ n'est pas nul; on pourra tirer de cette équation:

$$\phi_1 = \psi_2 \theta_2 + \psi_3 \theta_3 + \dots + \psi_n \theta_n,$$

$\theta_2, \theta_3, \dots, \theta_n$ étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \psi_2, \psi_3, \dots, \psi_n.$$

La première des équations (4) est donc alors une conséquence des $n - 1$ dernières. On la supprimera alors pour la remplacer par une autre équation choisie arbitrairement.

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions X_1, X_2, \dots, X_n qui entrent dans les équations différentielles (1) dépendent du temps t . Les résultats seraient modifiés si le temps t n'entre pas dans ces équations,

Il y a d'abord entre les deux cas une différence qu'il est impossible de ne pas apercevoir. Nous avons supposé dans ce qui précède que les X_i étaient des fonctions périodiques du temps et que la période était 2π ; il en résultait que, si les équations admettaient une solution périodique, la période de cette solution devait être égale à 2π ou à un multiple de 2π . Si au contraire les X_i sont indépendants de t , la période d'une solution périodique peut être quelconque.

En second lieu, si les équations (1) admettent une solution périodique (et si les X ne dépendent pas de t), elles en admettent une infinité.

Si en effet

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t)$$

est une solution périodique des équations (1), il en sera de même (quelle que soit la constante h) de

$$x_1 = \varphi_1(t + h), \quad x_2 = \varphi_2(t + h), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t + h).$$

Ainsi le cas sur lequel nous nous sommes étendus d'abord et dans lequel pour $\mu = 0$, les équations (1) admettent une solution périodique et une seule, ne peut se présenter si les X ne dépendent pas de t .

Plaçons-nous donc dans le cas où le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) et supposons que pour $\mu = 0$, ces équations admettent une solution périodique de période T :

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad x_2 = \varphi_2(t), \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t).$$

Soit $\varphi_i(0) + \beta_i$ la valeur de x_i pour $t = 0$; soit $\varphi_i(0) + \gamma_i$ la valeur de x_i pour $t = T + \tau$. Posons ensuite, comme nous l'avons fait plus haut,

$$\gamma_i - \beta_i = \psi_i.$$

Les ψ_i seront des fonctions holomorphes de μ , de $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ et de τ s'annulant avec ces variables.

Nous avons donc à résoudre par rapport aux $n + 1$ inconnues

$$\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \tau$$

les n équations

$$(5) \quad \psi_1 = \psi_2 = \dots = \psi_n = 0.$$

Nous avons une inconnue de trop, nous pouvons donc poser arbitrairement par exemple

$$\beta_n = 0.$$

Nous tirerons ensuite des équations (5), $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$ et τ en fonctions holomorphes de μ s'annulant avec μ . Cela est possible à moins que le déterminant:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\psi_1}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\psi_2}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\psi_n}{d\beta_{n-1}} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{vmatrix}$$

ne soit nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.

Si ce déterminant était nul, au lieu de poser arbitrairement $\beta_n = 0$, on poserait par exemple $\beta_i = 0$, et la méthode ne serait en défaut que si tous les déterminants dans la matrice:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\psi_1}{d\beta_1} & \frac{d\psi_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\psi_1}{d\beta_n} & \frac{d\psi_1}{d\tau} \\ \frac{d\psi_2}{d\beta_1} & \frac{d\psi_2}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\psi_2}{d\beta_n} & \frac{d\psi_2}{d\tau} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\psi_n}{d\beta_1} & \frac{d\psi_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\psi_n}{d\beta_n} & \frac{d\psi_n}{d\tau} \end{vmatrix}$$

étaient nuls à la fois. (Il est à remarquer que le déterminant obtenu en supprimant la dernière colonne de cette matrice est toujours nul pour $\mu = \beta_i = \tau = 0$.)

Comme en général tous ces déterminants ne seront pas nuls à la fois, les équations (1) admettront pour les petites valeurs de μ , une solution périodique de période $T + \tau$.

§ 10. *Exposants caractéristiques.*

Reprenons les équations:

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i$$

et imaginons qu'elles admettent une solution périodique

$$x_i = \varphi_i(t).$$

Formons les équations aux variations (voir chapitre I) des équations (1) en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i$$

et négligeant les carrés des ξ .

Ces équations aux variations s'écriront:

$$(2) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1} \xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2} \xi_2 + \dots + \frac{dX_i}{dx_n} \xi_n.$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux ξ , et leurs coefficients $\frac{dX_i}{dx_k}$, (quand on y a remplacé x_i par $\varphi_i(t)$) sont des fonctions périodiques de t . Nous avons donc à intégrer des équations linéaires à coefficients périodiques.

On sait quelle est en général la forme des solutions de ces équations; on obtient n solutions particulières de la forme suivante:

$$(3) \quad \begin{aligned} \xi_1 &= e^{\alpha_1 t} S_{11}, & \xi_2 &= e^{\alpha_1 t} S_{21}, & \dots, & \xi_n &= e^{\alpha_1 t} S_{n1}, \\ \xi_1 &= e^{\alpha_2 t} S_{12}, & \xi_2 &= e^{\alpha_2 t} S_{22}, & \dots, & \xi_n &= e^{\alpha_2 t} S_{n2}, \\ & \dots & & & & & \\ \xi_1 &= e^{\alpha_n t} S_{1n}, & \xi_2 &= e^{\alpha_n t} S_{2n}, & \dots, & \xi_n &= e^{\alpha_n t} S_{nn}, \end{aligned}$$

les α étant des constantes et les S_{ik} des fonctions périodiques de t de même période que les $\varphi_i(t)$.

Les constantes α s'appellent les *exposants caractéristiques* de la solution périodique.

Si α est purement imaginaire de façon que son carré soit négatif, le module de $e^{\alpha t}$ est constant et égal à 1. Si au contraire α est réel, ou si α est complexe de telle façon que son carré ne soit pas réel, le module $e^{\alpha t}$ tend vers l'infini pour $t = +\infty$ ou pour $t = -\infty$. Si donc tous les α ont leurs carrés réels et négatifs, les quantités $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ resteront finies; je dirai alors que la solution périodique $x_i = \varphi_i(t)$ est stable; dans le cas contraire, je dirai que cette solution est instable.

Un cas particulier intéressant est celui où deux ou plusieurs des exposants caractéristiques α sont égaux entre eux. Dans ce cas les solutions des équations (2) ne peuvent plus se mettre sous la forme (3). Si par exemple

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

les équations (2) admettraient deux solutions particulières qui s'écriraient

$$\xi_i = e^{\alpha_1 t} S_{i,1}$$

et

$$\xi_i = t e^{\alpha_1 t} S_{i,1} + e^{\alpha_1 t} S_{i,2},$$

les $S_{i,1}$ et les $S_{i,2}$ étant des fonctions périodiques de t .

Si trois des exposants caractéristiques étaient égaux entre eux, on verrait apparaître, non seulement t , mais encore t^2 en dehors des signes trigonométriques et exponentiels.

Supposons que le temps t n'entre pas explicitement dans les équations (1) de telle sorte que les fonctions X_i ne dépendent pas de cette variable; supposons de plus que ces équations (1) admettent une intégrale

$$(4) \quad F(x_1, x_2, \dots, x_n) = C.$$

Il est aisé de voir que dans ce cas deux des exposants caractéristiques sont nuls.

On se trouve donc alors dans le cas d'exception que nous venons de signaler; mais il n'en résulte pas de difficulté; il est aisé en effet à l'aide de l'intégrale (4) d'abaisser d'une unité l'ordre des équations (1). Il n'y a plus alors que $n - 1$ exposants caractéristiques et il n'y en a plus qu'un qui soit nul.

Nous allons maintenant envisager un cas particulier qui est celui où les équations (1) ont la forme des équations de la dynamique. Écrivons-les donc sous la forme:

$$(1') \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i}, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

F étant une fonction quelconque de $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$; nous pourrions supposer, soit que F est indépendant de t ; soit que F dépend non seulement des x et des y , mais encore de t , et que par rapport à cette dernière variable, c'est une fonction périodique de période 2π .

Supposons que les équations (1') admettent une solution périodique de période 2π :

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t),$$

et formons les équations aux variations en posant:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \quad y_i = \psi_i(t) + \eta_i.$$

Nous avons vu dans le chapitre II que l'intégrale double:

$$\iint (dx_1 dy_1 + dx_2 dy_2 + \dots + dx_n dy_n)$$

est un invariant intégral, ou (ce qui revient au même) que si ξ_i, η_i et ξ'_i, η'_i sont deux solutions particulières quelconques des équations aux variations, on a

$$\sum_{i=1}^n (\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i) = \text{const.}$$

Je dis qu'il en résulte que les exposants caractéristiques sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Soient en effet ξ_i^0 et η_i^0 les valeurs initiales de ξ_i et de η_i pour $t = 0$ dans une des équations aux variations; soient ξ_i^1 et η_i^1 les valeurs correspondantes de ξ_i et de η_i pour $t = 2\pi$. Il est clair que les ξ_i^1 et les η_i^1 seront des fonctions linéaires des ξ_i^0 et des η_i^0 de telle sorte que la substitution:

$$T = (\xi_i^0, \eta_i^0; \xi_i^1, \eta_i^1)$$

sera une substitution linéaire.

Soit:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots & a_{2n,2n} \end{vmatrix}$$

le tableau des coefficients de cette substitution linéaire.

Formons l'équation en λ

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1,2n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2,2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n,1} & a_{2n,2} & \dots & a_{2n,2n} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Les $2n$ racines de cette équation seront ce qu'on appelle les $2n$ multiplicateurs de la substitution linéaire T . Mais cette substitution linéaire T ne peut pas être quelconque. Il faut qu'elle n'altère pas la forme bilinéaire:

$$\sum (\xi_i \eta'_i - \xi'_i \eta_i).$$

Pour cela, l'équation en λ doit être réciproque. Si donc on pose:

$$\lambda = e^{2\alpha\pi},$$

les quantités α devront être deux à deux égales et de signe contraire.

C. Q. F. D.

Il y aura donc en général n quantités α^2 distinctes. Nous les appellerons les *coefficients de stabilité* de la solution périodique considérée.

Si ces n coefficients sont tous réels et négatifs, la solution périodique sera stable, car les quantités ξ_i et η_i resteront inférieures à une limite donnée.

Il ne faut pas toutefois entendre ce mot de stabilité au sens absolu. En effet, nous avons négligé les carrés des ξ et des η et rien ne prouve qu'en tenant compte de ces carrés, le résultat ne serait pas changé. Mais nous pouvons dire au moins que les ξ et η , s'ils sont originellement très petits, resteront très petits pendant très longtemps. Nous pouvons ex-

primer ce fait en disant que la solution périodique jouit, sinon de la stabilité *séculaire*, du moins de la stabilité *temporaire*.

On peut se rendre compte de cette stabilité en se reportant aux valeurs des ξ_i ; on trouve en effet, pour la solution générale des équations aux variations:

$$\xi_i = \sum A_k e^{\alpha_k t} S_{ik},$$

les A_k étant des coefficients constants et les S_{ik} des séries trigonométriques.

Or si α_k^2 est réel négatif, on trouve

$$e^{\alpha_k t} = \cos t \sqrt{-\alpha_k^2} + i \sin t \sqrt{-\alpha_k^2},$$

de sorte que ξ_i s'exprime trigonométriquement.

Au contraire si un ou plusieurs des coefficients de stabilité devient réel positif ou imaginaire, la solution périodique considérée ne jouit plus de la stabilité temporaire.

On voit aisément en effet que ξ_i est alors représenté par une série dont le terme général est de la forme:

$$Ae^{ht} \cos(kt + mt + l)$$

où $(h + ik)^2$ est un des coefficients de stabilité, où m est un entier et l et A des constantes quelconques. Le défaut de stabilité se trouve ainsi mis en évidence.

Si deux des coefficients de stabilité deviennent égaux entre eux, ou si l'un d'eux devient nul, on trouvera en général dans la série qui représente ξ_i des termes de la forme:

$$Ate^{ht} \cos(kt + mt + l) \quad \text{ou} \quad At \cos(mt + l).$$

En résumé, ξ_i peut dans tous les cas être représenté par une série toujours convergente. Dans cette série le temps peut entrer sous le signe sinus ou cosinus, ou par l'exponentielle e^{ht} , ou enfin en dehors des signes trigonométriques ou exponentiels.

Si tous les coefficients de stabilité sont réels, négatifs et distincts, le temps n'apparaîtra que sous les signes sinus et cosinus et il y aura stabilité temporaire.

Si l'un des coefficients est positif ou imaginaire, le temps apparaîtra sous un signe exponentiel; si deux des coefficients sont égaux ou que

l'un d'eux soit nul, le temps apparaît en dehors de tout signe trigonométrique ou exponentiel.

Si donc tous les coefficients ne sont pas réels, négatifs et distincts, il n'y a pas en général de stabilité temporaire.

Toutes les fois que F ne dépend pas du temps t , l'un des n coefficients de stabilité est nul; car d'une part le temps n'entre pas explicitement dans les équations différentielles; d'autre part ces équations admettent une intégrale

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \text{const.}$$

Nous nous trouvons donc dans le cas dont nous avons parlé plus haut et où deux des exposants caractéristiques sont nuls. Mais, comme nous l'avons dit, cela ne peut créer une difficulté parce que l'on peut, à l'aide de l'intégrale connue, abaisser à $2n - 1$ l'ordre des équations (1'). Il n'y a plus alors que $2n - 1$ exposants caractéristiques; l'un d'eux est nul et les $2n - 2$ autres, aux carrés desquels on peut conserver le nom de coefficients de stabilité, sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Reprenons le déterminant que nous avons eu à envisager dans le paragraphe précédent.

Nous avons dans ce paragraphe envisagé d'abord le cas où les équations (1) dépendent du temps t et d'un paramètre μ , et admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique et une seule. Nous avons vu que si le déterminant fonctionnel:

$$\Delta = \frac{\partial(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n)}{\partial(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)} \neq 0$$

les équations admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ .

Ce déterminant peut s'écrire:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - 1 & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - 1 & \dots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - 1 \end{vmatrix}.$$

Or les exposants caractéristiques α sont donnés par l'équation:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{2a\pi} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{2a\pi} & \dots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{2a\pi} \end{vmatrix} = 0.$$

Dire que Δ est nul, c'est donc dire que l'un des exposants caractéristiques est nul de sorte que nous pouvons énoncer de la façon suivante le premier des théorèmes démontrés au paragraphe précédent.

Si les équations (1) qui dépendent d'un paramètre μ admettent pour $\mu = 0$ une solution périodique dont aucun des exposants caractéristiques ne soit nul, elles admettront encore une solution périodique pour les petites valeurs de μ .

§ 11. Solutions périodiques des équations de la dynamique.

Je prendrai, pour fixer les idées, les équations de la dynamique avec trois degrés de liberté, mais ce que je vais dire s'appliquerait évidemment au cas général. J'écrirai donc mes équations sous la forme:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, & \frac{dx_3}{dt} &= \frac{dF}{dy_3}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}, & \frac{dy_3}{dt} &= -\frac{dF}{dx_3}, \end{aligned}$$

F étant une fonction uniforme quelconque des x et des y , indépendante de t .

Je supposerai ensuite que x_1, x_2 et x_3 sont des variables linéaires, mais que y_1, y_2 et y_3 sont des variables angulaires, c'est à dire que F est une fonction périodique de y_1, y_2 et y_3 avec la période 2π , de telle façon que la situation du système ne change pas quand une ou plusieurs des trois quantités y augmente d'un multiple de 2π . (Cf. chapitre I.)

Je supposerai de plus que F dépend d'un paramètre arbitraire μ et peut se développer suivant les puissances croissantes de ce paramètre de telle sorte que l'on ait:

$$F = F_0 + \mu F_1 + \mu^2 F_2 + \mu^3 F_3 + \dots$$

Je supposerai enfin que F_0 ne dépend que des x et est indépendant des y de telle sorte que:

$$\frac{dF_0}{dy_1} = \frac{dF_0}{dy_2} = \frac{dF_0}{dy_3} = 0.$$

Rien n'est plus simple alors que d'intégrer les équations (1) quand $\mu = 0$; elles s'écrivent en effet:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx_2}{dt} = \frac{dx_3}{dt} = 0,$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_2}, \quad \frac{dy_3}{dt} = -\frac{dF_0}{dx_3}.$$

Ces équations montrent d'abord que x_1 , x_2 et x_3 sont des constantes. On en conclut que

$$-\frac{dF_0}{dx_1}, \quad -\frac{dF_0}{dx_2}, \quad -\frac{dF_0}{dx_3}$$

qui ne dépendent que de x_1 , x_2 et x_3 sont aussi des constantes que nous appellerons pour abrégier n_1 , n_2 et n_3 et qui sont complètement définies quand on se donne les valeurs constantes de x_1 , x_2 et x_3 . Il vient alors:

$$y_1 = n_1 t + \bar{\omega}_1, \quad y_2 = n_2 t + \bar{\omega}_2, \quad y_3 = n_3 t + \bar{\omega}_3,$$

$\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$ étant de nouvelles constantes d'intégration.

Quelle est la condition pour que la solution ainsi trouvée soit périodique et de période T . Il faut que si l'on change t en $t + T$, y_1 , y_2 et y_3 augmentent d'un multiple de 2π , c'est à dire que:

$$n_1 T, n_2 T \quad \text{et} \quad n_3 T$$

soient des multiples de 2π .

Ainsi pour que la solution que nous venons de trouver soit périodique, il faut et il suffit que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 soient commensurables entre eux.

Quant à la période T , ce sera le plus petit commun multiple des trois quantités:

$$\frac{2\pi}{n_1}, \frac{2\pi}{n_2} \text{ et } \frac{2\pi}{n_3}.$$

Nous excluons, au moins provisoirement de nos recherches, le cas où les trois fonctions $\frac{dF_0}{dx_1}, \frac{dF_0}{dx_2}$ et $\frac{dF_0}{dx_3}$ ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. Si on laisse ce cas de côté, on peut toujours choisir x_1, x_2 et x_3 de telle façon que n_1, n_2 et n_3 aient telles valeurs que l'on veut, au moins dans un certain domaine. Il y aura donc une infinité de choix possibles pour les trois constantes x_1, x_2 et x_3 qui conduiront à des solutions périodiques.

Je me propose de rechercher s'il existe encore des solutions périodiques de période T lorsque μ n'est plus égal à 0.

Pour le prouver je vais employer un raisonnement analogue à celui du § 9.

Supposons que μ cesse d'être nul, et imaginons que, dans une certaine solution, les valeurs des x et des y pour $t = 0$ soient respectivement:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \delta a_1, & x_2 &= a_2 + \delta a_2, & x_3 &= a_3 + \delta a_3, \\ y_1 &= \bar{w}_1 + \delta \bar{w}_1, & y_2 &= \bar{w}_2 + \delta \bar{w}_2, & y_3 &= \bar{w}_3 + \delta \bar{w}_3. \end{aligned}$$

Supposons que, dans cette même solution, les valeurs des x et des y pour $t = T$ soient

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + \delta a_1 + \Delta a_1, \\ x_2 &= a_2 + \delta a_2 + \Delta a_2, \\ x_3 &= a_3 + \delta a_3 + \Delta a_3, \\ y_1 &= \bar{w}_1 + n_1 T + \delta \bar{w}_1 + \Delta \bar{w}_1, \\ y_2 &= \bar{w}_2 + n_2 T + \delta \bar{w}_2 + \Delta \bar{w}_2, \\ y_3 &= \bar{w}_3 + n_3 T + \delta \bar{w}_3 + \Delta \bar{w}_3. \end{aligned}$$

La condition pour que cette solution soit périodique de période T c'est que l'on ait:

$$(2) \quad \Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = \Delta \bar{\omega}_1 = \Delta \bar{\omega}_2 = \Delta \bar{\omega}_3 = 0.$$

Les six équations (2) ne sont pas distinctes. En effet, comme $F = \text{const.}$ est une intégrale des équations (1), et que d'ailleurs F est périodique par rapport aux y , on a:

$$\begin{aligned} F(a_i + \delta a_i, \bar{\omega}_i + \delta \bar{\omega}_i) &= F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i, \bar{\omega}_i + n_i T + \delta \bar{\omega}_i + \Delta \bar{\omega}_i) \\ &= F(a_i + \delta a_i + \Delta a_i, \bar{\omega}_i + \delta \bar{\omega}_i + \Delta \bar{\omega}_i). \end{aligned}$$

Il nous suffira donc de satisfaire à cinq des équations (2). Je supposerai de plus:

$$\bar{\omega}_1 = \delta \bar{\omega}_1 = 0,$$

ce qui revient à prendre pour origine du temps l'époque où y_1 est nul. Il est aisé de voir que les Δa_i et les $\Delta \bar{\omega}_i$ sont des fonctions holomorphes de μ , des δa_i et des $\delta \bar{\omega}_i$ s'annulant quand toutes ces variables s'annulent.

Il s'agit donc de démontrer que l'on peut tirer des cinq dernières équations (2) $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta \bar{\omega}_2$ et $\delta \bar{\omega}_3$ en fonctions de μ .

Remarquons que quand μ est nul, on a

$$\Delta a_1 = \Delta a_2 = \Delta a_3 = 0.$$

Par conséquent $\Delta a_1, \Delta a_2$ et Δa_3 , développés suivant les puissances de μ , des δa_i et des $\delta \bar{\omega}_i$, contiennent μ en facteur. Nous supprimerons ce facteur μ , et nous écrirons par conséquent les cinq équations (2) que nous avons à résoudre sous la forme:

$$(3) \quad \frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{\Delta a_3}{\mu} = \Delta \bar{\omega}_1 = \Delta \bar{\omega}_2 = \Delta \bar{\omega}_3 = 0.$$

Il nous faut déterminer $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$ de telle façon que ces équations soient satisfaites pour

$$(4) \quad \mu = \delta \bar{\omega}_2 = \delta \bar{\omega}_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0.$$

Voyons ce que deviennent les premiers membres des équations (3) quand on y fait $\mu = 0$.

Il vient:

$$n_1 T + \Delta \bar{\omega}_1 = + \int_0^T \frac{dy_1}{dt} dt = - \int_0^T \frac{dF}{dx_1} dt = - \int_0^T \frac{dF_0}{d(a_1 + \delta a_1)} dt,$$

d'où:

$$\Delta \bar{\omega}_1 = - T \left(\frac{dF_0}{dx_1} + n_1 \right)$$

et de même:

$$\Delta \bar{\omega}_2 = - T \left(\frac{dF_0}{dx_2} + n_2 \right),$$

$$\Delta \bar{\omega}_3 = - T \left(\frac{dF_0}{dx_3} + n_3 \right).$$

Il importe d'observer que dans F_0 il faut remplacer x_1, x_2 et x_3 par $a_1 + \delta a_1, a_2 + \delta a_2, a_3 + \delta a_3$; en effet pour $\mu = 0$, F se réduit à F_0 et x_1, x_2, x_3 à des constantes qui restent constamment égales à leurs valeurs initiales $a_1 + \delta a_1, a_2 + \delta a_2, a_3 + \delta a_3$.

Il vient d'autre part:

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{dx_2}{dt} dt = \frac{1}{\mu} \int_0^T \frac{dF}{dy_2} dt$$

ou puisque F_0 ne dépend pas de y_2 :

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{d}{dy_2} \left(\frac{F - F_0}{\mu} \right) dt$$

ou pour $\mu = 0$

$$\frac{\Delta a_2}{\mu} = \int_0^T \frac{dF_1}{dy_2} dt.$$

Supposons que μ , les $\delta \bar{\omega}$ et les δa soient nuls à la fois; il faudra alors faire dans F_1

$$x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \quad x_3 = a_3, \quad y_1 = n_1 t, \quad y_2 = n_2 t + \bar{\omega}_2, \quad y_3 = n_3 t + \bar{\omega}_3.$$

F_1 deviendra alors une fonction périodique de t de période T , et une fonction périodique de $\bar{\omega}_2$ et de $\bar{\omega}_3$ de période 2π .

Soit ϕ la valeur moyenne de F_1 considérée comme fonction périodique de t . Il viendra:

$$\frac{\Delta a_2}{u} = \int_0^T \frac{dF_1}{d\bar{\omega}_2} dt = T \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_2}$$

et de même

$$\frac{\Delta a_3}{\mu} = T \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_3}.$$

Nous devons donc choisir $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$ de façon à satisfaire aux équations

$$(5) \quad \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_2} = \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_3} = 0.$$

Cela est toujours possible; en effet la fonction ϕ est périodique en $\bar{\omega}_2$ et en $\bar{\omega}_3$ et elle est finie; donc elle a au moins un maximum et un minimum, pour lesquels ses deux dérivées doivent s'annuler. Quand on aura choisi de la sorte $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$, on verra que les équations (3) sont satisfaites quand on y fait à la fois:

$$\mu = \delta\bar{\omega}_2 = \delta\bar{\omega}_3 = \delta a_1 = \delta a_2 = \delta a_3 = 0.$$

Nous pourrions donc tirer des équations (3) les cinq inconnues δa_i et $\delta\bar{\omega}_i$ sous la forme de fonctions holomorphes de μ , s'annulant avec μ . Il n'y aurait d'exception que si le déterminant fonctionnel:

$$\frac{\partial \left(\frac{\Delta a_2}{\mu}, \frac{\Delta a_3}{\mu}, \Delta\bar{\omega}_1, \Delta\bar{\omega}_2, \Delta\bar{\omega}_3 \right)}{\partial (\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta\bar{\omega}_2, \delta\bar{\omega}_3)}$$

était nul. Mais pour $\mu = 0$, $\Delta\bar{\omega}_1$, $\Delta\bar{\omega}_2$ et $\Delta\bar{\omega}_3$ sont indépendants de $\delta\bar{\omega}_2$ et de $\delta\bar{\omega}_3$, de sorte que ce déterminant fonctionnel est le produit de deux autres:

$$\frac{\partial \left(\frac{\Delta a_2}{\mu}, \frac{\Delta a_3}{\mu} \right)}{\partial (\delta\bar{\omega}_2, \delta\bar{\omega}_3)} \quad \text{et} \quad \frac{\partial (\Delta\bar{\omega}_1, \Delta\bar{\omega}_2, \Delta\bar{\omega}_3)}{\partial (\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3)}.$$

Si l'on supprime les facteurs T^2 et $-T^3$, le premier de ces déterminants est égal au hessien de ϕ par rapport à $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$ et le second au hessien de F_n par rapport à x_1^0 , x_2^0 et x_3^0 .

Si donc aucun de ces deux hessiens n'est nul, il sera possible de satisfaire aux cinq équations (3) et par conséquent pour des valeurs suffisamment petites de μ , il existera une solution périodique de période T .

C. Q. F. D.

Nous allons maintenant chercher à déterminer, non plus seulement les solutions périodiques de période T , mais les solutions de période peu différente de T . Nous avons pris pour point de départ les trois nombres n_1, n_2, n_3 ; nous aurions pu tout aussi bien choisir trois autres nombres n'_1, n'_2, n'_3 , pourvu qu'ils soient commensurables entre eux, et nous serions arrivés à une autre solution périodique dont la période T aurait été le plus petit commun multiple de $\frac{2\pi}{n'_1}, \frac{2\pi}{n'_2}, \frac{2\pi}{n'_3}$.

Si nous prenons en particulier:

$$n'_1 = n_1(1 + \varepsilon), \quad n'_2 = n_2(1 + \varepsilon), \quad n'_3 = n_3(1 + \varepsilon)$$

les trois nombres n'_1, n'_2, n'_3 seront commensurables entre eux puisqu'ils sont proportionnels aux trois nombres n_1, n_2 et n_3 .

Il nous conduiront donc à une solution périodique de période:

$$T' = \frac{1 + \varepsilon}{T}$$

de telle façon que nous aurons:

$$(6) \quad x_i = \varphi_i(t, \mu, \varepsilon), \quad y_i = \varphi'_i(t, \mu, \varepsilon),$$

les φ_i et les φ'_i étant des fonctions développables suivant les puissances de μ et de ε , et périodiques en t , mais de façon que la période dépende de ε .

Si dans F nous remplaçons les x_i et les y_i par leurs valeurs (4), F doit devenir une constante indépendante du temps (puisque $F = \text{const.}$ est une des intégrales des équations (1)). Mais cette constante qui est dite constante des forces vives, dépendra de μ et de ε et pourra être développée suivant les puissances croissantes de ces variables.

Si la constante des forces vives B est une donnée de la question l'équation

$$F(\mu, \varepsilon) = B$$

peut être regardée comme une relation qui lie ε à μ . Si donc nous nous donnons arbitrairement B , il existera toujours une solution périodique quelle que soit la valeur choisie pour cette constante, mais la période dépendra de ε et par conséquent de μ .

Un cas plus particulier que celui que nous venons de traiter en détail est celui où il n'y a que deux degrés de liberté. F ne dépend alors que de quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2 et la fonction ϕ ne dépend plus que d'une seule variable $\bar{\omega}_2$. Les relations (5) se réduisent alors à

$$(7) \quad \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_2} = 0$$

et le hessien de ϕ se réduit à $\frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_2^2}$. D'où cette conclusion:

A chacune des racines simples de l'équation (7) correspond une solution périodique des équations (1), qui existe pour toutes les valeurs de μ suffisamment petites.

Je pourrais même ajouter qu'il en est encore de même pour chacune des racines d'ordre impair ainsi que nous l'avons vu au § 9, et que cette équation admet toujours de pareilles racines puisque la fonction ϕ a au moins un maximum qui ne peut correspondre qu'aux racines impaires de l'équation (7).

Revenons au cas où l'on a trois degrés de liberté, et où la période est constante et égale à T .

Je dis que $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ peuvent se développer suivant les puissances croissantes de μ . En effet, en vertu du théorème III § 2, les x et les y peuvent être développés suivant les puissances de μ , et de $\delta a_1, \delta a_2, \delta a_3, \delta \bar{\omega}_2$ et $\delta \bar{\omega}_3$. Mais imaginons que l'on ait déterminé les δa et les $\delta \bar{\omega}$ de façon que la solution soit périodique de période T . On tirera alors les δa et les $\delta \bar{\omega}$ des équations (3) sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de μ , de sorte que les x et les y seront finalement ordonnées suivant les puissances de μ .

La solution devant être périodique de période T quel que soit μ , les coefficients des diverses puissances de μ seront des fonctions périodiques de t .

Remarquons de plus que l'on peut toujours supposer que l'origine du temps ait été choisie de telle sorte que y_1 s'annule avec t , et que cela ait lieu quel que soit μ . Alors pour $t=0$ on aura:

$$0 = y_1^0 = y_1^1 = y_1^2 = \dots$$

L'existence et la convergence de ces séries étant ainsi établie, je vais déterminer les coefficients.

Pour cela, je vais chercher à satisfaire aux équations (1) en faisant¹

$$(8) \quad \begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + \mu x_1^1 + \mu^2 x_1^2 + \dots, \\ x_2 &= x_2^0 + \mu x_2^1 + \mu^2 x_2^2 + \dots, \\ x_3 &= x_3^0 + \mu x_3^1 + \mu^2 x_3^2 + \dots, \\ y_1 &= y_1^0 + \mu y_1^1 + \mu^2 y_1^2 + \dots, \\ y_2 &= y_2^0 + \mu y_2^1 + \mu^2 y_2^2 + \dots, \\ y_3 &= y_3^0 + \mu y_3^1 + \mu^2 y_3^2 + \dots. \end{aligned}$$

Dans ces formules, x_1^0, x_2^0, x_3^0 désignent les valeurs constantes que j'avais été conduit plus haut à attribuer à x_1, x_2 et x_3 quand je supposais $\mu = 0$ et qui sont telles que:

$$\frac{d}{dx_1^0} F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_1, \quad \frac{d}{dx_2^0} F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_2, \quad \frac{d}{dx_3^0} F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0) = -n_3.$$

On a de plus:

$$y_i^0 = n_i t + \bar{\omega}_i.$$

Enfin les x_i^1 , les y_i^1 , les x_i^2 , les y_i^2 etc. sont des fonctions du temps qu'il s'agira de déterminer et qui devront être périodiques de période T .

Dans F , à la place des x et des y , substituons leurs valeurs (8), puis développons F suivant les puissances croissantes de μ de telle sorte que l'on ait:

$$F = \Phi_0 + \mu \Phi_1 + \mu^2 \Phi_2 + \dots$$

Il est clair que

$$\Phi_0 = F_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$$

ne dépend que des x_i^0 ; que

$$(9) \quad \Phi_1 = F_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0, y_1^0, y_2^0, y_3^0) + x_1^1 \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^1 \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^1 \frac{dF_0}{dx_3^0}$$

¹ Les chiffres placés en haut et à droite des lettres x et y dans les équations (8) sont des indices et non des exposants.

ne dépend que des x_i^0 , des y_i^0 et des x_i^1 ; que Φ_2 ne dépend que des x_i^0 , des y_i^0 , des x_i^1 , des y_i^1 et des x_i^2 etc.

Plus généralement, je puis écrire:

$$\Phi_k = \theta_k + x_1^k \frac{dF_0}{dx_1^0} + x_2^k \frac{dF_0}{dx_2^0} + x_3^k \frac{dF_0}{dx_3^0} = \theta_k - n_1 x_1^k - n_2 x_2^k - n_3 x_3^k,$$

où θ_k dépend seulement

$$\begin{aligned} &\text{des } x_i^0, \text{ des } x_i^1, \dots \text{ et des } x_i^{k-1}, \\ &\text{des } y_i^0, \text{ des } y_i^1, \dots \text{ et des } y_i^{k-1}. \end{aligned}$$

Je puis ajouter que par rapport à y_1^0, y_2^0, y_3^0 la fonction θ_k est une fonction périodique de période 2π . L'équation (9) montre que $\theta_1 = F_1$.

Cela posé les équations différentielles peuvent s'écrire, en égalant les puissances de même nom de μ :

$$\frac{dx_1^0}{dt} = \frac{dx_2^0}{dt} = \frac{dx_3^0}{dt} = 0, \quad \frac{dy_1^0}{dt} = n_1, \quad \frac{dy_2^0}{dt} = n_2, \quad \frac{dy_3^0}{dt} = n_3.$$

On trouve ensuite:

$$(10) \quad \frac{dx_1^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_1^0}, \quad \frac{dx_2^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_2^0}, \quad \frac{dx_3^1}{dt} = \frac{dF_1}{dy_3^0}$$

et

$$(11) \quad \frac{dy_1^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_1^0}, \quad \frac{dy_2^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_2^0}, \quad \frac{dy_3^1}{dt} = -\frac{d\Phi_1}{dx_3^0},$$

et plus généralement:

$$(10') \quad \frac{dx_i^k}{dt} = \frac{d\Phi_k}{dy_i^0}$$

et

$$(11') \quad \frac{dy_i^k}{dt} = -\frac{d\Phi_k}{dx_i^0} = -\frac{d\theta_k}{dx_i^0} - x_1^k \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_i^0} - x_2^k \frac{d^2 F_0}{dx_2^0 dx_i^0} - x_3^k \frac{d^2 F_0}{dx_3^0 dx_i^0}.$$

Intégrons d'abord les équations (10). Dans F_1 nous remplacerons y_1^0, y_2^0, y_3^0 par leurs valeurs:

$$n_1 t + \bar{\omega}_1, \quad n_2 t + \bar{\omega}_2, \quad n_3 t + \bar{\omega}_3.$$

Puisque y_1^0 doit s'annuler avec t , $\bar{\omega}_1$ sera nul. Alors les seconds membres des équations (10) sont des fonctions périodiques de t de période

T ; ces seconds membres peuvent donc être développés en séries procédant suivant les sinus et les cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Pour que les valeurs de x_1^1, x_2^1 et x_3^1 tirées des équations (10) soient des fonctions périodiques de t , il faut et il suffit que ces séries ne contiennent pas de termes tout connus.

Je puis écrire en effet:

$$F_1 = \sum A \sin(m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h),$$

où m_1, m_2, m_3 sont des entiers positifs ou négatifs et où A et h sont des fonctions de x_1^0, x_2^0, x_3^0 . J'écrirai pour abréger:

$$F_1 = \sum A \sin \omega$$

en posant

$$\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h.$$

Je trouverai alors

$$\frac{dF_1}{dy_1^0} = \sum A m_1 \cos \omega, \quad \frac{dF_1}{dy_2^0} = \sum A m_2 \cos \omega, \quad \frac{dF_1}{dy_3^0} = \sum A m_3 \cos \omega$$

et

$$\omega = t(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + h + m_2 \bar{\omega}_2 + m_3 \bar{\omega}_3.$$

Parmi les termes de ces séries, je distinguerai ceux pour lesquels

$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$

et qui sont indépendants de t . Ces termes existent puisque nous avons supposé que les trois nombres n_1, n_2 et n_3 sont commensurables entre eux.

Je poserai alors

$$\phi = \mathbf{S} A \sin \omega, \quad (m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0, \quad \omega = h + m_2 \bar{\omega}_2 + m_3 \bar{\omega}_3)$$

la sommation représentée par le signe \mathbf{S} s'étendant à tous les termes de F_1 pour lesquels le coefficient de t est nul. Nous aurons alors:

$$\frac{d\phi}{d\bar{\omega}_2} = \mathbf{S} A m_2 \cos \omega, \quad \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_3} = \mathbf{S} A m_3 \cos \omega.$$

Si donc on a :

$$(12) \quad \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_2} = \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_3} = 0,$$

il viendra :

$$(13) \quad SAm_1 \cos \omega = 0, \quad SAm_2 \cos \omega = 0, \quad SAm_3 \cos \omega = 0.$$

La première des équations (11) est en effet une conséquence des deux autres, puisque en vertu de la relation $m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$, on a identiquement

$$n_1 SAm_1 \cos \omega + n_2 SAm_2 \cos \omega + n_3 SAm_3 \cos \omega = 0.$$

Si donc les relations (12) sont satisfaites, les séries $\sum Am_i \cos \omega$ ne contiendront pas de terme tout connu, et les équations (10) nous donneront :

$$x_1^1 = \sum \frac{Am_1 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_1^1, \quad x_2^1 = \sum \frac{Am_2 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_2^1,$$

$$x_3^1 = \sum \frac{Am_3 \sin \omega}{m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3} + C_3^1,$$

C_1^1 , C_2^1 et C_3^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Il me reste à démontrer que l'on peut choisir les constantes $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$ de façon à satisfaire aux relations (10). La fonction ϕ est une fonction périodique de $\bar{\omega}_2$ et de $\bar{\omega}_3$ qui ne change pas quand l'une de ces deux variables augmente de 2π . De plus elle est finie, elle aura donc au moins un maximum et un minimum. Il y a donc au moins deux manières de choisir $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$ de façon à satisfaire aux relations (12).

Je pourrais même ajouter qu'il y en a au moins quatre, sans pouvoir toutefois affirmer qu'il en est encore de même quand le nombre de degrés de liberté est supérieur à trois.

Je vais maintenant chercher à déterminer à l'aide des équations (11) les trois fonctions y_i^1 et les trois constantes C_i^1 .

Nous pouvons regarder comme connus les x_i^0 et les y_i^0 ; les x_i^1 sont connus également aux constantes près C_i^1 . Je puis donc écrire les équations (11) sous la forme suivante :

$$(14) \quad \frac{dy_i^1}{dt} = H_i - C_1^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_i^0} - C_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_2^0 dx_i^0} - C_3^1 \frac{d^2 F_0}{dx_3^0 dx_i^0},$$

où les H_i représentent des fonctions entièrement connues développées en séries suivant les sinus et cosinus des multiples de $\frac{2\pi t}{T}$. Les coefficients de C_1^1 , C_2^1 et C_3^1 sont des constantes que l'on peut regarder comme connues.

Pour que la valeur de y_i^1 tirée de cette équation soit une fonction périodique de t , il faut et il suffit que dans le second membre le terme tout connu soit nul. Si donc H_i^0 désigne le terme tout connu de la série trigonométrique H_i , je devrai avoir:

$$(15) \quad C_1^1 \frac{d^2 F_0}{dx_1^0 dx_i^0} + C_2^1 \frac{d^2 F_0}{dx_2^0 dx_i^0} + C_3^1 \frac{d^2 F_0}{dx_3^0 dx_i^0} = H_i^0.$$

Les trois équations linéaires (15) déterminent les trois constantes C_1^1 , C_2^1 et C_3^1 .

Il n'y aurait d'exception que si le déterminant de ces trois équations était nul; c'est à dire si le hessien de F_0 par rapport à x_1^0 , x_2^0 et x_3^0 était nul; nous excluons ce cas.

Les équations (14) me donneront donc:

$$y_1^1 = \eta_1^1 + k_1^1, \quad y_2^1 = \eta_2^1 + k_2^1, \quad y_3^1 = \eta_3^1 + k_3^1,$$

les η_i^1 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues s'annulant avec t , et les k_i^1 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Venons maintenant aux équations (10') en y faisant $k = 2$ et $i = 1, 2, 3$ et cherchons à déterminer à l'aide des trois équations ainsi obtenues, les trois fonctions x_i^2 et les trois constantes k_i^1 .

Il est aisé de voir que nous avons:

$$\Theta_2 = \Omega_2 + y_1^1 \frac{dF_1}{dy_1^0} + y_2^1 \frac{dF_1}{dy_2^0} + y_3^1 \frac{dF_1}{dy_3^0},$$

où Ω_2 dépend seulement des x_i^0 , des y_i^0 et des x_i^1 et où l'on a, comme plus haut:

$$\frac{dF_1}{dy_i^0} = \sum A m_i \cos \omega.$$

Les équations (10') s'écrivent alors:

$$\frac{dx_i^2}{dt} = \frac{d\Omega_2}{dy_i^0} + \sum_k y_k^1 \frac{d^2 F_1}{dy_k^0 dy_i^0}$$

ou

$$(16) \quad \frac{dx_i^2}{dt} = H'_i - k_1^1 \sum Am_1 m_i \sin \omega - k_2^1 \sum Am_2 m_i \sin \omega - k_3^1 \sum Am_3 m_i \sin \omega,$$

H'_i étant une fonction périodique de t , que l'on peut regarder comme entièrement connue. Pour que l'on puisse tirer de cette équation x_i^2 sous la forme d'une fonction périodique, il faut et il suffit que les seconds membres des équations (16), développés en séries trigonométriques, ne possèdent pas de termes tout connus. Nous devons donc disposer des quantités k_i^1 de manière à annuler ces termes tout connus. Nous serions ainsi conduits à trois équations linéaires entre les trois quantités k_i^1 ; mais comme le déterminant de ces trois équations est nul, il y a une petite difficulté et je suis forcé d'entrer dans quelques détails.

Comme y_1^1 s'annule avec t , on doit avoir:

$$k_1^1 = 0;$$

nous n'aurons plus alors que deux inconnues k_2^1 et k_3^1 et trois équations à satisfaire; mais ces trois équations ne sont pas distinctes comme nous allons le voir.

Appelons en effet E_i le terme tout connu de H'_i , ces trois équations s'écriront:

$$(17) \quad \begin{aligned} E_1 &= k_2^1 \mathbf{S} Am_2 m_1 \sin \omega + k_3^1 \mathbf{S} Am_3 m_1 \sin \omega, \\ E_2 &= k_2^1 \mathbf{S} Am_2^2 \sin \omega + k_3^1 \mathbf{S} Am_3 m_2 \sin \omega, \\ E_3 &= k_2^1 \mathbf{S} Am_2 m_3 \sin \omega + k_3^1 \mathbf{S} Am_3^2 \sin \omega, \end{aligned}$$

en conservant au signe de sommation \mathbf{S} le même sens que plus haut. Je ne considérerai d'abord que les deux dernières des équations (17) que j'écrirai:

$$\begin{aligned} - E_2 &= k_2^1 \frac{d^2 \phi}{d\bar{\omega}_2^2} + k_3^1 \frac{d^2 \phi}{d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_3}, \\ - E_3 &= k_2^1 \frac{d^2 \phi}{d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_3} + k_3^1 \frac{d^2 \phi}{d\bar{\omega}_3^2}. \end{aligned}$$

De ces deux équations on peut tirer k_2^1 et k_3^1 , à moins que le hessien de ϕ par rapport à $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$ ne soit nul. Si l'on donne aux k_i^1 les

valeurs ainsi obtenues, les deux dernières équations (16) nous donneront x_2^2 et x_3^2 sous la forme suivante:

$$x_2^2 = \xi_2^2 + C_2^2, \quad x_3^2 = \xi_3^2 + C_3^2,$$

les ξ_i^2 étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les C_i^2 étant de nouvelles constantes d'intégration.

Pour trouver x_1^2 nous pouvons, au lieu d'employer la première des équations (16), nous servir des considérations suivantes:

Les équations (1) admettent une intégrale:

$$F = B,$$

B étant une constante d'intégration que je supposerai développée suivant les puissances de μ en écrivant:

$$B = B_0 + \mu B_1 + \mu^2 B_2 + \dots,$$

de sorte que l'on a:

$$\Phi_0 = B_0, \quad \Phi_1 = B_1, \quad \Phi_2 = B_2, \dots,$$

B_0, B_1, B_2 etc. étant autant de constantes différentes.

Le premier membre de l'équation:

$$\Phi_2 = B_2$$

dépend des x_i^0 , des y_i^0 , des x_i^1 , des y_i^1 , de x_2^2 et de x_3^2 qui sont des fonctions connues de t et de x_1^2 que nous n'avons pas encore calculé. De cette équation, nous pourrons donc tirer x_1^2 sous la forme suivante:

$$x_1^2 = \xi_1^2 + C_1^2.$$

ξ_1^2 sera une fonction périodique de t entièrement déterminée et C_1^2 est une constante qui dépend de B_2 , de C_2^2 et de C_3^2 .

Nous pouvons conclure de là que la première des équations (17) doit être satisfaite et par conséquent que ces trois équations (17) ne sont pas distinctes.

Prenons maintenant les équations (11') et faisons-y $k=2$; nous ob-

tiendrons trois équations qui nous permettront de déterminer les constantes C_1^1 , C_1^2 et C_1^3 et d'où l'on tirera en outre les y_i^2 sous la forme:

$$y_1^2 = \eta_1^2 + k_1^2, \quad y_2^2 = \eta_2^2 + k_2^2, \quad y_3^2 = \eta_3^2 + k_1^2,$$

les η étant des fonctions périodiques de t entièrement connues et les k_i^2 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Reprenons ensuite les équations (10') en y faisant $k = 3$; si nous supposons $k_1^2 = 0$, nous pourrons tirer des trois équations ainsi obtenues, d'abord les deux constantes k_2^2 et k_3^2 , puis les x_i^3 sous la forme:

$$x_i^3 = \xi_i^3 + C_i^3,$$

les ξ étant des fonctions périodiques connues de t et les C_i^3 étant trois nouvelles constantes d'intégration.

Et ainsi de suite.

Voilà un procédé pour trouver des séries ordonnées suivant les puissances de μ , périodiques de période T par rapport au temps et satisfaisant aux équations (1). *Ce procédé ne serait en défaut que si le hessien de F_0 par rapport aux x_i^0 était nul ou si le hessien de ϕ par rapport à $\bar{\omega}_2$ et $\bar{\omega}_3$ était nul.*

Ce que nous venons de dire s'applique en particulier à une équation que l'on rencontre quelquefois en mécanique céleste et dont plusieurs géomètres se sont déjà occupés. Cette équation est la suivante:

$$(18) \quad \frac{d^2\rho}{dt^2} + n^2\rho + m\rho^3 = \mu R(\rho, t).$$

n et m sont des constantes, μ est un paramètre très petit et R est une fonction de ρ et de t , développée suivant les puissances croissantes de ρ et périodique par rapport à t .

Pour bien nous en rendre compte, il faut d'abord ramener l'équation (18) à la forme canonique des équations de la dynamique. Cela se fera en posant:

$$\xi = t, \quad \frac{d\rho}{dt} = \sigma, \quad F = \frac{\sigma^2}{2} + \frac{n^2\rho^2}{2} + \frac{m\rho^4}{4} - \mu \int R(\rho, \xi) d\rho + \eta,$$

ξ et η étant deux nouvelles variables auxiliaires et l'intégrale $\int R(\rho, \xi) d\rho$ étant calculée en regardant ξ comme une constante. On trouve alors:

$$(19) \quad \frac{d\rho}{dt} = \frac{dF}{d\sigma}, \quad \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{dF}{d\rho}, \quad \frac{d\xi}{dt} = \frac{dF}{d\eta},$$

auxquelles nous pourrions adjoindre (η étant restée jusqu'ici complètement arbitraire) l'équation suivante:

$$(19) \quad \frac{d\eta}{dt} = -\frac{dF}{d\xi}$$

qui complète un système canonique.

Quand $\mu = 0$ l'intégrale générale de l'équation (18) s'écrit

$$(20) \quad \rho = h \operatorname{sn}(gt + \bar{\omega}), \quad \sigma = hg \operatorname{cn}(gt + \bar{\omega}) \operatorname{dn}(gt + \bar{\omega})$$

où g et $\bar{\omega}$ sont deux constantes d'intégration et où h , ainsi que le module du sinus amplitude sont deux fonctions de g faciles à déterminer.

Nous allons changer de variables; nous prendrons au lieu de ξ, η, ρ et σ , quatre variables x_1, y_1, x_2, y_2 , définies comme il suit. Nous aurons d'abord:

$$x_2 = \eta, \quad y_2 = \xi.$$

Des équations (20) qui donnent ρ et σ en fonctions de g et de $gt + \bar{\omega}$ pour $\mu = 0$, on peut tirer g et $gt + \bar{\omega}$ en fonctions de ρ et de σ . Il vient:

$$g = \chi_1(\rho, \sigma), \quad gt + \bar{\omega} = \chi_2(\rho, \sigma).$$

Nous prendrons alors pour x_1 une certaine fonction de $\chi_1(\rho, \sigma)$ et pour y_1

$$y_1 = \frac{k}{2\pi} \chi_2(\rho, \sigma),$$

k désignant la période réelle de $\operatorname{sn}(x)$.

Si alors x_1 a été convenablement choisi en fonction de χ_1 les équations conserveront leur forme canonique

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{dF}{dx_1}, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{dF}{dx_2}, \quad \frac{dx_1}{dt} = -\frac{dF}{dy_1}, \quad \frac{dx_2}{dt} = -\frac{dF}{dy_2}.$$

Il est clair d'ailleurs que pour $\mu = 0$, F ne dépend que de x_1 et de x_2 et non de y_1 et de y_2 .

Nous nous trouvons donc bien dans les conditions énoncées au début de ce paragraphe.

L'équation (18) a surtout été étudiée par les géomètres dans le cas où $m = 0$; il semble au premier abord qu'elle est alors beaucoup plus simple. Ce n'est qu'une illusion; en effet, si l'on suppose $m = 0$, on se trouve dans le cas où le hessien de F_0 est nul et ce que nous avons dit dans ce paragraphe n'est plus applicable sans modification.

Ce n'est pas que les particularités que présente l'équation (18) dans le cas général ne soient encore vraies pour $m = 0$, toutes les fois du moins que μ n'est pas nul. La seule différence, c'est qu'on ne peut les mettre en évidence par un développement suivant les puissances de μ . L'apparente simplification qu'a reçue ainsi l'équation (18) n'a fait qu'augmenter les difficultés. Il est vrai qu'on est conduit quand $m = 0$, à des séries beaucoup plus simples que dans le cas général, mais ces séries ne convergent pas comme nous le verrons dans la suite.

La méthode exposée dans ce paragraphe s'applique également à un cas particulier du problème des trois corps.

Supposons une masse nulle C attirée par deux masses mobiles A et B égales l'une à $1 - \mu$ et l'autre à μ et décrivant d'un mouvement uniforme deux circonférences concentriques autour de leur centre de gravité commun supposé fixe. Imaginons de plus que la masse C se meuve dans le plan de ces deux circonférences.

Nous verrons plus loin que dans ce cas les équations du mouvement peuvent se mettre sous la forme suivante:

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{dF}{dy_1}, & \frac{dx_2}{dt} &= \frac{dF}{dy_2}, \\ \frac{dy_1}{dt} &= -\frac{dF}{dx_1}, & \frac{dy_2}{dt} &= -\frac{dF}{dx_2}. \end{aligned}$$

On désigne par x_1 la vitesse aréolaire du point C , par x_2 la racine carrée du grand axe de l'orbite de C , par y_1 la différence de la longitude du périhélie de C et de la longitude de B , par y_2 l'anomalie moyenne.

D'ailleurs F peut être développée suivant les puissances de μ et l'on a:

$$F_0 = x_1 + \frac{1}{2x_2^2}.$$

Il est aisé de voir que le hessien de F_0 par rapport à x_1 et à x_2 est nul.

Il semble donc d'abord que les méthodes du présent paragraphe sont en défaut. Il n'en est rien et un artifice très simple permet de tourner la difficulté.

Les équations (1) admettent comme intégrale

$$F = C.$$

Considérons la constante C comme une donnée de la question.

Si alors $\varphi(F)$ est une fonction quelconque de F et $\varphi'(F)$ sa dérivée, on aura:

$$\varphi'(F) = \varphi'(C)$$

et les équations (1) pourront s'écrire:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varphi'(F) dF}{\varphi'(C) dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\varphi'(F) dF}{\varphi'(C) dx_i}$$

ou

$$(1') \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{d}{dy_i} \left[\frac{\varphi(F)}{\varphi'(C)} \right], \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{d}{dx_i} \left[\frac{\varphi(F)}{\varphi'(C)} \right].$$

En général, le hessien de $\frac{\varphi(F_0)}{\varphi'(C)}$ ne sera pas nul. C'est ce qui arrive en particulier quand

$$\varphi(F_0) = F_0^2 = x_1^2 + \frac{x_1}{x_2^2} + \frac{1}{4x_2^2}.$$

Les solutions des équations (1) qui correspondent à la valeur particulière C de l'intégrale F appartiennent aussi aux équations (1').

Considérons maintenant une solution des équations (1) qui soit telle que l'intégrale F soit égale à une constante C_1 différente de C .

Je dis que cette solution appartiendra encore aux équations (1') pourvu qu'on y change t en

$$t \frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}.$$

On a en effet:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i};$$

si on change t en $t \frac{\varphi'(C_1)}{\varphi'(C)}$ il viendra:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varphi'(C_1) dF}{\varphi'(C) dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\varphi'(C_1) dF}{\varphi'(C) dx_i}$$

ou puisque $F = C_1$

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\varphi'(F) dF}{\varphi'(C) dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{\varphi'(F) dF}{\varphi'(C) dx_i}.$$

C. Q. F. D.

Des solutions de (1) il est donc aisé de déduire celles de (1') et inversement.

Les méthodes du présent paragraphe sont donc, grâce à cet artifice, applicables à ce cas particulier du problème des trois corps.

Elles ne le seraient pas aussi aisément au cas général. Dans le cas général en effet, non seulement le hessien de F_0 est nul, mais celui de $\varphi(F_0)$ est encore nul, quelle que soit la fonction φ .

De là certaines difficultés dont je ne parlerai pas ici; j'y reviendrai plus loin et je me bornerai pour le moment à renvoyer le lecteur à un travail que j'ai inséré dans le Bulletin astronomique, tome 1^{er}, page 65.

§ 12. Calcul des exposants caractéristiques.

Reprenons les équations (1) du paragraphe précédent

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = - \frac{dF}{dx_i}. \quad (i=1, 2, 3)$$

Supposons qu'on ait trouvé une solution périodique de ces équations:

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t)$$

et proposons-nous de déterminer les exposants caractéristiques de cette solution.

Pour cela nous poserons:

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \quad y_i = \psi_i(t) + \eta_i,$$

puis nous formerons les équations aux variations des équations (1) que nous écrirons:

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{d\xi_i}{dt} &= \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i dx_k} \xi_k + \sum_k \frac{d^2 F}{dy_i dy_k} \eta_k, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i dx_k} \xi_k - \sum_k \frac{d^2 F}{dx_i dy_k} \eta_k, \end{aligned} \quad (i, k=1, 2, 3)$$

et nous chercherons à intégrer ces équations en faisant:

$$(3) \quad \xi_i = e^{at} S_i, \quad \eta_i = e^{at} T_i,$$

S_i et T_i étant des fonctions périodiques de t . Nous savons qu'il existe en général six solutions particulières de cette forme (les équations linéaires (2) étant du sixième ordre). Mais il importe d'observer, que dans le cas particulier qui nous occupe, il n'y a plus que quatre solutions particulières qui conservent cette forme, parce que deux des exposants caractéristiques sont nuls, et qu'il y a par conséquent deux solutions particulières d'une forme dégénérante.

Cela posé, supposons d'abord $\mu = 0$, alors F se réduit à F_0 comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent et ne dépend plus que de x_1^0, x_2^0 et x_3^0 .

Alors les équations (2) se réduisent à:

$$(2') \quad \frac{d\xi_i}{dt} = 0, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i dx_k^0} \xi_k.$$

Les coefficients de ξ_k dans la seconde équation (2') sont des constantes.

Nous prendrons comme solutions des équations (2')

$$\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0, \quad \eta_1 = \eta_1^0, \quad \eta_2 = \eta_2^0, \quad \eta_3 = \eta_3^0,$$

η_1^0, η_2^0 et η_3^0 étant trois constantes d'intégration.

Cette solution n'est pas la plus générale puisqu'elle ne contient que trois constantes arbitraires, mais c'est la plus générale parmi celles que l'on peut ramener à la forme (3). Nous voyons ainsi que pour $\mu = 0$, les six exposants caractéristiques sont nuls.

Ne supposons plus maintenant que μ soit nul. Nous allons main-

tenant chercher à développer α , S_i et T_i , non pas suivant les puissances croissantes de μ , mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ en écrivant:

$$\begin{aligned}\alpha &= \alpha_1 \sqrt{\mu} + \alpha_2 \mu + \alpha_3 \mu \sqrt{\mu} + \dots, \\ S_i &= S_i^0 + S_i^1 \sqrt{\mu} + S_i^2 \mu + S_i^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots, \\ T_i &= T_i^0 + T_i^1 \sqrt{\mu} + T_i^2 \mu + T_i^3 \mu \sqrt{\mu} + \dots\end{aligned}$$

Je me propose d'abord d'établir que ce développement est possible.

Montrons d'abord que les exposants caractéristiques α peuvent se développer suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.

D'après ce que nous avons vu au § 10, les exposants caractéristiques nous seront donnés par l'équation suivante, en reprenant les notations des §§ 9 et 10:

$$\begin{vmatrix} \frac{d\gamma_1}{d\beta_1} - e^{a\tau} & \frac{d\gamma_1}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_1}{d\beta_n} \\ \frac{d\gamma_2}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_2}{d\beta_2} - e^{a\tau} & \dots & \frac{d\gamma_2}{d\beta_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{d\gamma_n}{d\beta_1} & \frac{d\gamma_n}{d\beta_2} & \dots & \frac{d\gamma_n}{d\beta_n} - e^{a\tau} \end{vmatrix} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est holomorphe en α ; de plus d'après le théorème III, § 2, les γ peuvent être développés suivant les puissances de μ et des β (cf. § 9), d'ailleurs d'après le § 9 les β peuvent se développer eux-mêmes suivant les puissances de μ . D'après cela les γ et le déterminant que je viens d'écrire peuvent eux-mêmes être développés suivant les puissances de μ . Il résulte de là que les exposants α nous sont donnés en fonctions de μ par une équation:

$$G(\alpha, \mu) = 0$$

dont le premier membre est holomorphe en α et en μ .

Si pour $\mu = 0$, tous les exposants α étaient différents les uns des autres, l'équation $G = 0$ n'aurait pour $\mu = 0$ que des racines simples, et on en conclurait que les α seraient développables suivant les puissances de μ (théorème IV, § 2).

Mais il n'en est pas ainsi; nous venons de voir en effet que pour $\mu = 0$, tous les α sont nuls.

Reprenons les notations du § 11, notre équation pourra s'écrire, en supposant trois degrés de liberté seulement:

$$0 = G(\alpha, \mu) =$$

$\frac{d\Delta a_1}{d\delta a_1} + 1 - e^{\alpha T}$	$\frac{d\Delta a_1}{d\delta a_2}$	$\frac{d\Delta a_1}{d\delta a_3}$	$\frac{d\Delta a_1}{d\delta \bar{w}_1}$	$\frac{d\Delta a_1}{d\delta \bar{w}_2}$	$\frac{d\Delta a_1}{d\delta \bar{w}_3}$
$\frac{d\Delta a_2}{d\delta a_1}$	$\frac{d\Delta a_2}{d\delta a_2} + 1 - e^{\alpha T}$	$\frac{d\Delta a_2}{d\delta a_3}$	$\frac{d\Delta a_2}{d\delta \bar{w}_1}$	$\frac{d\Delta a_2}{d\delta \bar{w}_2}$	$\frac{d\Delta a_2}{d\delta \bar{w}_3}$
$\frac{d\Delta a_3}{d\delta a_1}$	$\frac{d\Delta a_3}{d\delta a_2}$	$\frac{d\Delta a_3}{d\delta a_3} + 1 - e^{\alpha T}$	$\frac{d\Delta a_3}{d\delta \bar{w}_1}$	$\frac{d\Delta a_3}{d\delta \bar{w}_2}$	$\frac{d\Delta a_3}{d\delta \bar{w}_3}$
$\frac{d\Delta \bar{w}_1}{d\delta a_1}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_1}{d\delta a_2}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_1}{d\delta a_3}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_1}{d\delta \bar{w}_1} + 1 - e^{\alpha T}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_1}{d\delta \bar{w}_2}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_1}{d\delta \bar{w}_3}$
$\frac{d\Delta \bar{w}_2}{d\delta a_1}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_2}{d\delta a_2}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_2}{d\delta a_3}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_2}{d\delta \bar{w}_1}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_2}{d\delta \bar{w}_2} + 1 - e^{\alpha T}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_2}{d\delta \bar{w}_3}$
$\frac{d\Delta \bar{w}_3}{d\delta a_1}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_3}{d\delta a_2}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_3}{d\delta a_3}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_3}{d\delta \bar{w}_1}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_3}{d\delta \bar{w}_2}$	$\frac{d\Delta \bar{w}_3}{d\delta \bar{w}_3} + 1 - e^{\alpha T}$

Cela fait, je pose:

$$\alpha = \lambda \sqrt{\mu}.$$

Je divise les trois premières lignes du déterminant par $\sqrt{\mu}$; je divise ensuite les trois dernières colonnes par $\sqrt{\mu}$ (de sorte que le déterminant lui-même se trouve finalement divisé par μ^3).

Je fais ensuite $\mu = 0$.

J'observe que d'après ce que nous avons vu au § 11, $\Delta a_1, \Delta a_2, \Delta a_3$ sont divisibles par μ . Si donc j'envisage le premier élément de la première ligne cet élément après la division par $\sqrt{\mu}$ s'écrira:

$$\frac{d\Delta a_1}{\sqrt{\mu} d\delta a_1} + \frac{1 - e^{\lambda T \sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}}$$

et quand on y fera $\mu = 0$ il deviendra $-\lambda T$.

De même le second élément de la 1^{ère} ligne s'écrit:

$$\frac{d\Delta a_1}{\sqrt{\mu} d\delta a_2}$$

et il tend vers 0 avec μ .

Ainsi quand on aura fait $\mu = 0$, les trois premiers éléments des trois premières lignes s'annuleront à l'exception des éléments de la diagonale principale qui deviendront égaux à $-\lambda T$.

Considérons maintenant les trois derniers éléments des trois dernières lignes; ils s'écriront:

$$\frac{d\Delta \bar{w}_i}{\sqrt{\mu} d\delta \bar{w}_i} + \frac{1 - e^{\lambda T \sqrt{\mu}}}{\sqrt{\mu}} \quad \text{ou} \quad \frac{d\Delta \bar{w}_k}{\sqrt{\mu} d\delta \bar{w}_i}$$

selon qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale. D'après ce que nous avons vu au § 11, $\Delta \bar{w}_k$ est développable suivant les puissances de μ , des δa_i et des $\delta \bar{w}_i$, de plus pour $\mu = 0$, $\Delta \bar{w}_i$ ne dépend pas des $\delta \bar{w}_i$. On en conclura que $\frac{d\Delta \bar{w}_k}{d\delta \bar{w}_i}$ est divisible par μ .

Donc quand on fera $\mu = 0$, les trois derniers éléments des trois dernières lignes deviendront égaux à

$$-\lambda T \quad \text{ou à} \quad 0$$

selon qu'ils appartiennent ou non à la diagonale principale.

Considérons maintenant les trois premiers éléments des trois dernières lignes $\frac{d\Delta \bar{w}_i}{d\delta a_k}$. D'après ce que nous avons vu au § 11, on a pour $\mu = 0$:

$$\frac{d\Delta \bar{w}_i}{d\delta a_k} = -T \frac{d^2 F_0}{dx_i dx_k}$$

Passons enfin aux trois derniers éléments des trois premières lignes qui s'écrivent:

$$\frac{d\Delta a_i}{\mu d\delta \bar{w}_k}$$

D'après ce que nous avons vu au § 11, si dans F_1 on substitue $a_1, a_2, a_3, n_1 t + \bar{w}_1, n_2 t + \bar{w}_2, n_3 t + \bar{w}_3$ à la place de $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, on voit que F_1 devient une fonction périodique de t de période T et si l'on appelle ψ la valeur moyenne de cette fonction périodique, on a pour $\mu = 0$:

$$\frac{\Delta a_i}{\mu} = T \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_i},$$

d'où

$$\frac{d\Delta a_i}{\mu d\delta\bar{\omega}_k} = T \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_i d\bar{\omega}_k}.$$

Il importe de remarquer que l'on a identiquement:

$$n_1 \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_1} + n_2 \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_2} + n_3 \frac{d\phi}{d\bar{\omega}_3} = 0.$$

Nous voyons donc que pour $\mu = 0$ on a:

$$\frac{G(\lambda\sqrt{\mu}, \mu)}{\mu^3 T^6} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_1^2} & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2} & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_3} \\ 0 & -\lambda & 0 & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_2} & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_2^2} & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_3} \\ 0 & 0 & -\lambda & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_1 d\bar{\omega}_3} & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_2 d\bar{\omega}_3} & \frac{d^2\phi}{d\bar{\omega}_3^2} \\ -\frac{d^2 F_0}{dx_1^2} & -\frac{d^2 F_0}{dx_1 dx_2} & -\frac{d^2 F_0}{dx_1 dx_3} & -\lambda & 0 & 0 \\ -\frac{d^2 F_0}{dx_1 dx_2} & -\frac{d^2 F_0}{dx_2^2} & -\frac{d^2 F_0}{dx_2 dx_3} & 0 & -\lambda & 0 \\ -\frac{d^2 F_0}{dx_1 dx_3} & -\frac{d^2 F_0}{dx_2 dx_3} & -\frac{d^2 F_0}{dx_3^2} & 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

En égalant à 0 ce déterminant, on a une équation du 6^e degré en λ ; deux de ses racines sont nulles; nous n'en parlerons pas, car elles se rapportent aux deux solutions particulières de forme dégénéréscente dont j'ai parlé plus haut. Les quatre autres solutions sont distinctes en général.

Il résulte alors du théorème IV, § 2, que nous pourrons tirer de l'équation

$$\frac{G(\lambda\sqrt{\mu}, \mu)}{\mu^3 T^6} = 0$$

λ (et par conséquent α) sous la forme d'une série développée suivant les

puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$. J'ajouterai que λ peut se développer suivant les puissances de μ et que le développement de α ne contient que des puissances impaires de $\sqrt{\mu}$. En effet les racines de l'équation:

$$G(\alpha, \mu) = 0$$

doivent être deux à deux égales et de signe contraire (cf. § 10). Donc α doit changer de signe quand je change $\sqrt{\mu}$ en $-\sqrt{\mu}$.

Démontrons maintenant que S_i et T_i peuvent aussi se développer suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

S_i et T_i nous sont donnés en effet par les équations suivantes:

$$(2'') \quad \begin{aligned} \frac{dS_i}{dt} + \alpha S_i &= \sum \frac{d^2 F}{dy_i dx_k} S_k + \sum \frac{d^2 F}{dy_i dy_k} T_k, \\ \frac{dT_i}{dt} + \alpha T_i &= -\sum \frac{d^2 F}{dx_i dx_k} S_k - \sum \frac{d^2 F}{dx_i dy_k} T_k. \end{aligned}$$

Soit β_i la valeur initiale de S_i et β'_i celle de T_i ; les valeurs de S_i et de T_i pour une valeur quelconque de t pourront d'après le théorème III, § 2, se développer suivant les puissances de μ , de α , des β_i et des β'_i . De plus à cause de la forme linéaire des équations, ces valeurs seront des fonctions linéaires et homogènes des β_i et des β'_i .

Soit, pour employer des notations analogues à celles du § 9, $\beta_i + \psi_i$ la valeur de S_i et $\beta'_i + \psi'_i$ celle de T_i pour $t = T$. La condition pour que la solution soit périodique c'est que l'on ait

$$\psi_i = \psi'_i = 0.$$

Les ψ_i et les ψ'_i sont des fonctions linéaires des β_i et des β'_i ; ces équations sont donc linéaires par rapport à ces quantités. En général ces équations n'admettent d'autre solution que

$$\beta_i = \beta'_i = 0,$$

de sorte que les équations (2'') n'ont d'autre solution périodique que

$$S_i = T_i = 0.$$

Mais nous savons que si l'on choisit α de façon à satisfaire à $G(\alpha, \mu) = 0$, les équations (2'') admettent des solutions périodiques autres que $S_i = T_i = 0$.

Par conséquent le déterminant des équations linéaires $\phi_i = \phi'_i = 0$ est nul. Nous pourrions donc tirer de ces équations les rapports:

$$\frac{\beta_i}{\beta'_i} \quad \text{et} \quad \frac{\beta_i}{\beta_i}$$

sous la forme de séries développées suivant les puissances de α et de μ .

Comme β'_i reste arbitraire, nous conviendrons de prendre $\beta'_i = 1$ de telle sorte que la valeur initiale de T_i soit égale à 1. Les β_i et les β'_i sont alors développés suivant les puissances de α et de μ ; mais les S_i et les T_i sont comme nous l'avons vu développables suivant les puissances de α , de μ , des β_i et des β'_i et d'autre part α est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Donc les S_i et les T_i seront développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

C. Q. F. D.

On aura en particulier:

$$T_i = T_i^0 + T_i^1 \sqrt{\mu} + T_i^2 \mu + \dots$$

Comme, d'après notre hypothèse, β'_i qui est la valeur initiale de T_i doit être égale à 1, quel que soit μ , on aura pour $t = 0$:

$$T_i^0 = 1, \quad 0 = T_i^1 = T_i^2 = \dots = T_i^m = \dots$$

Ayant ainsi démontré l'existence de nos séries, nous allons chercher à en déterminer les coefficients.

Nous avons:

$$S_i^0 = 0, \quad T_i^0 = \eta_i^0$$

et:

$$\xi_i = e^{\alpha t} (S_i^0 + S_i^1 \sqrt{\mu} + \dots), \quad \eta_i = e^{\alpha t} (T_i^0 + T_i^1 \sqrt{\mu} + \dots),$$

$$(4) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = e^{\alpha t} \left| \begin{array}{l} \frac{dS_i^0}{dt} + \sqrt{\mu} \frac{dS_i^1}{dt} + \dots \\ + \alpha S_i^0 + \alpha \sqrt{\mu} S_i^1 + \dots \end{array} \right|, \quad \frac{d\eta_i}{dt} = e^{\alpha t} \left| \begin{array}{l} \frac{dT_i^0}{dt} + \sqrt{\mu} \frac{dT_i^1}{dt} + \dots \\ + \alpha T_i^0 + \alpha \sqrt{\mu} T_i^1 + \dots \end{array} \right|.$$

Nous développerons d'autre part les dérivées secondes de F qui entrent comme coefficients dans les équations (2) en écrivant:

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{d^2 F}{dy_i dx_k} &= A_{ik}^0 + \mu A_{ik}^2 + \mu^2 A_{ik}^4 + \dots, \\ \frac{d^2 F}{dy_i dy_k} &= B_{ik}^0 + \mu B_{ik}^2 + \mu^2 B_{ik}^4 + \dots, \\ -\frac{d^2 F}{dx_i dx_k} &= C_{ik}^0 + \mu C_{ik}^2 + \mu^2 C_{ik}^4 + \dots, \\ -\frac{d^2 F}{dx_i dy_k} &= D_{ik}^0 + \mu D_{ik}^2 + \mu^2 D_{ik}^4 + \dots \end{aligned}$$

Ces développements ne contiennent que des puissances entières de μ et ne possèdent pas comme les développements (4) des termes dépendants de $\sqrt{\mu}$.

On observera que:

$$(6) \quad \begin{aligned} A_{ik}^0 &= B_{ik}^0 = D_{ik}^0 = 0, \\ C_{ik}^m &= C_{ki}^m, \quad B_{ik}^m = B_{ki}^m, \quad A_{ik}^m = -D_{ki}^m. \end{aligned}$$

Nous substituons dans les équations (2) les valeurs (4) et (5) à la place des ξ , des η , de leurs dérivées et des dérivées secondes de F . Dans les expressions (4) je suppose que α soit développé suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, sauf lorsque cette quantité α entre dans un facteur exponentiel $e^{\alpha t}$.

Nous identifierons ensuite en égalant les puissances semblables de $\sqrt{\mu}$ et nous obtiendrons ainsi une série d'équations qui permettent de déterminer successivement:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \text{ etc.} \quad S_i^0, S_i^1, \dots, T_i^0, T_i^1, \dots$$

Je n'écrirai que les premières de ces équations obtenues en égalant successivement les termes tout connus, les termes en $\sqrt{\mu}$, les termes en μ etc. Je fais d'ailleurs disparaître le facteur $e^{\alpha t}$ qui se trouve partout.

Egalons d'abord les termes en $\sqrt{\mu}$; il vient:

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{dS_i^1}{dt} + \alpha_1 S_i^0 &= \sum_k A_{ik}^0 S_k^1 + \sum_k B_{ik}^0 T_k^1, \\ \frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 T_i^0 &= \sum_k C_{ik}^0 S_k^1 + \sum_k D_{ik}^0 T_k^1. \end{aligned}$$

Egalons les termes en μ , il vient:

$$(8) \quad \frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 + \alpha_2 S_i^0 = \sum_k (A_{ik}^0 S_k^2 + A_{ik}^2 S_k^0 + B_{ik}^0 T_k^2 + B_{ik}^2 T_k^0), \quad (i=1, 2, 3)$$

outre trois équations analogues donnant les $\frac{dT_i^2}{dt}$.

Si l'on tient compte maintenant des relations (6), les équations (7) deviennent:

$$\frac{dS_i^1}{dt} = 0, \quad \frac{dT_i^1}{dt} + \alpha_1 \eta_i^0 = \sum_k C_{ik}^0 S_k^1.$$

La première de ces équations montre que S_1^1 , S_2^1 et S_3^1 sont des constantes. Quant à la seconde, elle montre que $\frac{dT_i^1}{dt}$ est une constante; mais comme T_i^1 doit être une fonction périodique, cette constante doit être nulle, de sorte qu'on a:

$$(9) \quad \alpha_1 \eta_i^0 = C_{i1}^0 S_1^1 + C_{i2}^0 S_2^1 + C_{i3}^0 S_3^1,$$

ce qui établit trois relations entre les trois constantes η_i^0 , les trois constantes S_i^1 et la quantité inconnue α_1 .

De son côté l'équation (8) s'écrira:

$$\frac{dS_i^2}{dt} + \alpha_1 S_i^1 = \sum_k B_{ik}^2 \eta_k^0.$$

Les B_{ik}^2 sont des fonctions périodiques de t ; développons-les d'après la formule de FOURIER et soit b_{ik} le terme tout connu de B_{ik}^2 . Il viendra:

$$\alpha_1 S_i^1 = \sum_k b_{ik} \eta_k^0$$

ou en tenant compte des équations (9), il viendra:

$$(10) \quad \alpha_1^2 S_i^1 = \sum_{k=1}^{k=3} b_{ik} (C_{k1}^1 S_1^1 + C_{k2}^0 S_2^1 + C_{k3}^0 S_3^1).$$

En faisant dans cette équation (10) $i = 1, 2$ et 3 , nous aurons trois relations linéaires et homogènes entre les trois constantes S_i^1 . En éliminant ces trois constantes, nous aurons alors une équation du 3^me degré qui déterminera λ_1^2 .

Si nous posons pour abrégé

$$e_{ik} = b_{i1} C_{1k}^0 + b_{i2} C_{2k}^0 + b_{i3} C_{3k}^0,$$

l'équation due à cette élimination s'écrira:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} e_{11} - \alpha_1^2 & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} - \alpha_1^2 & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} - \alpha_1^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Elle peut encore s'écrire:

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 & 0 & 0 & C_{11}^0 & C_{12}^0 & C_{13}^0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & C_{21}^0 & C_{22}^0 & C_{23}^0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & C_{31}^0 & C_{32}^0 & C_{33}^0 \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & 0 & -\alpha_1 & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & 0 & 0 & -\alpha_1 \end{vmatrix} = 0.$$

La détermination de α_1 est la seule partie du calcul qui présente quelque difficulté.

Les équations analogues à (7) et à (8) formées en égalant dans les équations (2) les coefficients des puissances semblables de $\sqrt{\mu}$, permettent ensuite de déterminer sans peine les α_k , les S_i^m et les T_i^m . Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

Les exposants caractéristiques α sont développables suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$.

Concentrant donc toute notre attention sur la détermination de α_1 , nous allons étudier spécialement l'équation (11). Nous devons chercher d'abord à déterminer les quantités C_{ik}^0 et b_{ik} .

On a évidemment:

$$C_{ik}^0 = - \frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0}$$

et

$$B_{ik}^2 = \frac{d^2 F_1}{dy_i^0 dy_k^0}$$

ou

$$B_{ik}^2 = - \sum A m_i m_k \sin \omega \quad (\omega = m_1 y_1^0 + m_2 y_2^0 + m_3 y_3^0 + h)$$

et

$$b_{ik} = - S A m_i m_k \sin \omega.$$

D'après les conventions faites dans le paragraphe précédent, la sommation représentée par le signe Σ s'étend à tous les termes, quelles que soient les valeurs entières attribuées à m_1 , m_2 et m_3 . La sommation représentée par le signe S s'étend seulement aux termes tels que

$$n_1 m_1 + n_2 m_2 + n_3 m_3 = 0.$$

Sous le signe S nous avons par conséquent:

$$\omega = m_2 \bar{\omega}_2 + m_3 \bar{\omega}_3 + h.$$

Cela nous permet d'écrire

$$b_{ik} = \frac{d^2 \psi}{d\bar{\omega}_i d\bar{\omega}_k} \quad (\text{pour } i \text{ et } k = 2 \text{ ou } 3).$$

Si un ou deux des indices i et k sont égaux à 1, b_{ik} sera défini par la relation

$$n_1 b_{i1} + n_2 b_{i2} + n_3 b_{i3} = 0.$$

Nous allons à l'aide de cette dernière relation, transformer l'équation (11) de façon à mettre en évidence l'existence de deux racines nulles et à réduire l'équation au quatrième degré.

Je trouve en effet par une simple transformation de déterminant et en divisant par α_1^2 :

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & 0 & b_{23} & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_1 & b_{33} & b_{32} & 0 \\ C_{13}^0 & C_{23}^0 & C_{33}^0 & -\alpha_1 & 0 & n_3 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & C_{32}^0 & 0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & C_{31}^0 & 0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dans le cas particulier où l'on n'a plus que deux degrés de liberté, cette équation s'écrit:

$$\begin{vmatrix} n_1 & n_2 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_1 & \frac{d^2\psi}{d\bar{\omega}_2^2} & 0 \\ C_{12}^0 & C_{22}^0 & -\alpha_1 & n_2 \\ C_{11}^0 & C_{21}^0 & 0 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$n_1^2 \alpha_1^2 = \frac{d^2\psi}{d\bar{\omega}_2^2} (n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0).$$

L'expression $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ ne dépend que de x_1^0 et x_2^0 ou si l'on veut de n_1 et de n_2 . Quand nous nous serons donné les deux nombres n_1 et n_2 dont le rapport doit être commensurable, nous pourrions regarder $n_1^2 C_{22}^0 - 2n_1 n_2 C_{12}^0 + n_2^2 C_{11}^0$ comme une constante donnée.

Alors le signe de α_1^2 dépend seulement de celui de $\frac{d^2\psi}{d\bar{\omega}_2^2}$.

Quand on s'est donné n_1 et n_2 , on forme l'équation:

$$(12) \quad \frac{d\psi}{d\bar{\omega}_2} = 0,$$

qui est l'équation (7) du paragraphe précédent. Nous avons vu dans ce paragraphe qu'à chaque racine de cette équation correspond une solution périodique.

Considérons le cas général où l'équation (12) n'a que des racines simples; chacune de ces racines correspond alors à un maximum ou à un minimum de ψ . Mais la fonction ψ étant périodique présente dans chaque période au moins un maximum et un minimum et précisément autant de maxima que de minima.

Or pour les valeurs de $\bar{\omega}_2$ correspondant à un minimum, $\frac{d^2\psi}{d\bar{\omega}_2^2}$ est positif; pour les valeurs correspondant à un maximum, cette dérivée est négative.

Donc l'équation (12) aura précisément autant de racines pour lesquelles cette dérivée sera positive, que de racines pour lesquelles cette dérivée sera négative, et par conséquent autant de racines pour lesquelles α_1^2 sera positif que de racines pour lesquelles α_1^2 sera négatif.

Cela revient à dire qu'il y aura précisément autant de solutions périodiques stables que de solutions instables, en donnant à ce mot le même sens que dans le § 10.

Ainsi, à chaque système de valeurs de n_1 et de n_2 , correspondront au moins une solution périodique stable et une solution périodique instable et précisément autant de solutions stables que de solutions instables pourvu que μ soit suffisamment petit.

Je n'examinerai pas ici comment ces résultats s'étendraient au cas où l'équation (12) aurait des racines multiples.

Voici comment il faudrait continuer le calcul.

Imaginons que l'on ait déterminé complètement les quantités

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$$

et les fonctions:

$$S_i^0, S_i^1, \dots, S_i^m,$$

$$T_i^0, T_i^1, \dots, T_i^{m-1},$$

et que l'on connaisse les fonctions S_i^{m+1} et T_i^m à une constante près. Supposons qu'on se propose ensuite de calculer α_{m+1} , d'achever la détermination des fonctions S_i^{m+1} et T_i^m et de déterminer ensuite les fonctions S_i^{m+2} et T_i^{m+1} à une constante près.

En égalant les puissances semblables de μ dans les équations (4), on obtient des équations de la forme suivante, analogues aux équations (7) et (8)

$$(13) \quad \begin{aligned} & -\frac{dT_i^{m+1}}{dt} + \sum_k C_{ik}^0 S_k^{m+1} - \alpha_1 T_i^m - \alpha_{m+1} T_i^0 = \text{quantité connue,} \\ & -\frac{dS_i^{m+2}}{dt} + \sum_k B_{ik}^2 T_k^m - \alpha_1 S_i^{m+1} - \alpha_{m+1} S_i^1 = \text{quantité connue.} \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3)$$

Les deux membres de ces équations (12) sont des fonctions périodiques de t . Egalons la valeur moyenne de ces deux membres. Si nous désignons par $[v]$ la valeur moyenne d'une fonction périodique quelconque U , si nous observons que si U est périodique on a

$$\left[\frac{dU}{dt} \right] = 0,$$

si nous rappelons que, T_k^m étant connu à une constante près, $T_k^m - [T_k^m]$ et

$$[B_{ik}^2(T_k^m - [T_k^m])]$$

sont des quantités connues, nous obtiendrons les équations suivantes:

$$(14) \quad \begin{aligned} \sum_k C_{ik}^0 [S_k^{m+1}] - \alpha_1 [T_i^m] - \alpha_{m+1} T_i^0 &= \text{quantité connue,} \\ \sum_k b_{ik} [T_k^m] - \alpha_1 [S_i^{m+1}] - \alpha_{m+1} S_i^1 &= \text{quantité connue.} \end{aligned} \quad (i=1, 2, 3)$$

Ces équations (14) vont nous servir à calculer α_{m+1} , $[T_i^m]$ et $[S_i^{m+1}]$ et par conséquent à achever la détermination des fonctions T_i^m et S_i^{m+1} qui ne sont encore connues qu'à une constante près.

Si l'on additionne les équations (14) après les avoir respectivement multipliées par

$$S_1^1, S_2^1, S_3^1, T_1^0, T_2^0, T_3^0$$

on trouve:

$$2 \sum_i S_i^1 T_i^0 \alpha_{m+1} = \text{quantité connue,}$$

ce qui détermine α_{m+1} .

Si dans les équations (14) on remplace α_{m+1} par la valeur ainsi trouvée, on a pour déterminer les six inconnues $[T_i^m]$ et $[S_i^{m+1}]$ six équations linéaires dont cinq seulement sont indépendantes.

Cela posé, on déterminera $[T_1^m]$ par la condition que $[T_1^m]$ soit nul pour $t = 0$, conformément à l'hypothèse faite plus haut, et les cinq équations (14) restées indépendantes permettront de calculer les cinq autres inconnues.

Les équations (13) nous permettront ensuite de calculer $\frac{dT_i^{m+1}}{dt}$ et $\frac{dS_i^{m+2}}{dt}$ et par conséquent de déterminer les fonctions T_i^{m+1} et S_i^{m+2} à une constante près — et ainsi de suite.

§ 13. Solutions asymptotiques.

Soient:

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = X_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

n équations différentielles simultanées. Les X sont des fonctions des x et de t .

Par rapport aux x elles peuvent être développées en séries de puissances.

Par rapport à t , elles sont périodiques de période 2π .

Soit:

$$x_1 = x_1^0, \quad x_2 = x_2^0, \quad \dots, \quad x_n = x_n^0$$

une solution particulière périodique de ces équations. Les x_i^0 seront des fonctions de t périodiques de période 2π . Posons:

$$x_i = x_i^0 + \xi_i.$$

Il viendra:

$$(2) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \Xi_i.$$

Les Ξ seront des fonctions des ξ et de t , périodiques par rapport à t et développées suivant les puissances des ξ ; mais il n'y aura plus de termes indépendants des ξ .

Si les ξ sont très petits et qu'on néglige leurs carrés, les équations se réduisent à

$$(3) \quad \frac{d\xi_i}{dt} = \frac{dX_i}{dx_1^0} \xi_1 + \frac{dX_i}{dx_2^0} \xi_2 + \dots + \frac{dX_i}{dx_n^0} \xi_n,$$

qui sont les équations aux variations des équations (1).

Elles sont linéaires et à coefficients périodiques. On connaît la forme de leur solution générale, on trouve:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= A_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_{11} + A_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_{21} + \dots + A_n e^{\alpha_n t} \varphi_{n1}, \\ \xi_2 &= A_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_{12} + A_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_{22} + \dots + A_n e^{\alpha_n t} \varphi_{n2}, \\ &\dots \\ \xi_n &= A_1 e^{\alpha_1 t} \varphi_{1n} + A_2 e^{\alpha_2 t} \varphi_{2n} + \dots + A_n e^{\alpha_n t} \varphi_{nn}; \end{aligned}$$

les A sont des constantes d'intégration, les α des constantes fixes qu'on appelle exposants caractéristiques, les φ des fonctions périodiques de t .

Si alors nous posons:

$$\begin{aligned}\xi_1 &= \eta_1 \varphi_{11} + \eta_2 \varphi_{21} + \dots + \eta_n \varphi_{1n}, \\ \xi_2 &= \eta_1 \varphi_{12} + \eta_2 \varphi_{22} + \dots + \eta_n \varphi_{n2}, \\ &\dots \\ \xi_n &= \eta_1 \varphi_{1n} + \eta_2 \varphi_{2n} + \dots + \eta_n \varphi_{nn},\end{aligned}$$

les équations (2) deviendront:

$$(2') \quad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i$$

où les H_i sont des fonctions de t et des η de même forme que les Ξ .

Nous pourrions d'ailleurs écrire

$$(2') \quad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 + H_i^2 + \dots + H_i^n + \dots;$$

H_i^p représente l'ensemble des termes de H_i qui sont de degré p par rapport aux η .

Quant aux équations (3), elles deviennent:

$$(3') \quad \frac{d\eta_i}{dt} = H_i^1 = \alpha_i \eta_i.$$

Cherchons maintenant la forme des solutions générales des équations (2) et (2').

Je dis que nous devons trouver:

$\eta_i =$ fonction développée suivant les puissances de $A_1 e^{\alpha_1 t}$, $A_2 e^{\alpha_2 t}$, ..., $A_n e^{\alpha_n t}$ dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t .

Nous pouvons écrire alors:

$$(4') \quad \eta_i = \eta_i^1 + \eta_i^2 + \dots + \eta_i^p + \dots,$$

η_i^p représentant l'ensemble des termes de η_i qui sont de degré p par rapport aux A .

Nous remplacerons les η_i par leurs valeurs dans H_i^p et nous trouverons:

$$H_i^p = H_i^{p,p} + H_i^{p,p+1} + \dots + H_i^{p,q} + \dots,$$

$H_i^{p,q}$ désignant l'ensemble des termes qui sont de degré q par rapport aux A .

Nous trouverons alors:

$$\begin{aligned} \frac{d\eta_i^1}{dt} &= \alpha_i \eta_i^1, & \eta_i^1 &= A_i e^{\alpha_i t}, \\ \frac{d\eta_i^2}{dt} - \alpha_i \eta_i^2 &= H_i^{2,2}, & \frac{d\eta_i^3}{dt} - \alpha_i \eta_i^3 &= H_i^{2,3} + H_i^{3,3}, \\ & \dots & & \dots \\ \frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q &= H_i^{2,q} + H_i^{3,q} + \dots + H_i^{q,q} = K_q. \end{aligned}$$

Ces équations permettront de calculer successivement par récurrence

$$\eta_i^2, \eta_i^3, \dots, \eta_i^q, \dots$$

En effet K_q ne dépend que des $\eta^1, \eta^2, \dots, \eta^{q-1}$. Si nous supposons que ces quantités aient été préalablement calculées, nous pourrons écrire K_q sous la forme suivante:

$$K_1 = \sum A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} e^{i(\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n)} \phi,$$

les β étant des entiers positifs dont la somme est q et ϕ une fonction périodique.

On peut écrire encore:

$$\phi = \sum C e^{\gamma \sqrt{-1}},$$

C étant un coefficient généralement imaginaire et γ un entier positif ou négatif. Nous écrirons pour abrégier:

$$A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} = A^q, \quad \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \dots + \alpha_n \beta_n = \sum \alpha \beta,$$

et il viendra:

$$\frac{d\eta_i^q}{dt} - \alpha_i \eta_i^q = \sum C A^q e^{i(\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha \beta)}.$$

Or on peut satisfaire à cette équation en faisant:

$$\eta_i^q = \sum \frac{C A^q e^{i(\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha \beta)}}{\gamma \sqrt{-1} + \sum \alpha \beta - \alpha_i}.$$

Il y aurait exception dans le cas où l'on aurait:

$$\gamma\sqrt{-1} + \sum\alpha\beta - \alpha_i = 0,$$

auquel cas il s'introduirait dans les formules des termes en t . Nous réserverons ce cas qui ne se présente pas en général.

Nous devons maintenant traiter la question de la convergence de ces séries. La seule difficulté provient d'ailleurs comme on va le voir des diviseurs

$$(5) \quad \gamma\sqrt{-1} + \sum\alpha\beta - \alpha_i.$$

Cette convergence est une conséquence immédiate des résultats obtenus dans le § 3 mais je préfère en donner une démonstration directe.

Remplaçons les équations (2') par les suivantes:

$$(2'') \quad \eta_i = \frac{1}{\varepsilon} A_i e^{a_i t} + \bar{H}_i^2 + \bar{H}_i^3 + \dots + \bar{H}_i^p + \dots$$

Définissons \bar{H}_i^p . On voit sans peine que H_i^p est de la forme suivante:

$$H_i^p = \sum C \gamma_1^{\beta_1} \gamma_2^{\beta_2} \dots \gamma_n^{\beta_n} e^{i(\gamma_1 \dots \gamma_n) t}.$$

C est une constante quelconque, les β sont des entiers positifs dont la somme est p , γ est un entier positif ou négatif. Nous prendrons alors:

$$\bar{H}_i^p = \sum |C| \gamma_1^{\beta_1} \gamma_2^{\beta_2} \dots \gamma_n^{\beta_n}.$$

Les séries ainsi obtenues seront convergentes pourvu que les séries trigonométriques qui définissent les fonctions périodiques dont dépendent les H convergent absolument et uniformément; or cela aura toujours lieu parce que ces fonctions périodiques sont analytiques. Quant à ε , c'est une constante positive.

On peut tirer des équations (2'') les η sous la forme suivante:

$$(4'') \quad \eta_i = \sum M \varepsilon^{-\sum\beta} A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n} e^{(\sum a_i \beta_i) t}$$

Plusieurs termes pourront d'ailleurs correspondre aux mêmes exposants β . Si on compare avec les séries tirées de (2') qui s'écrivent:

$$\eta_i = \sum N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{t[\sum a_i \beta_i + \gamma \sqrt{-1}]},$$

voici ce qu'on observe: 1° M est réel positif et plus grand que $|N|$
 2° \prod désigne le produit des diviseurs (5) ($q < \sum \beta$).

Si donc la série (4'') converge et si aucun des diviseurs (5) n'est plus petit que ε , la série (4') convergera également. Voici donc comment on peut énoncer la condition de convergence.

La série converge:
 si l'expression

$$r\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i$$

ne peut pas devenir plus petite que toute quantité donnée ε pour des valeurs entières et positives des β et entières (positives ou négatives) de r ; c'est à dire si aucun des deux polygones convexes qui enveloppe, le premier les α et $+\sqrt{-1}$, le second les α et $-\sqrt{-1}$, ne contient l'origine;

ou si toutes les quantités α ont leurs parties réelles de même signe et si aucune d'elles n'a sa partie réelle nulle.

Que ferons-nous alors s'il n'en est pas ainsi.

Supposons par exemple que k des quantités α aient leur partie réelle positive, et que $n - k$ aient leur partie réelle négative ou nulle. Il arrivera alors que la série (4') restera convergente si on y annule les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle, de sorte que ces séries ne nous donneront plus la solution générale des équations proposées, mais une solution contenant seulement k constantes arbitraires.

Si on suppose que les équations données rentrent dans les équations de la dynamique, nous avons vu que n est pair et que les α sont deux à deux égaux et de signe contraire.

Alors si k d'entre eux ont leur partie réelle positive, k auront leur partie réelle négative et $n - 2k$ auront leur partie réelle nulle. En prenant d'abord les α qui ont leur partie réelle positive, on obtiendra une solution particulière contenant k constantes arbitraires; on en obtiendra une seconde en prenant les α qui ont leur partie réelle négative.

Dans le cas où aucun des α n'a sa partie réelle nulle et en particulier si tous les α sont réels, on a d'ailleurs:

$$k = \frac{n}{2}.$$

Nous allons nous placer maintenant dans un cas très particulier. Supposons d'abord $n = 2$, de telle façon que les équations (1) se réduisent à:

$$\frac{dx_1}{dt} = X_1, \quad \frac{dx_2}{dt} = X_2.$$

Supposons de plus que

$$(6) \quad \frac{dX_1}{dx_1} + \frac{dX_2}{dx_2} = 0.$$

La situation du système dépend alors des trois quantités x_1 , x_2 et t ; on peut donc la représenter par la position d'un point dans l'espace; voici quel mode de représentation on peut adopter pour fixer les idées:

Les coordonnées rectangulaires du point représentatif seront:

$$e^{x_1} \cos t, \quad e^{x_1} \sin t \quad \text{et} \quad x_2.$$

De cette façon

1°. à tout système de valeurs des trois quantités x_1 , x_2 et t correspondra un point de l'espace;

2°. à tout point de l'espace correspondra un seul système de valeurs des quantités x_1 , x_2 , $\cos t$, $\sin t$, et par conséquent une seule situation du système si l'on ne considère pas comme distinctes deux situations qui ne diffèrent que parce que t a augmenté d'un certain nombre de périodes 2π ;

3°. si l'on fait varier t , (x_1 et x_2 restant constants) le point représentatif décrit une circonférence;

4°. à la condition $x_1 = x_2 = 0$ correspond le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$;

5°. à la condition $x_1 = -\infty$ correspond l'axe des z .

A toute solution des équations (1) correspondra une courbe décrite par le point représentatif. Si la solution est périodique, cette courbe est fermée.

Considérons donc une courbe fermée C correspondant à une solution périodique.

Formons les équations (2), (3), (2') et (3') relatives à cette solution périodique et imaginons que l'on calcule les quantités α correspondantes.

Ces quantités sont au nombre de deux, et en vertu de la relation (6) elles sont égales et de signe contraire.

Deux cas peuvent se présenter: ou bien leur carré est négatif et la solution périodique est stable; ou bien leur carré est positif et la solution est instable.

Plaçons-nous dans ce dernier cas et appelons $+\alpha$ et $-\alpha$ les deux valeurs de l'exposant α ; nous pourrions supposer alors que α est réel positif.

Cela posé, les séries (4') seront développées suivant les puissances croissantes de $Ae^{\alpha t}$ et de $Be^{-\alpha t}$; mais elles ne seront pas convergentes si A et B y entrent à la fois; elles le deviendront au contraire, si l'on y fait soit $A = 0$, soit $B = 0$.

Faisons d'abord $A = 0$; alors les η seront développés suivant les puissances de $Be^{-\alpha t}$; si donc t croît indéfiniment, η_1 et η_2 tendent simultanément vers 0. Les solutions correspondantes peuvent s'appeler *solutions asymptotiques*; car pour $t = +\infty$, les η et par conséquent les ξ tendent vers 0, ce qui veut dire que la solution asymptotique se rapproche asymptotiquement de la solution périodique considérée.

Si on fait de même $B = 0$, les η sont développés suivant les puissances de $Ae^{\alpha t}$; ils tendent donc vers 0 quand t tend vers $-\infty$. Ce sont donc encore des solutions asymptotiques.

Il y a donc deux séries de solutions asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Chacune d'elles contient une constante arbitraire, la première B , la seconde A .

A chacune de ces séries de solutions asymptotiques correspondra une série de courbes se rapprochant asymptotiquement de la courbe fermée C et qu'on pourra appeler courbes asymptotiques. L'ensemble de ces courbes asymptotiques formera une *surface asymptotique*. Il y aura deux surfaces asymptotiques, la première correspondant à $t = +\infty$, la seconde à $t = -\infty$. Ces deux surfaces iront passer par la courbe fermée C .

Supposons que dans les équations (1) les X dépendent d'un paramètre μ et que les fonctions X soient développables suivant les puissances de ce paramètre.

Imaginons que pour $\mu = 0$, les exposants caractéristiques α soient tous distincts de telle façon que ces exposants, étant définis par l'équation $G(\alpha, \mu) = 0$ du paragraphe précédent, soient eux-mêmes développables suivant les puissances de μ .

Supposons enfin qu'on ait, ainsi que nous venons de le dire, annulé

toutes les constantes A qui correspondent à un α dont la partie réelle est négative ou nulle.

Les séries (4') qui définissent les quantités η_i dépendent alors de μ . Je me propose d'établir que ces séries peuvent être développées, non seulement suivant les puissances des $A_i e^{a_i \mu}$, mais encore suivant les puissances de μ .

Considérons l'inverse de l'un des diviseurs (5)

$$(\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i)^{-1}.$$

Je dis que cette expression peut être développée suivant les puissances de μ .

Soient $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ les k exposants caractéristiques dont la partie réelle est positive et que nous sommes convenus de conserver. Chacun d'eux est développable suivant les puissances de μ . Soit α_i^0 la valeur de α_i pour $\mu = 0$; nous pourrions prendre μ_0 assez petit pour que α_i diffère aussi peu que nous voudrions de α_i^0 quand $|\mu| < \mu_0$. Soit alors h une quantité positive plus petite que la plus petite des parties réelles des k quantités $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_k^0$; nous pourrions prendre μ_0 assez petit pour que, quand $|\mu| < \mu_0$, les k exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ aient leur partie réelle plus grande que h .

La partie réelle de $\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i$ sera alors plus grande que h (si $\beta_i > 0$), de sorte qu'on aura:

$$|\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i| > h.$$

Ainsi si $|\mu| < \mu_0$, la fonction

$$(\gamma\sqrt{-1} + \sum \alpha\beta - \alpha_i)^{-1}$$

reste uniforme, continue, finie et plus petite en valeur absolue que $\frac{1}{h}$.

Nous en concluons d'après un théorème bien connu que cette fonction est développable suivant les puissances de μ et que les coefficients du développement sont plus petits en valeur absolue que ceux du développement de

$$\frac{1}{h\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)}.$$

Il est à remarquer que les nombres h et μ_0 sont indépendants des entiers β et γ .

Il y aurait exception dans le cas où β_i serait nul. La partie réelle du diviseur (5) pourrait alors être plus petite que h et même être négative. Elle est égal en effet à la partie réelle de $\sum \alpha \beta$ qui est positive, moins la partie réelle de α_i qui est également positive et qui peut être plus grande que celle de $\sum \alpha \beta$, si β_i est nul.

Supposons que la partie réelle de α_i reste plus petite qu'un certain nombre h_1 tant que $|\mu| < \mu_0$. Alors si

$$(7) \quad \sum \beta > \frac{h_1}{h} + 1$$

la partie réelle de (5) est certainement plus grande que h ; il ne peut donc y avoir de difficulté que pour ceux des diviseurs (5) pour lesquels l'inégalité (7) n'a pas lieu.

Supposons maintenant que la partie imaginaire des quantités $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ reste constamment plus petite en valeur absolue qu'un certain nombre positif h_2 ; si l'on a alors:

$$(8) \quad |\gamma| > h_2 \sum \beta + h$$

la partie imaginaire de (5) et par conséquent son module sera encore plus grand que h ; de telle sorte qu'il ne peut y avoir de difficulté que pour ceux des diviseurs (5) pour lesquels aucune des inégalités (7) et (8) n'a lieu. Mais ces diviseurs qui ne satisfont à aucune de ces inégalités sont *en nombre fini*.

D'après une hypothèse que nous avons faite plus haut, aucun d'eux ne s'annule pour les valeurs de μ que nous considérons; nous pouvons donc prendre h et μ_0 assez petits pour que la valeur absolue de l'un quelconque d'entre eux reste plus grand que h quand $|\mu|$ reste plus petit que μ_0 .

Alors l'inverse d'un diviseur (5) *quelconque* est développable suivant les puissances de μ et les coefficients du développement sont plus petits en valeur absolue que ceux de

$$\frac{1}{h \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right)}.$$

Nous avons écrit plus haut:

$$H_i^p = \sum C \gamma_1^{\beta_1} \gamma_2^{\beta_2} \dots \gamma_n^{\beta_n} e^{\gamma_i^{p-1}}.$$

D'après nos hypothèses, C peut être développé suivant les puissances de μ de telle sorte que je puis poser:

$$C = \sum E\mu^l, \quad H_i^p = \sum E\mu^l \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n} e^{l\gamma_i^{-1}}.$$

Reprenons maintenant les équations (2'') en y faisant:

$$\varepsilon = h \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0} \right),$$

$$\bar{H}_i^p = \sum |E| \mu^l \eta_1^{\beta_1} \eta_2^{\beta_2} \dots \eta_n^{\beta_n}.$$

Les seconds membres des équations (2'') seront alors des séries convergentes ordonnées selon les puissances de μ , de η_1 , η_2 , ... et η_n .

On en tirera les η_i sous la forme de séries (4'') convergentes et ordonnées suivant les puissances de μ , $A_1 e^{\alpha_1 t}$, $A_2 e^{\alpha_2 t}$, ..., $A_k e^{\alpha_k t}$.

Des équations (2') nous tirerions d'autre part les η_i sous la forme de séries (4') ordonnées suivant les puissances de μ , $A_1 e^{\alpha_1 t}$, $A_2 e^{\alpha_2 t}$, ..., $A_k e^{\alpha_k t}$, $e^{t\gamma_i^{-1}}$, $e^{-t\gamma_i^{-1}}$. Chacun des termes de (4') est plus petit en valeur absolue que le terme correspondant de (4'') et comme les séries (4'') convergent, il en sera de même des séries (4').

§ 14. Solutions asymptotiques des équations de la dynamique.

Reprenons les équations (1) du § 11

$$(1) \quad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

et les hypothèses faites à leur sujet au début de ce § 11.

Nous avons vu dans ce § 11 que ces équations admettent des solutions périodiques et nous pouvons en conclure que pourvu que l'un des exposants caractéristiques α correspondants soit réel, ces équations admettront aussi des solutions asymptotiques.

A la fin du paragraphe précédent, nous avons envisagé le cas où dans les équations (1) dudit § 13, les seconds membres X_i sont développables suivant les puissances de μ , mais où les exposants caractéristiques restent distincts les uns des autres pour $\mu = 0$.

Dans le cas des équations qui vont maintenant nous occuper, c'est à dire des équations (1) des §§ 11 et 14, les seconds membres sont encore développables selon les puissances de μ ; mais tous les exposants caractéristiques sont nuls pour $\mu = 0$.

Il en résulte un grand nombre de différences importantes.

En premier lieu les exposants caractéristiques α ne sont pas développables suivant les puissances de μ , mais suivant celles de $\sqrt{\mu}$ (cf. § 12). De même les fonctions que j'ai appelées $\varphi_{i,k}$ au début du § 13 (et qui, dans le cas particulier des équations de la dynamique qui nous occupe ici, ne sont autres que les fonctions S_i et T_i du § 12) sont développables, non suivant les puissances de μ , mais suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Alors dans les équations (2') du § 13:

$$\frac{d\eta_i}{dt} = H_i$$

le second membre H_i est développé suivant les puissances des η , de $e^{t\sqrt{-1}}$, $e^{-t\sqrt{-1}}$ et de $\sqrt{\mu}$ (et non pas de μ).

On en tirera les η_i sous la forme des séries obtenues au paragraphe précédent

$$\eta_i = \sum N \frac{A_1^{\beta_1} A_2^{\beta_2} \dots A_n^{\beta_n}}{\Pi} e^{t[\sum \alpha \beta + \gamma \sqrt{-1}]}$$

et N et Π seront développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Un certain nombre de questions se pose alors naturellement:

1°. Nous savons que N et Π sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; en est-il de même du quotient $\frac{N}{\Pi}$?

2°. S'il en est ainsi, il existe des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des $A_i e^{a_i t}$, de $e^{t\sqrt{-1}}$ et de $e^{-t\sqrt{-1}}$ qui satisfont *formellement* aux équations proposées; ces séries sont-elles convergentes?

3°. Si elles ne sont pas convergentes, quel parti peut on en tirer pour le calcul des solutions asymptotiques.

Je me propose de démontrer que l'on peut développer $\frac{N}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ et que par conséquent il existe des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des $A_i e^{a_i t}$, de $e^{t\sqrt{-1}}$ et de $e^{-t\sqrt{-1}}$ qui satisfont

formellement aux équations (1). On pourrait en douter; en effet Π est le produit d'un certain nombre des diviseurs (5) du paragraphe précédent. Tous ces diviseurs sont développables suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; mais quelques-uns d'entre eux, ceux pour lesquels γ est nul, s'annulent avec $\sqrt{\mu}$. Il peut donc arriver que Π s'annule avec μ et contienne en facteur une certaine puissance de $\sqrt{\mu}$. Si alors N ne contenait pas cette même puissance en facteur, le quotient $\frac{N}{\Pi}$ se développerait encore selon les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$, mais le développement commencerait par des puissances négatives.

Je dis qu'il n'en est pas ainsi et que le développement de $\frac{N}{\Pi}$ ne contient que des puissances positives de $\sqrt{\mu}$.

Voyons par quel mécanisme ces puissances négatives de $\sqrt{\mu}$ disparaissent. Posons:

$$A_i e^{\alpha_i t} = w_i$$

et considérons les x et les y comme des fonctions des variables t et w .

Il importe avant d'aller plus loin de faire la remarque suivante: parmi les $2n$ exposants caractéristiques α , deux sont nuls et les autres sont deux à deux égaux et de signe contraire. Nous ne conserverons que $n - 1$ au plus de ces exposants en convenant de regarder comme nuls les coefficients A_i et les variables w_i qui correspondent aux $n + 1$ exposants rejetés. Nous ne conserverons que ceux de ces exposants dont la partie réelle est positive.

Cela posé, les équations (1) deviennent:

$$(2) \quad \frac{dx_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dx_i}{dw_k} = \frac{dF}{dy_i},$$

$$(3) \quad \frac{dy_i}{dt} + \sum_k \alpha_k w_k \frac{dy_i}{dw_k} = -\frac{dF}{dx_i}.$$

Cherchons, en partant de ces équations, à développer les x_i et les $y_i - n_i t$ suivant les puissances croissantes de $\sqrt{\mu}$ et des w de telle façon que les coefficients soient des fonctions périodiques de t .

Nous pouvons écrire:

$$\alpha_k = \alpha_k^1 \sqrt{\mu} + \alpha_k^2 \mu + \dots = \sum \alpha_k^p \mu^{\frac{p}{2}}$$

car nous avons vu au § 12 comment on peut développer les exposants caractéristiques suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Ecrivons d'autre part:

$$x_i = x_i^0 + x_i^1 \sqrt{\mu} + \dots = \sum x_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

$$y_i - n_i t = y_i^0 + y_i^1 \sqrt{\mu} + \dots = \sum y_i^p \mu^{\frac{p}{2}},$$

les x_i^p et les y_i^p étant des fonctions de t et des w , périodiques par rapport à t et développables suivant les puissances de w .

Si dans les équations (2) et (3) nous substituons ces valeurs à la place de α_k , des x_i et des y_i ; les deux membres de ces équations seront développés suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$.

Egalons dans les deux membres des équations (2) les coefficients de $\mu^{\frac{p+1}{2}}$, et dans les deux membres des équations (3) les coefficients de $\mu^{\frac{p}{2}}$, nous obtiendrons les équations suivantes:

$$(4) \quad \frac{dx_i^{p+1}}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^p}{dw_k} = Z_i^p + \sum_k \frac{d^2 F_1}{dy_i^0 dy_k^0} y_k^{p-1},$$

$$\frac{dy_i^p}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^{p-1}}{dw_k} = T_i^p - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} x_k^p,$$

où Z_i^p et T_i^p ne dépendent que de

$$x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{p-1},$$

$$y_i^0, y_i^1, \dots, y_i^{p-2}$$

Convenons, comme nous l'avons fait plus haut, de représenter par $[U]$ la valeur moyenne de U , si U est une fonction périodique de t .

Des équations (4) nous pourrions alors déduire les suivantes:

$$(5) \quad \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[x_i^p]}{dw_k} = [Z_i^p] + \sum_k \left[\frac{d^2 F_1}{dy_i^0 dy_k^0} y_k^{p-1} \right],$$

$$\sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{d[y_i^{p-1}]}{dw_k} = [T_i^p] - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} [x_k^p].$$

Supposons maintenant qu'un calcul préalable nous ait fait connaître :

$$\begin{aligned} x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{p-1}, x_i^p - [x_i^p], \\ y_i^0, y_i^1, \dots, y_i^{p-2}, y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}]. \end{aligned}$$

Les équations (5) vont nous permettre de calculer $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ et par conséquent x_i^p et y_i^{p-1} . Les équations (4) nous permettront ensuite de déterminer

$$x_i^{p+1} - [x_i^{p+1}] \quad \text{et} \quad y_i^p - [y_i^p],$$

de sorte que ce procédé nous fournira par récurrence tous les coefficients des développements de x_i et de y_i .

La seule difficulté est la détermination de $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ par les équations (5).

Les fonctions $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$ sont développées suivant les puissances croissantes des w et nous allons calculer les divers termes de ces développements en commençant par les termes du degré le moins élevé.

Pour cela nous allons reprendre les notations du § 12, c'est à dire que nous allons poser :

$$-\frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} = C_{ik}^0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{d^2 F_1}{dy_i^0 dy_k^0} \right] = b_{ik}$$

(pour les valeurs nulles de w).

Si alors nous appelons ξ_i et η_i les coefficients de

$$w_1^{m_1} w_2^{m_2} \dots w_{n-1}^{m_{n-1}}$$

dans $[x_i^p]$ et $[y_i^{p-1}]$, nous aurons pour déterminer ces coefficients les équations suivantes :

$$(6) \quad \begin{aligned} \sum_k b_{ik} \eta_k - S \xi_i &= \lambda_i, \\ \sum_k C_{ik}^0 \xi_k - S \eta_i &= \mu_i. \end{aligned}$$

Dans ces équations (6) λ_i et μ_i sont des quantités connues, parce qu'elles ne dépendent que de

$$\begin{aligned} x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^{p-1}, x_i^p - [x_i^p], \\ y_i^0, y_i^1, \dots, y_i^{p-2}, y_i^{p-1} - [y_i^{p-1}] \end{aligned}$$

ou des termes de $[x_i^2]$ et $[y_i^{2-1}]$ dont le degré par rapport aux w est plus petit que:

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}.$$

De plus nous avons posé pour abrégé

$$S = m_1 \alpha_1^1 + m_2 \alpha_2^1 + \dots + m_{n-1} \alpha_{n-1}^1.$$

Nous avons donc pour le calcul des coefficients ξ_i et η_i un système d'équations linéaires. Il ne pourrait y avoir de difficulté que si le déterminant de ces équations était nul; or ce déterminant est égal à:

$$S^2[S^2 - (\alpha_1^1)^2][S^2 - (\alpha_2^1)^2] \dots [S^2 - (\alpha_{n-1}^1)^2].$$

Il ne pourrait s'annuler que pour:

$$S = 0, \quad S = \pm \alpha_i^1,$$

c'est à dire pour

$$m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1} = 0 \text{ ou } 1.$$

On ne pourrait donc rencontrer de difficulté que dans le calcul des termes du degré 0 ou 1 par rapport aux w .

Mais nous n'avons pas à revenir sur le calcul de ces termes; en effet nous avons appris à calculer les termes indépendants des w dans le § 11 et les coefficients de

$$w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$$

dans le § 12.

Les termes indépendants des w ne sont en effet autre chose que les séries (8) du § 11 et les coefficients de

$$w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$$

ne sont autre chose que les séries S_i et T_i du § 12.

Il me reste à dire un mot des premières approximations.

Nous donnerons aux x_i^0 des valeurs constantes qui ne sont autres que celles que nous avons désignées ainsi au § 11.

Nous aurons alors les équations suivantes:

$$(7) \quad \frac{dy_i^0}{dt} = 0, \quad \frac{dx_i^1}{dt} = 0, \quad \frac{dy_i^1}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k} = - \sum_k \frac{d^2 F_0}{dx_i^0 dx_k^0} x_k^1,$$

$$\frac{dx_i^2}{dt} + \sum_k \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k} = \frac{dF_1}{dy_i^0}.$$

Dans F_0 qui ne dépend que des x_i , ces quantités doivent être remplacés par x_i^0 . Dans F_1 les x_i sont remplacés par x_i^0 et les y_i par $n_i t$. F_1 devient alors une fonction périodique de t dont la période est T . Nous désignerons par ϕ comme dans les §§ 11 et 12 la valeur moyenne de cette fonction périodique F_1 ; ϕ est alors une fonction périodique et de période 2π par rapport aux y_i^0 .

Les deux premières équations (7) montrent que les y_i^0 et les x_i^1 ne dépendent que des w . En égalant dans les deux dernières équations (7) les valeurs moyennes des deux membres, il vient:

$$(8) \quad \begin{aligned} \sum \alpha_k^1 w_k \frac{dy_i^0}{dw_k} &= \sum C_{ik}^0 x_k^1, \\ \sum \alpha_k^1 w_k \frac{dx_i^1}{dw_k} &= \frac{d\phi}{dy_i^0}. \end{aligned}$$

Ces équations (8) doivent servir à déterminer les y_i^0 et les x_i^1 en fonctions des w . Peut-on satisfaire à ces équations en substituant à la place des y_i^0 et des x_i^1 des séries développées suivant les puissances des w ?

Pour nous en rendre compte envisageons les équations différentielles suivantes:

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{dy_i^0}{dt} &= \sum C_{ik}^0 x_k^1, \\ \frac{dx_i^1}{dt} &= \frac{d\phi}{dy_i^0}. \end{aligned}$$

Ces équations différentielles où les fonctions inconnues sont les y_i^0 et les x_i^1 , admettront une solution périodique

$$x_i^1 = 0, \quad y_i^0 = \bar{w}_i,$$

\bar{w}_i étant la quantité désignée ainsi au § 11.

Les exposants caractéristiques relatifs à cette solution périodique sont précisément les quantités α_k^1 . Parmi ces quantités nous sommes convenus de ne conserver que celles dont la partie réelle est positive. Les équations (9) admettent un système de solutions asymptotiques et il est aisé de voir que ces solutions se présentent sous la forme de séries développées suivant les puissances des w . Ces séries satisferont alors aux équations (8). Ces équations peuvent donc être résolues.

Les x_i^1 et les y_i^0 étant ainsi déterminés, le reste du calcul ne présente plus comme nous l'avons vu aucune difficulté. Il existe donc des séries ordonnées suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, des w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui satisfont formellement aux équations (1).

Cela prouve que le développement de $\frac{N}{\Pi}$ ne débute jamais par une puissance négative de $\sqrt{\mu}$.

Malheureusement les séries ainsi obtenues ne sont pas convergentes. Soit en effet:

$$\frac{1}{\sqrt{-1}\gamma + \sum a\beta - a_i}$$

Si γ n'est pas nul, cette expression est développable suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$; mais le rayon de convergence de la série ainsi obtenue tend vers 0 quand $\frac{\gamma}{\sum\beta}$ tend vers 0.

Si donc on développe les diverses quantités $\frac{1}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$ on pourra toujours parmi ces quantités, en trouver une infinité pour lesquelles le rayon de convergence du développement est aussi petit qu'on le veut.

On pourrait encore espérer, quelque invraisemblable que cela puisse paraître, qu'il n'en est pas de même pour les développements des diverses quantités $\frac{N}{\Pi}$; mais nous verrons dans la suite d'une façon rigoureuse qu'il n'est pas ainsi en général; il faut donc renoncer à ce faible espoir et conclure que les séries que nous venons de former sont divergentes.

Mais quoiqu'elles soient divergentes ne peut-on en tirer quelque parti?

Considérons d'abord la série suivante qui est plus simple que celles que nous avons en vue

$$F(w, \mu) = \sum_n \frac{w^n}{1 + n\mu}$$

Cette série converge uniformément quand μ reste positif et que w reste plus petit en valeur absolue qu'un certain nombre positif w_0 plus petit que 1. De même la série:

$$\frac{1}{p} \frac{d^p F(w, \mu)}{d\mu^p} = \pm \sum \frac{n^{p-1} w^n}{(1 + n\mu)^p}$$

converge uniformément.

Si maintenant l'on cherche à développer $F(w, \mu)$ suivant les puissances de μ , la série à laquelle on est conduit

$$(10) \quad \sum w^n (-n)^p \mu^p$$

ne converge pas. Si dans cette série on néglige tous les termes où l'exposant de μ est supérieur à p , on obtient une certaine fonction

$$\Phi_p(w, \mu).$$

Il est aisé de voir que l'expression:

$$\frac{F(w, \mu) - \Phi_p(w, \mu)}{\mu^p}$$

tend vers 0 quand μ tend vers 0 par valeurs positives, de sorte que la série (10) représente asymptotiquement la fonction $F(w, \mu)$ pour les petites valeurs de μ de la même manière que la série de STIRLING représente asymptotiquement la fonction eulérienne pour les grandes valeurs de x .

Les séries divergentes que nous avons apprises à former dans le présent paragraphe sont tout à fait analogues à la série (10).

Considérons en effet l'une des séries:

$$(10') \quad \sum \frac{N}{\Pi} w_1^{s_1} w_2^{s_2} \dots w_k^{s_k} e^{\pm t \sqrt{-1}} = F(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \dots, w_k, t)$$

et

$$\sum w_1^{s_1} w_2^{s_2} \dots w_k^{s_k} e^{\pm t \sqrt{-1}} \frac{d^p \left(\frac{N}{\Pi} \right)}{(d\sqrt{\mu})^p} = \frac{d^p F}{(d\sqrt{\mu})^p};$$

ces séries sont uniformément convergentes pourvu que les w restent inférieurs en valeur absolue à certaines limites et que $\sqrt{\mu}$ reste réel.

Si l'on développe $\frac{N}{\Pi}$ suivant les puissances de $\sqrt{\mu}$, les séries (10') sont divergentes ainsi que nous l'avons dit. Supposons qu'on néglige dans le développement les termes où l'exposant de $\sqrt{\mu}$ est supérieur à p , on obtiendra une certaine fonction

$$\Phi_p(\sqrt{\mu}, w_1, w_2, \dots, w_k, t)$$

qui sera développable suivant les puissances des w , de $e^{\pm t \sqrt{-1}}$ et qui sera un polynôme de degré p en $\sqrt{\mu}$.

On voit alors que l'expression

$$\frac{F - \Phi_p}{\sqrt{\mu^p}}$$

tend vers 0 quand μ tend vers 0 pas valeurs positives, et cela quelque grand que soit p .

En effet si l'on désigne par H_p l'ensemble des termes du développement de $\frac{N}{\Pi}$ où l'exposant de $\sqrt{\mu}$ est au plus égal à p , on a :

$$\frac{F - \Phi_p}{\sqrt{\mu^p}} = \sum \frac{1}{\sqrt{\mu^p}} \left(\frac{N}{\Pi} - H_p \right) w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \dots w_k^{\beta_k} e^{\alpha\sqrt{-1}}$$

et la série du second membre est *uniformément* convergente et tous ses termes tendent vers 0 quand μ tend vers 0.

On peut donc dire que les séries que nous avons obtenues dans le présent § 14 représentent les solutions asymptotiques pour les petites valeurs de μ de la même manière que la série de STIRLING représente les fonctions eulériennes.

On s'en rendra d'ailleurs mieux compte de la manière suivante; supposons deux degrés de liberté seulement pour fixer les idées; alors nous ne conserverons plus qu'une seule des quantités w et nous pourrons écrire nos équations sous la forme suivante:

$$\frac{dx_i}{dt} + \alpha w \frac{dx_i}{dw} = \frac{dF}{dy_i}, \quad \frac{dy_i}{dt} + \alpha w \frac{dy_i}{dw} = -\frac{dF}{dx_i} \quad (i=1, 2)$$

en supprimant les indices d' α et de w devenus inutiles.

Nous savons qu' α est développable suivant les puissances impaires de $\sqrt{\mu}$ et par conséquent α^2 suivant les puissances de μ ; inversement μ est développable suivant les puissances de α^2 ; nous pouvons remplacer μ par ce développement de sorte que F sera développé suivant les puissances de α^2 . Pour $\alpha = 0$, F se réduit à F_0 qui ne dépend que de x_1 et de x_2 .

Soit:

$$x_i = \varphi_i(t), \quad y_i = \psi_i(t)$$

la solution périodique qui nous sert de point de départ. Posons, comme au § 12

$$x_i = \varphi_i(t) + \xi_i, \quad y_i = \psi_i(t) + \eta_i$$

nos équations deviendront:

$$(11) \quad \frac{d\xi_i}{dt} + \alpha w \frac{d\xi_i}{dw} = \Xi_i, \quad \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} = H_i.$$

Ξ_i et H_i sont développés suivant les puissances des ξ_i , des η_i et de α^2 ; et les coefficients sont des fonctions périodiques de t .

Pour $\alpha = 0$, $\frac{dF}{dy_i}$ et par conséquent Ξ_i s'annulent; donc Ξ_i est divisible par α^2 et je puis poser:

$$\Xi_i = \alpha^2 X_i + \alpha^2 X'_i,$$

$\alpha^2 X_i$ représentant l'ensemble des termes du premier degré par rapport aux ξ et aux η , et $\alpha^2 X'_i$ représentant l'ensemble des termes de degré supérieur.

De même, quand α est nul, $\frac{dF}{dx_i}$ et par conséquent H_i ne dépendent plus que des ξ_i et non des η_i .

Je puis donc poser:

$$H_i = Y_i + Y'_i + \alpha^2 Q_i + \alpha^2 Q'_i,$$

$Y_i + \alpha^2 Q_i$ représentant l'ensemble des termes du premier degré par rapport aux ξ et η , pendant que $Y'_i + \alpha^2 Q'_i$ représentent l'ensemble des termes de degré supérieur au premier. Je suppose en outre que Y_i et Y'_i ne dépendent que de ξ_1 et de ξ_2 .

Posons

$$\xi_1 = \alpha \zeta_1, \quad \xi_2 = \alpha \zeta_2,$$

Y_i deviendra divisible par α et Y'_i par α^2 de sorte que je pourrai poser:

$$Y_i + \alpha^2 Q_i = \alpha Z_i, \quad Y'_i + \alpha^2 Q'_i = \alpha^2 Z'_i$$

et que nos équations deviendront:

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{d\zeta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\zeta_i}{dw} &= \alpha X_i + \alpha X'_i, \\ \frac{d\eta_i}{dt} + \alpha w \frac{d\eta_i}{dw} &= \alpha Z_i + \alpha^2 Z'_i. \end{aligned}$$

Considérons les équations:

$$(13) \quad \begin{aligned} \frac{d\zeta_i}{dt} &= \alpha X_i, \\ \frac{d\eta_i}{dt} &= \alpha Z_i. \end{aligned}$$

Ces équations sont linéaires par rapport aux inconnues ζ_i et η_i . Elles ne diffèrent pas des équations (2) du § 12, sinon parce que ξ_1 et ξ_2 y sont remplacés par $\alpha\zeta_1$ et $\alpha\zeta_2$. D'après ce que nous avons vu au § 12, l'équation qui définit les exposants caractéristiques admet 4 racines, l'une égale à $+\alpha$, l'autre à $-\alpha$ et les deux autres à 0.

A la première racine, c'est à dire à la racine $+\alpha$, correspondra une solution des équations (2) du § 12 que nous avons appris à former dans ce § 12 et que nous avons écrite ainsi:

$$\xi_i = e^{\alpha t} S_i, \quad \eta_i = e^{\alpha t} T_i.$$

Je rappelle que S_i^0 est nul et par conséquent que S_i est divisible par α .

A la seconde racine $-\alpha$ correspondra de même une autre solution des équations (2) et nous l'écrivons:

$$\xi_i = e^{-\alpha t} S'_i, \quad \eta_i = e^{-\alpha t} T'_i.$$

Enfin aux deux racines 0, correspondront deux solutions des équations (2) que nous écrivons:

$$\begin{aligned} \xi_i &= S''_i, & \eta_i &= T''_i, \\ \xi_i &= S'''_i + \alpha t S''_i, & \eta_i &= T'''_i + \alpha t T''_i. \end{aligned}$$

$T_i, T'_i, T''_i, S_i, S'_i, S''_i$ sont des fonctions périodiques de t , comme S_i et T_i .

De plus S'_i, S''_i, S'''_i seront comme S_i divisibles par α .

Posons alors:

$$\begin{aligned} \alpha\zeta_1 &= S_1\theta_1 + S'_1\theta_2 + S''_1\theta_3 + S'''_1\theta_4, \\ \alpha\zeta_2 &= S_2\theta_1 + S'_2\theta_2 + S''_2\theta_3 + S'''_2\theta_4, \\ \eta_1 &= T_1\theta_1 + T'_1\theta_2 + T''_1\theta_3 + T'''_1\theta_4, \\ \eta_2 &= T_2\theta_1 + T'_2\theta_2 + T''_2\theta_3 + T'''_2\theta_4. \end{aligned}$$

Les fonctions θ_i ainsi définies joueront un rôle analogue à celui des fonctions η_i du § 13. Les équations (12) deviennent alors

$$(14) \quad \begin{aligned} \frac{d\theta_1}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_1}{dw} - \alpha\theta_1 &= \alpha\theta_1, & \frac{d\theta_2}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_2}{dw} + \alpha\theta_2 &= \alpha\theta_2, \\ \frac{d\theta_3}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_3}{dw} &= \alpha\theta_4 + \alpha\theta_3. & \frac{d\theta_4}{dt} + \alpha w \frac{d\theta_4}{dw} &= \alpha\theta_4. \end{aligned}$$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 sont des fonctions développées suivant les puissances de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ et α dont tous les termes sont du 2^d degré au moins par rapport aux θ , et dont les coefficients sont des fonctions périodiques de t . De plus les θ doivent être des fonctions périodiques de t et les termes du 1^{er} degré en w dans $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 doivent se réduire à $w, 0, 0$ et 0 .

Ces équations (14) sont analogues aux équations (2') du § 13.

Cela posé, soit Φ une fonction qui, de même que $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 , soit développée suivant les puissances de $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, de $\alpha, e^{t\sqrt{-1}}$ et $e^{-t\sqrt{-1}}$ et qui soit telle que chacun de ses coefficients soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient du terme correspondant dans $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ et θ_4 ; tous les termes de Φ seront d'ailleurs, comme ceux des θ_i , du second degré au moins par rapport aux θ .

Observons que le nombre

$$\frac{n\sqrt{-1}}{\alpha} + p$$

(où n est entier positif, négatif ou nul, et où p est entier positif et au moins égal à 1) est toujours plus grand en valeur absolue que 1, quels que soient d'ailleurs n, p et α .

Formons alors les équations:

$$(15) \quad \theta_1 = w + \Phi, \quad \theta_2 = \Phi, \quad \theta_3 = \theta_4 + \Phi, \quad \theta_4 = \Phi$$

qui sont analogues aux équations (2'') du § 13.

Des équations (14) on peut tirer les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de w et de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$ et qui sont analogues aux séries (4') du § 13. Des équations (15) on peut tirer les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances des mêmes variables et analogues aux séries (4'') du § 13. Chacun des termes de ces dernières

séries est positif et plus grand en valeur absolue que le terme correspondant des premières séries; si donc elles convergent, il en est de même des séries tirées des équations (14).

Or il est aisé de voir que l'on peut trouver un nombre w_0 indépendant de α , tel que si $|w| < w_0$, les séries tirées de (15) convergent.

Il en résulte que les séries ordonnées suivant les puissances de w et tirées de (14) convergent uniformément quelque petit que soit α et par conséquent quelque petit que soit μ , ainsi que je l'ai annoncé plus haut.

Nous possédons maintenant les θ sous la forme de séries ordonnées suivant les puissances de w et de $e^{\pm i\sqrt{-1}}$; les coefficients sont des fonctions connues de α . Si on développe chacun de ces coefficients suivant les puissances de α , on obtiendra les θ développés suivant les puissances de α . Les séries ainsi obtenues sont divergentes, comme nous l'avons vu plus haut; soient néanmoins:

$$(16) \quad \theta_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \dots + \alpha^p\theta_i^p + \dots$$

ces séries.

Posons:

$$H_1 = \theta_1 + \theta_1, \quad H_2 = \theta_2 - \theta_2, \quad H_3 = \theta_3 + \theta_4, \quad H_4 = \theta_4.$$

Posons:

$$(17) \quad \theta_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \dots + \alpha^p\theta_i^p + \alpha^p u_i$$

en égalant θ_i aux $p + 1$ premiers termes de la série (16) plus un terme complémentaire $\alpha^p u_i$.

Si dans H_i on remplace les θ_i par leurs développements (17), les H_i peuvent se développer suivant les puissances de α et on peut écrire:

$$H_i = \theta_i^0 + \alpha\theta_i^1 + \alpha^2\theta_i^2 + \dots + \alpha^{p-1}\theta_i^{p-1} + \alpha^p U_i,$$

les θ_i^k étant indépendants de α pendant que U_i est développable suivant les puissances de α .

On aura alors les équations:

$$(18) \quad \frac{d\theta_i^0}{dt} = 0, \quad \frac{d\theta_i^1}{dt} + w \frac{d\theta_i^0}{dw} = \theta_i^0, \\ \frac{d\theta_i^2}{dt} + w \frac{d\theta_i^1}{dw} = \theta_i^1, \quad \dots, \quad \frac{d\theta_i^p}{dt} + w \frac{d\theta_i^{p-1}}{dw} = \theta_i^{p-1}$$

et ensuite:

$$(19) \quad \frac{du_i}{dt} + \alpha w \frac{du_i}{dw} + \alpha w \frac{d\theta_i^p}{dw} = \alpha U_i.$$

Voici quelle est la forme de la fonction U_i ; les quantités θ_i^t peuvent être regardées comme des fonctions connues de t et de w , définies par les équations (18) et par l'équation (20) que j'écrirai plus loin; pendant que les u_i restent les fonctions inconnues. Alors U_i est une fonction développée suivant les puissances de w , de $e^{\pm t\sqrt{-1}}$, de α et des u_i . De plus tout terme du q^{e} degré par rapport aux u_i est au moins du degré $p(q-1)$ par rapport à α .

Soit U_i^0 ce que devient U_i quand on y annule α et les u_i ; on aura:

$$(20) \quad w \frac{d[\theta_i^p]}{dw} = [U_i^0].$$

Je puis ensuite, en posant:

$$U_i' = U_i - w \frac{d\theta_i^p}{dw}$$

puis:

$$V_1 = U_1' - u_1, \quad V_2 = U_2' + u_2, \quad V_3 = U_3' - u_4, \quad V_4 = U_4',$$

mettre les équations (19) sous la forme:

$$(21) \quad \begin{aligned} \frac{du_1}{dt} + \alpha w \frac{du_1}{dw} - \alpha u_1 &= \alpha V_1, & \frac{du_2}{dt} + \alpha w \frac{du_2}{dw} + \alpha u_2 &= \alpha V_2, \\ \frac{du_3}{dt} + \alpha w \frac{du_3}{dw} - \alpha u_4 &= \alpha V_3, & \frac{du_4}{dt} + \alpha w \frac{du_4}{dw} &= \alpha V_4. \end{aligned}$$

On voit alors que les V_i ne contiennent que des termes du 2^{d} degré au moins par rapport à w et aux u_i .

En effet les θ_i sont divisibles par w et se réduisent à w ou à 0 quand on y supprime les termes de degré supérieur au premier en w . Il en résulte d'abord que θ_i^p est divisible par w^2 . D'autre part le second membre de l'équation (17) ne contiendra que des termes du 1^{er} degré au moins par rapport à w et u_i . Donc θ_i ne contient que des termes du 2^{d} degré au moins par rapport à w et aux u_i . Il en résulte que les

seuls termes du 1^{er} degré qui peuvent subsister dans U_1, U_2, U_3 et U_4 se réduisent respectivement à $u_1, -u_2, u_4$ et 0.

D'ailleurs $w \frac{d\theta_i^p}{dw}$ est divisible par w^2 ; donc les V_i ne contiennent que des termes du 2^d degré au moins.

C. Q. F. D.

Des équations (21) on peut tirer les u_i sous la forme de séries développées suivant les puissances de w et de $e^{\pm i\sqrt{-1}}$. En appliquant à ces équations le même raisonnement qu'aux équations (14) on peut démontrer que ces séries convergent quand $|w| < w_0$ et que la convergence reste uniforme quelque petit que soit α .

Il en est de même pour les séries qui représentent $\frac{du_i}{dw}, \frac{d^2u_i}{dw^2}$ etc.

Il résulte de là qu'on peut assigner une limite supérieure indépendante de α , à u_i , à $\frac{du_i}{dw}, \frac{d^2u_i}{dw^2}$ etc., pourvu que $|w| < w_0$.

Mais je veux démontrer maintenant que cela a encore lieu pour toutes les valeurs positives de w .

Reprenons les équations:

$$\frac{du_i}{dt} + \alpha w \frac{du_i}{dw} = U_i.$$

U_i peut être regardée comme une série développée suivant les puissances de α et des u_i et dont les coefficients sont des fonctions de t et de w . Je dis que cette série reste convergente quels que soient t et w pourvu que α et les u_i soient assez petits. En effet elle ne pourrait cesser de converger que si la fonction:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2)$$

cessait d'être développable suivant les puissances de α , des v_i et des v'_i quand on y remplace x_i par:

$$x_i^0 + \alpha x_i^1 + \alpha^2 x_i^2 + \dots + \alpha^{p+1} x_i^{p+1} + \alpha^{p+1} v_i$$

et y_i par:

$$n_i t + y_i^0 + \alpha y_i^1 + \alpha^2 y_i^2 + \dots + \alpha^p y_i^p + \alpha^p v'_i,$$

ou, ce qui revient au même, si la fonction F pour une valeur quelconque de t ou de w (c'est à dire pour un système quelconque de valeurs de t , de y_1^0 et de y_2^0) cessait d'être développable suivant les puissances de $x_i - x_i^0$, et de $y_i - n_i t - y_i^0$. Or il est manifeste qu'il n'en est pas ainsi.

Je puis donc toujours trouver une fonction Φ développée suivant les puissances de α et des u_i , mais dont les coefficients sont des constantes au lieu d'être fonctions de t et de w comme ceux de U'_i ; et de plus m'arranger de telle sorte que le coefficient d'un terme quelconque de Φ soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de U'_i ($i = 1, 2, 3, 4$), au moins pour les valeurs de t et de w que j'aurai à considérer.

J'ajouterai que, d'après la forme particulière des fonctions U'_i , je puis trouver deux nombres réels positifs M et β tels que la fonction Φ satisfasse à la condition que je viens d'énoncer si je prends:

$$\Phi = \frac{M(1 + u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}{1 - \beta\alpha - \beta\alpha^p(u_1 + u_2 + u_3 + u_4)}.$$

Si je considère les valeurs de w positives et inférieures à une certaine limite W , je devrai prendre, pour satisfaire à cette condition, de nombres M et β d'autant plus grands que W sera plus grand; mais tant que W sera fini, les nombres M et β seront eux-mêmes finis.

Soit maintenant w_1 une valeur positive de w plus petite que w_0 . D'après ce que nous avons vu plus haut, il est possible d'assigner pour $w = w_1$ une limite supérieure à u_1, u_2, u_3 et u_4 ; soit u_0 cette limite, on aura donc

$$|u_i| < u_0 \quad \text{pour } w = w_1.$$

Soit maintenant u' une fonction définie par les conditions suivantes

$$\frac{du'}{dt} + \alpha w \frac{du'}{dw} = \frac{\alpha M(4u' + 1)}{1 - \beta\alpha - 4\beta\alpha^p u'},$$

$$u' = u_0 \quad \text{pour } w = w_1.$$

On aura manifestement pour toutes les valeurs de t et de w :

$$|u_i| < u'. \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

Or on trouve sans peine:

$$\frac{1 - \beta a + \beta a^p}{4M} \log \frac{1 + 4u'}{1 + 4u_0} - \frac{\beta a^p}{M} (u' - u_0) = \log \frac{w}{w_1}$$

et pour $\alpha = 0$, on trouve:

$$\frac{1 + 4u'}{1 + 4u_0} = \left(\frac{w}{w_1}\right)^{4M},$$

ce qui montre que w' reste finie quand α tend vers 0.

Nous devons en conclure que les quantités u_i restent également finies quand α tend vers 0.

Il résulte de là que la série

$$\theta_i^0 + \alpha \theta_i^1 + \alpha^2 \theta_i^2 + \dots$$

représente la fonction θ_i asymptotiquement (c'est à dire à la façon de la série de STIRLING) ou en d'autres termes que l'expression:

$$\frac{\theta_i - \theta_i^0 - \alpha \theta_i^1 - \alpha^2 \theta_i^2 - \dots - \alpha^{p-1} \theta_i^{p-1}}{\alpha^{p-1}}$$

tend vers 0 avec α . En effet cette expression est égale à:

$$\alpha(\theta_i^p + u_i)$$

et nous venons de voir que $\theta_i^p + u_i$ reste fini quand α tend vers 0.

Mais ce n'est pas tout; je dis que $\frac{du_i}{dw}$ reste fini quand α tend vers 0.

Nous avons en effet:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{du_i}{dw} \right) + \alpha w \frac{d}{dw} \left(\frac{du_i}{dw} \right) + \alpha \left(\frac{du_i}{dw} \right) = \alpha \sum_k \frac{dU'_i}{du_k} \frac{du_k}{dw} + \alpha \frac{dU'_i}{dw}.$$

$\frac{dU'_i}{du_k}$ et $\frac{dU'_i}{dw}$ sont des fonctions de t , de w , de α et des u_i ; mais d'après ce que nous venons de voir, nous pouvons assigner aux u_i des limites supérieures; nous pourrions donc en assigner également aux $\frac{dU'_i}{du_k}$ et aux $\frac{dU'_i}{dw}$.

Supposons par exemple que l'on ait:

$$\left| \frac{dU'_i}{du_k} \right| < A, \quad \left| \frac{dU'_i}{dw} \right| < B \quad (\text{pour } w < W),$$

A et B étant deux nombres positifs.

D'autre part, nous savons qu'on peut assigner une limite à $\frac{du_i}{dw}$ pour $w = w_1$.

Supposons par exemple que l'on ait:

$$\left| \frac{du_i}{dw} \right| < u'_0 \quad \text{pour } w = w_1,$$

u'_0 étant un nombre positif. Soit ensuite u' une fonction définie comme il suit:

$$\frac{du'}{dw} + \alpha w \frac{du'}{dw} = \alpha u'(4A + W) + \alpha B,$$

$$u' = u'_0 \quad \text{pour } w = w_1$$

On aura manifestement:

$$\left| \frac{du_i}{dw} \right| < u'.$$

Or on voit sans peine que u' ne dépend que de w et satisfait à l'équation

$$w \frac{du'}{dw} = u'(4A + W) + B.$$

Donc u' est fini; donc $\frac{du_i}{dw}$ reste finie quand α tend vers 0. Donc on a *asymptotiquement* (en entendant ce mot au même sens que plus haut):

$$\frac{d\theta_i}{dw} = \frac{d\theta_i^0}{dw} + \alpha \frac{d\theta_i^1}{dw} + \alpha^2 \frac{d\theta_i^2}{dw} + \dots$$

On démontrerait de même que l'on a asymptotiquement:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{d\theta_i^0}{dt} + \alpha \frac{d\theta_i^1}{dt} + \alpha^2 \frac{d\theta_i^2}{dt} + \dots,$$

$$\frac{d^2\theta_i}{dw^2} = \frac{d^2\theta_i^0}{dw^2} + \alpha \frac{d^2\theta_i^1}{dw^2} + \alpha^2 \frac{d^2\theta_i^2}{dw^2} + \dots$$

Voici donc la conclusion finale à laquelle nous parvenons:

Les séries:

$$x_i^0 + \sqrt{\mu}x_i^1 + \mu x_i^2 + \dots, \quad n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu}y_i^1 + \mu y_i^2 + \dots$$

définies dans ce paragraphe sont divergentes, mais elles jouissent de la même propriété que la série de STIRLING de telle sorte qu'on a asymptotiquement:

$$x_i = x_i^0 + \sqrt{\mu}x_i^1 + \mu x_i^2 + \dots,$$

$$y_i = n_i t + y_i^0 + \sqrt{\mu}y_i^1 + \mu y_i^2 + \dots$$

De plus si D est un signe quelconque de différentiation, c'est à dire si l'on pose:

$$Df = \frac{d^{\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k} f}{dt^{\lambda_0} dw_1^{\lambda_1} dw_2^{\lambda_2} \dots dw_k^{\lambda_k}}$$

on aura encore asymptotiquement:

$$Dx_i = Dx_i^0 + \sqrt{\mu}Dx_i^1 + \mu Dx_i^2 + \dots,$$

$$Dy_i = D(n_i t + y_i^0) + \sqrt{\mu}Dy_i^1 + \mu Dy_i^2 + \dots$$

En ce qui concerne l'étude des séries analogues à celles de STIRLING je renverrai au § 1 d'un mémoire que j'ai publié dans les Acta mathematica (tome 8, page 295).
