SUR LES INTÉGRALES
DE FONCTIONS A MULTIPLICATEURS
ET LEUR APPLICATION
AU DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS ABÉLIENNES
EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES

PAR

P. APPELL

À PARIS.

MÉMOIRE COURONNÉ

PAR S. M. LE ROI OSCAR II

LE 21 JANVIER 1889.

Introduction.

Les fonctions algébriques et leurs intégrales ont fait l'objet, depuis ABEL et RIEMANN, des plus profondes recherches des géomètres. En se plaçant au point de vue de RIEMANN, on peut définir les fonctions algébriques comme étant *uniformes* sur une surface de Riemann et n'admettant pas d'autres singularités que des *pôles;* les intégrales de ces fonctions algébriques ne sont pas uniformes sur la surface primitive de Riemann, mais le deviennent après qu'on a tracé sur cette surface des coupures appropriées; sur les deux bords d'une de ces coupures, les valeurs de l'intégrale ne diffèrent que par une constante.

De même qu'à côté des fonctions doublement périodiques ordinaires, viennent se placer les fonctions que M. HERMITE a nommées *fonctions doublement périodiques de seconde espèce* et qui se reproduisent, multipliées par des facteurs constants, quand la variable augmente de l'une ou l'autre des périodes; de même à coté des fonctions algébriques viennent se placer des fonctions qui sont uniformes sur une surface de Riemann rendue *simplement connexe,* qui n'admettent pas d'autres singularités que des pôles et dont les valeurs aux deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un *facteur* ou *multiplicateur constant.* Nous nommerons ces fonctions: *fonctions à multiplicateurs.*

Ces fonctions ont fait l'objet d'un mémoire de M. APPELL intitulé *Généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce* (Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par M. RESAL, janvier 1883).

Dans le présent travail, nous nous proposons d'étudier les *intégrales* des *fonctions à multiplicateurs,* ce qui constitue une recherche entièrement nouvelle[1] comprenant, comme cas particulier, la théorie des intégrales

[1] Nous devons cependant citer un Mémoire de M. PRYM qui se trouve dans le Tome 70 du Journal de CRELLE (p. 354) et dont nous n'avons eu connaissance que dans le courant de l'année 1889.

abéliennes, lorsque les multiplicateurs deviennent tous égaux à l'unité. Les intégrales des *fonctions à multiplicateurs* fournissent donc une extension naturelle des intégrales abéliennes.

Ces intégrales se présentent aussi, comme nous le montrerons, dans la résolution d'un problème d'une haute importance qui a, depuis longtemps, attiré l'attention des géomètres, à savoir le problème du *développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.* On n'a jusqu'à présent rien publié sur ces développements qui doivent avoir, dans la théorie des fonctions abéliennes, un rôle aussi important que les beaux développements en séries trigonométriques donnés par JACOBI dans la théorie des fonctions elliptiques. En traitant plus particulièrement le cas des fonctions abéliennes de genre 2, nous calculons le coefficient du terme général de leurs développements en séries trigonométriques; ce coefficient est d'une nature plus compliquée que celui des développements de JACOBI: il contient dans son expression une intégrale définie qui ne paraît pas pouvoir se réduire aux fonctions élémentaires et qui comprend comme cas très particulier les fonctions de BESSEL.

Cette même intégrale définie reparaît lorsqu'on veut, à l'aide d'une série trigonométrique, faire l'inversion d'une *intégrale hyperelliptique* en se restreignant à des valeurs réelles de l'intégrale et de la variable d'intégration.[1] La résolution de ce problème trouve de nombreuses applications en mécanique rationnelle.

Pour bien faire saisir l'esprit de la méthode, nous traitons d'abord le développement en série trigonométrique de la fonction

$$\operatorname{sn} u,$$

c'est à dire de la fonction z de u définie par l'équation

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}};$$

et cela sans nous servir ni des propriétés des fonctions θ ni de la theorie des fonctions elliptiques.

[1] Voyez un Mémoire de M. WEIERSTRASS: *Über eine Gattung reell periodischer Functionen,* Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1866, p. 97.

La méthode que nous appliquons aux fonctions abéliennes peut aussi servir à développer en séries trigonométriques certaines racines carrées de fonctions abéliennes du genre 2, et certaines fonctions de plusieurs variables analogues aux fonctions doublement périodiques de seconde espèce.

Ce travail est divisé en *trois parties:* la première contient un résumé des principales propriétés des *fonctions à multiplicateurs,* la seconde est consacrée à l'étude des intégrales de ces fonctions, la troisième aux applications et principalement au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.

Nous suivons, dans ce travail, les notations et la terminologie de M. C. NEUMANN dans l'ouvrage intitulé: *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale,* von Dr. *C. Neumann,* zweite Auflage; Leipzig, Teubner, 1884.

Première partie.

Sur les fonctions à multiplicateurs.

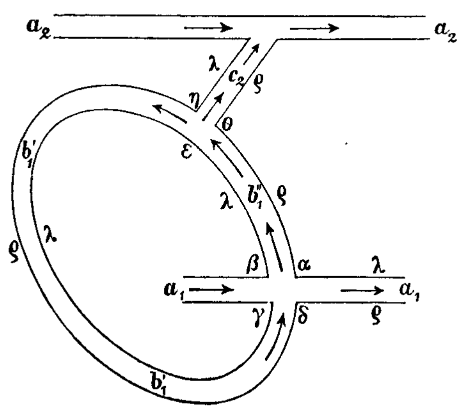
Soit une équation algébrique

$$F(s, z) = 0$$

du genre p et R la surface de Riemann correspondante. Désignons, avec C. NEUMANN (loc. cit. pages 175—185), par R_{abc} cette surface de Riemann rendue *simplement connexe* par les coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p; \; c_2, c_3, \ldots, c_p.$$

Nous appellerons *fonction à multiplicateurs* une fonction uniforme et régulière (c'est à dire, d'après NEUMANN, n'admettant que des pôles) sur la surface R_{abc}, cette fonction étant telle que ses valeurs sur les deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un *facteur* ou *multiplicateur* constant tout le long de la coupure.



Il est aisé de voir que, *le long de chacune des coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$, ce multiplicateur est égal à l'unité.* En effet, reprenons la figure de C. NEUMANN (loc. cit. page 216) avec quelques additions, et supposons qu'une fonction à multiplicateurs $\Phi(z)$ admette le long de la coupure a_1 le multiplicateur m_1, sur la portion b_1' de la coupure b_1 le multiplicateur

n_1', sur la portion b_1'' de cette même coupure le multiplicateur n_1'', enfin le long de la coupure c_2 le multiplicateur k_2. Cela veut dire que, si l'on appelle, avec NEUMANN, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, l'on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
&\text{le long de } a_1: \ \Phi(\lambda) = m_1\Phi(\rho),\\
&\text{le long de } b_1': \ \Phi(\lambda) = n_1'\Phi(\rho),\\
&\text{le long de } b_1'': \ \Phi(\lambda) = n_1''\Phi(\rho),\\
&\text{le long de } c_2: \ \Phi(\lambda) = k_2\Phi(\rho).
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que

$$k_2 = 1, \qquad n_1' = n_1''.$$

Au point de croisement $\alpha\beta\gamma\delta$ des coupures a_1 et b_1 on a (voyez la figure page 8)

$$\Phi(\alpha) = m_1\Phi(\delta), \qquad \Phi(\beta) = m_1\Phi(\gamma),$$
$$\Phi(\gamma) = n_1'\Phi(\delta), \qquad \Phi(\beta) = n_1''\Phi(\alpha),$$

d'où l'on tire immédiatement en éliminant $\Phi(\alpha)$, $\Phi(\beta)$, $\Phi(\gamma)$, $\Phi(\delta)$

$$m_1(n_1' - n_1'') = 0$$

donc

$$n_1' = n_1'',$$

car aucun multiplicateur ne peut être nul. De même au point de croisement $\varepsilon\eta\theta$ des coupures b_1 et c_2, on a, en appelant maintenant n_1 la valeur commune de n_1' et n_1'',

$$\Phi(\varepsilon) = n_1\Phi(\eta), \qquad \Phi(\varepsilon) = n_1\Phi(\theta), \qquad \Phi(\eta) = k_2\Phi(\theta),$$

d'où il résulte

$$k_2 = 1.$$

Ainsi, comme nous l'avons annoncé, le multiplicateur le long de la coupure c_2 est l'unité; la fonction $\Phi(z)$ prend les mêmes valeurs sur les deux bords de c_2. Il en est de même pour les coupures $c_3, c_4, \ldots, c_p$.

On pourra donc supprimer toutes ces coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$ sans que la fonction $\Phi(z)$ cesse d'être uniforme.

En résumé, une fonction à multiplicateurs $\Phi(z)$ est uniforme sur la surface que C. Neumann appelle R_{ab} et que l'on obtient en traçant sur la surface R de Riemann les seules coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p.$$

Le long de chacune de ces coupures la fonction $\Phi(z)$ admettra un certain multiplicateur:

$$\left.\begin{array}{l}\text{le long de } a_k, \text{ le multiplicateur } m_k,\\ \text{le long de } b_k, \text{ le multiplicateur } n_k.\end{array}\right\} \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

Cela veut dire que, en appelant λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, l'on a:

$$\left.\begin{array}{ll}\text{le long de } a_k, & \Phi(\lambda) = m_k\Phi(\rho),\\ \text{le long de } b_k, & \Phi(\lambda) = n_k\Phi(\rho).\end{array}\right\} \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

Il y a ainsi en tout $2p$ multiplicateurs

$$m_1, m_2, \ldots, m_p; \; n_1, n_2, \ldots, n_p.$$

Le problème que nous avons maintenant à résoudre est celui-ci:

Former toutes les fonctions à multiplicateurs m_k, n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *donnés d'avance.*

Pour cela, désignons avec Neumann par

$$w_1(z), w_2(z), \ldots, w_p(z)$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à la relation algébrique $F(s, z) = 0$, et appelons (loc. cit. page 246)

$$a_{\iota 1}, a_{\iota 2}, \ldots, a_{\iota p}; \; b_{\iota 1}, b_{\iota 2}, \ldots, b_{\iota p}$$

les modules de périodicité de l'intégrale w_ι le long des coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p.$$

Nous aurons alors le tableau suivant pour les modules de périodicité

Coupures	a_1, a_2, ..., a_p	b_1, b_2, ..., b_p
w_1	$a_{11} = \pi i$, $a_{12} = 0$, ..., $a_{1p} = 0$	b_{11}, b_{12}, ..., b_{1p}
w_2	$a_{21} = 0$, $a_{22} = \pi i$, ..., $a_{2p} = 0$	b_{21}, b_{22}, ..., b_{2p}
.	. . . .	. . . .
w_p	$a_{p1} = 0$, $a_{p2} = 0$, ..., $a_{pp} = \pi i$	b_{p1}, b_{p2}, ..., b_{pp}

avec

$$b_{kj} = b_{jk}.$$

Les intégrales normales que Briot désigne, dans sa *Théorie des fonctions abéliennes,* par

$$u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$$

sont respectivement égales à

$$2w_1, 2w_2, \ldots, 2w_p.$$

En continuant à suivre les notations de M. C. Neumann (loc. cit. page 271) désignons par

$$\varpi_{\alpha\beta}(z)$$

l'intégrale abélienne normale de *troisième espèce* qui devient infinie aux deux points α et β comme

$$\log(z - \beta) - \log(z - \alpha).$$

Les modules de périodicité de cette intégrale sont

le long de a_k: $\varpi_{\alpha\beta}(\lambda) - \varpi_{\alpha\beta}(\rho) = 0$,

le long de b_k: $\varpi_{\alpha\beta}(\lambda) - \varpi_{\alpha\beta}(\rho) = 2[w_k(\beta) - w_k(\alpha)]$.

Donc la fonction

$$\Phi_{\alpha\beta}(z) = e^{\varpi_{\alpha\beta}(z)}$$

est régulière sur la surface R_{ab}: elle possède sur cette surface un pôle du *premier ordre* α *et un zéro du premier ordre* β; *de plus elle vérifie les relations suivantes*

$$\text{le long de la coupure } a_k\text{:} \quad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \Phi_{\alpha\beta}(\rho),$$
$$\text{le long de la coupure } b_k\text{:} \quad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = e^{2[w_k(\beta) - w_k(\alpha)]}\Phi_{\alpha\beta}(\rho).$$

Cela posé, désignons par $\Phi(z)$ une fonction régulière sur la surface R_{ab} de Riemann et admettant le long des coupures a_k, b_k des multiplicateurs donnés m_k, n_k ($k = 1, 2, \ldots, p$). La dérivée logarithmique de cette fonction

$$\frac{d \log \Phi(z)}{dz}$$

est une fonction de z uniforme et régulière sur la surface R de Riemann, c'est à dire une fonction algébrique de z rationnelle en s et z; cette fonction admet pour pôles du premier ordre les zéros et les infinis de $\Phi(z)$, les premiers avec les résidus $+1$, les seconds avec les résidus -1; cette fonction peut d'ailleurs avoir d'autres pôles placés aux points de ramification, mais les résidus correspondants sont nuls, car l'intégrale

$$\int d \log \Phi(z)$$

est finie en tous les points distincts des zéros et des infinis de $\Phi(z)$. Cette intégrale est donc une intégrale abélienne n'ayant que des infinis logarithmiques: en la décomposant en intégrales normales de première et troisième espèce, on la mettra sous la forme

$$\int d \log \Phi(z) = \varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z)$$
$$- 2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)],$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignant des constantes. On tire de là en intégrant

$$(1) \qquad \Phi(z) = Ce^{\varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z) - 2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

C étant une constante. Cette fonction $\Phi(z)$ admet q infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et q zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. Il reste à exprimer que cette fonction $\Phi(z)$ admet les *multiplicateurs donnés* m_k et n_k. D'après les expressions précédemment rappelées des modules de périodicité des intégrales abéliennes de première et troisième espèce (page 11), on a:

le long de la coupure a_k

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\rho)} = e^{-2\lambda_k \pi i},$$

et le long de la coupure b_k

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\rho)} = e^{\sum_j [2w_k(\beta_j) - 2w_k(\alpha_j)] - 2(\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk})}.$$

En écrivant que le long de a_k le multiplicateur est m_k et que le long de b_k il est n_k, on aura

$$(2) \qquad e^{-2\lambda_k \pi i} = m_k, \qquad \lambda_k = -\frac{1}{2\pi i}\log m_k, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

puis

$$e^{\sum_j [2w_k(\beta_j) - 2w_k(\alpha_j)] - 2(\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk})} = n_k,$$

d'où l'on tire en prenant les logarithmes des deux membres et remplaçant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ par les valeurs (2) $-\frac{1}{2\pi i}\log m_1, -\frac{1}{2\pi i}\log m_2, \ldots$

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=q} [w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

On a ainsi le théorème suivant:

Toute fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs donnés m_k, n_k admet autant d'infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ que de zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$; ces zéros et ces infinis sont liés par les p relations (3) et la fonction elle-même est donnée par l'expression

$$(4) \qquad \Phi(z) = Ce^{\tilde{\omega}_{\alpha_1\beta_1}(z) + \tilde{\omega}_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\alpha_q\beta_q}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]},$$

les logarithmes ayant les mêmes déterminations que dans les équations (3).

Réciproquement, étant marqués sur la surface R de Riemann deux systèmes de points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ qui vérifient les p relations (3), *il existe une fonction $\Phi(z)$ régulière sur R_{ab}, devenant infinie aux points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, nulle aux points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ et admettant les multiplicateurs m_k et n_k; cette fonction est donnée par l'expression* (4).

Les relations (3) constituent, pour les fonctions à multiplicateurs, un théorème analogue au théorème d'Abel pour les fonctions algébriques rationnelles en s et z. On obtient le théorème d'Abel en supposant que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité.

Remarque. Le quotient de deux fonctions aux mêmes multiplicateurs est évidemment une fonction uniforme et régulière sur toute la surface R de Riemann, c'est à dire une fonction algébrique de z rationnelle en s et z. On en conclut que:

Si $\Phi(z)$ est une fonction déterminée aux multiplicateurs m_k et n_k, l'expression générale de toutes les fonctions aux mêmes multiplicateurs est

$$\Phi(z) R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction rationnelle de s et z.

Cas spécial. Supposons que les multiplicateurs m_k et n_k puissent être identifiés avec les multiplicateurs d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignent des constantes: en d'autres termes, supposons qu'il existe p constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ telles que l'on ait

$$(5) \qquad m_k = e^{-2\lambda_k \pi i}, \qquad n_k = e^{-2[\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk}]}. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

Alors l'exponentielle $E(z)$ est une fonction *partout finie* possédant les multiplicateurs m_k et n_k; toute autre fonction régulière possédant les mêmes multiplicateurs sera égale au produit de cette exponentielle par une fonction rationnelle de s et z.

Ce cas spécial se présentera lorsque les multiplicateurs m_k et n_k vérifieront les p relations que nous allons former en éliminant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$

entre les équations (5). Désignons par $N_1, N_2, \ldots, N_p$ des nombres entiers: nous aurons

$$\log m_k = - 2\lambda_k \pi i - 2N_k \pi i;$$

puis, si nous désignons par $M_1, M_2, \ldots, M_p$ des nombres entiers, nous aurons de même

$$\log n_k = 2M_k \pi i - 2[\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk}].$$

L'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ donne donc

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$
$$= M_k \pi i + N_1 b_{1k} + N_2 b_{2k} + \ldots + N_p b_{pk}$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Telles sont les p relations, entre les multiplicateurs, qui caractérisent le cas spécial dont nous nous occupons. Dans ce cas, les relations (3) entre les zéros et les infinis d'une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k, se réduisent aux relations bien connues entre les zéros et les infinis d'une fonction algébrique rationnelle en s et z. (Voyez C. NEUMANN, loc. cit. page 275.)

Si l'on suppose le genre p égal à l'unité, on retrouve les fonctions doublement périodiques de seconde espèce d'une forme spéciale, qui ont été signalées par M. MITTAG-LEFFLER. (Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, Tome 90, page 177.)

En revenant maintenant au cas général où les multiplicateurs m_k et n_k sont quelconques, nous allons démontrer quelques propriétés fondamentales des fonctions à multiplicateurs.

Nous avons vu précédemment que les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et les zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ d'une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k sont liés par les p relations (voyez page 13)

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=q}[w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$
$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Si q est supérieur ou égal à p, les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et $(q - p)$ des zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_q$ peuvent être choisis arbitrairement; les p autres zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ sont déterminés par les équations ci-dessus (3).

La fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs m_k et n_k avec ces zéros et ces infinis est donnée par la formule (4)

$$(4) \qquad \Phi(z) = Ce^{\tilde{\omega}_{\alpha_1\beta_1}(z) + \tilde{\omega}_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\alpha_q\beta_q}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]};$$

elle contient donc $(2q - p + 1)$ *constantes arbitraires* à savoir

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q; \; \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_q; \; C.$$

On trouve ainsi l'extension, aux fonctions à multiplicateurs, de théorèmes bien connus de la théorie des fonctions algébriques (voyez C. Neumann, loc. cit. pages 258 à 265).

Examinons d'abord les cas particuliers de $q = p$ et $q = p + 1$.

Si q est égal à p, on peut choisir arbitrairement les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$: alors les zéros sont déterminés, et la constante C seule reste en outre arbitraire. Une fonction aux multiplicateurs donnés devenant infinie seulement en p points est donc déterminée, à un facteur constant près, par la connaissance de ces p infinis.

Si q est égal à $p + 1$, on peut choisir arbitrairement les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$ et un zéro β_{p+1}: alors les autres zéros sont déterminés, et il reste à prendre arbitrairement la constante C. Une fonction aux multiplicateurs donnés, devenant infinie seulement en $(p + 1)$ points donnés, contient encore deux constantes arbitraires β_{p+1} et C. Il existe *deux fonctions $\Phi_1(z)$* et *$\Phi_2(z)$ linéairement indépendantes* admettant les multiplicateurs donnés et les $(p + 1)$ infinis donnés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$; *toute autre fonction $\Phi(z)$ ayant les mêmes multiplicateurs et les mêmes infinis est une fonction linéaire homogène à coefficients constants de $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$*

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z),$$

où μ_1 et μ_2 désignent des constantes. En effet, supposons que la fonction $\Phi_1(z)$ soit obtenue en donnant au zéro arbitraire β_{p+1} une certaine position et la fonction $\Phi_2(z)$ en donnant au zéro arbitraire β_{p+1} une autre position ne coïncidant avec aucun des zéros de $\Phi_1(z)$. Ces deux fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ sont linéairement indépendantes puisqu'elles n'ont pas les mêmes zéros. L'expression

$$\mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

admet, quelles que soient les constantes μ_1 et μ_2, les multiplicateurs m_k, n_k et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$; on pourra toujours disposer du rapport $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ de façon que cette expression admette un des zéros d'une fonction quelconque $\Phi(z)$ aux mêmes multiplicateurs et aux mêmes infinis. Le rapport des constantes μ_1 et μ_2 étant ainsi déterminée, l'expression

$$\mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

aura les mêmes zéros que $\Phi(z)$, puisque les $(p + 1)$ zéros sont déterminés dès que l'un d'eux l'est. Cette expression ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis que la fonction $\Phi(z)$ n'en diffère que par un facteur constant, pouvant être supposé égal à l'unité, puisque jusqu'à présent le rapport de μ_1 à μ_2 est seul déterminé. On a donc, comme nous l'avons annoncé,

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

pour l'expression générale d'une fonction admettant les multiplicateurs donnés m_k, n_k et les $(p + 1)$ infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$.

D'une manière générale, si l'on suppose

$$q = p + r,$$

il existe $(r + 1)$ *fonctions linéairement indépendantes*

$$\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_{r+1}(z)$$

admettant les multiplicateurs donnés m_k, n_k *et les infinis* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$. *Toute autre fonction* $\Phi(z)$ *ayant les mêmes multiplicateurs et les mêmes infinis est de la forme*

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z) + \ldots + \mu_{r+1} \Phi_{r+1}(z).$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r+1}$ *désignant des constantes.*

Ce théorème général se démontre comme le cas particulier ($r = 1$) que nous venons de traiter d'une façon détaillée. On peut aussi le rattacher à un théorème connu relatif aux fonctions algébriques rationnelles en s et z.

Soit, en effet, $\varphi(z)$ une fonction *déterminée* ayant les multiplicateurs m_k, n_k et les infinis donnés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$; soit, comme ci-dessus, $\Phi(z)$ la fonction la plus générale admettant ces mêmes multiplicateurs et ces mêmes infinis. Le quotient

$$\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)}$$

est une fonction algébrique rationnelle en s et z admettant $(p + r)$ infinis à savoir les zéros de $\varphi(z)$. Or on sait que la fonction la plus générale rationnelle en s et z admettant $(p + r)$ infinis donnés est une fonction linéaire homogène à coefficients constants de $(r + 1)$ fonctions particulières rationnelles en s et z et admettant ces mêmes infinis, en convenant de compter parmi ces fonctions particulières une constante comme admettant les infinis donnés et des zéros identiques aux infinis. Nous pouvons toujours appeler

$$\frac{\Phi_1(z)}{\varphi(z)}, \frac{\Phi_2(z)}{\varphi(z)}, \ldots, \frac{\Phi_{r+1}(z)}{\varphi(z)}$$

ces $(r + 1)$ fonctions particulières rationnelles en s et z, et nous avons la formule

$$\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)} = \mu_1 \frac{\Phi_1(z)}{\varphi(z)} + \mu_2 \frac{\Phi_2(z)}{\varphi(z)} + \ldots + \mu_{r+1} \frac{\Phi_{r+1}(z)}{\varphi(z)},$$

qui, après suppression du dénominateur $\varphi(z)$, donne la relation à démontrer.

La formule

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z) + \ldots + \mu_{r+1} \Phi_{r+1}(z)$$

que nous venons d'établir, contient comme cas particulier la formule de décomposition en éléments simples indiquée par M. Appell (Journal de mathématiques de M. Resal, 3ième série, Tome 9, page 8, § 5). Nous ne reproduirons pas ici cette formule qui, tout en étant intéressante, est encore imparfaite, car l'élément simple de M. Appell devient infini, non pas en un seul point, mais en p points dont $(p - 1)$ sont étrangers à la question. Nous donnons dans la deuxième partie une formule beaucoup plus satisfaisante destinée à remplacer celle de M. APPELL.

Les théorèmes que nous venons d'établir sont (comme les théorèmes analogues sur les fonctions algébriques) sujets à des exceptions, quand les $(p + r)$ infinis donnés sont des groupes particuliers de points. Il arrive alors qu'il existe *plus* de $(r + 1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les infinis et les multiplicateurs donnés. En effet, le raisonnement qui sert à établir ces théorèmes repose sur ce fait que, les $(p + r)$ infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$ étant donnés, on peut choisir *arbitrairement* r zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{p+r}$ et *déterminer* les p zéros restants à l'aide des équations

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=q}[w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$
$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p], \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

ce qui conduit à la résolution du problème d'inversion de JACOBI. Mais il est bien connu que les équations d'inversion présentent une indétermination dans certains cas (voyez BRIOT, *Fonctions abéliennes*, p. 96); dans ces cas d'indétermination un zéro de plus peut être choisi arbitrairement et il existe plus de $(r + 1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les multiplicateurs et les infinis donnés. Quand, par la suite, nous appliquerons les théorèmes précédents, nous devrons vérifier chaque fois que ce cas d'indétermination ne se présente pas.

Nous venons d'examiner ce qui se passe quand le nombre des infinis simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est supérieur ou égal à p. Si ce nombre q *est inférieur* à p, les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ ne peuvent plus être pris arbitrairement, ainsi qu'il résulte des p relations (3) rappelées plus haut. Une fonction admettant les multiplicateurs donnés ne pourra alors devenir infinie *qu'en des groupes particuliers* de q points. Nous laissons de côté l'étude de ce cas $(q < p)$ et la recherche de ces groupes particuliers de q points. Cette question est d'ailleurs entièrement semblable à celle que M. WEIERSTRASS traite dans son cours à propos du problème analogue relatif aux fonctions algébriques.

Dans le cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

si l'on cherche une fonction admettant ces multiplicateurs et devenant infinie en p points arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, on trouve que les zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ de cette fonction sont confondus avec ses infinis et que cette fonction se réduit à l'exponentielle $E(z)$ qui n'a ni zéros ni infinis. Une fonction admettant ces multiplicateurs spéciaux et devenant effectivement infinie en p points ne peut exister que si ces points sont choisis d'une façon particulière. Nous n'insistons pas sur ces théorèmes qui se ramènent immédiatement aux théorèmes analogues relatif aux fonctions algébriques, puisque toute fonction admettant les multiplicateurs de $E(z)$ est égale au produit de cette exponentielle $E(z)$ par une fonction algébrique rationnelle en s et z.

M. Appell a montré que, dans le cas où les multiplicateurs sont quelconques, les pôles et les résidus d'une fonction à multiplicateurs sont liés par $(p - 1)$ relations: et que, dans le cas où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle comme $E(z)$, les pôles et les résidus sont liés par p relations (Journal de mathématiques de M. Resal, 3ième série, Tome 9, page 22, § 11). Nous dirons un mot de ces relations à propos des intégrales de première espèce.

Deuxième partie.

Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs.

Soit $\Phi(z)$ une fonction uniforme et régulière sur la surface R_{ab} de Riemann, admettant le long des coupures a_k et b_k les multiplicateurs respectifs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$. L'intégrale de cette fonction

$$\int \Phi(z)dz$$

possède des propriétés intéressantes qui la rapprochent des intégrales abéliennes.

Tout d'abord, nous pourrons étendre à ces intégrales la classification des intégrales abéliennes. Nous dirons d'une intégrale de fonction à multiplicateurs:

qu'elle est de *première espèce,* si elle est *partout finie,*

qu'elle est de *deuxième espèce,* si elle n'a que des *infinis algébriques,*

qu'elle est de *troisième espèce,* si elle a des *infinis logarithmiques.*

Intégrales de première espèce.

Pour que l'intégrale

$$\int \Phi(z)dz$$

soit de première espèce, il faut et il suffit: (en supposant comme d'habitude que l'infini n'est pas un point de ramification)

1° que la fonction $\Phi(z)$ devienne à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$, 2° que les infinis de $\Phi(z)$ coïncident avec des points de ramification et que, dans le voisinage d'un de ces points $z = \zeta$, la fonction Φ devienne infinie comme une puissance de $\frac{1}{z-\zeta}$ inférieure à l'unité.

En désignant par $w(z)$ une intégrale *abélienne* de première espèce et par $w'(z)$ la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale, on voit que les conditions précédentes reviennent à celle-ci:

Le rapport $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ *est fini à l'infini et aux points de ramification; il ne devient infini qu'aux zéros de* $w'(z)$ *situés à distance finie.*

Nous allons, d'après cela, former l'expression de ce rapport qui est évidemment, comme son numérateur $\Phi(z)$, une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k.

On sait que la fonction algébrique $w'(z)$ devient nulle à distance finie en $(2p-2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

dont $(p-1)$ sont arbitraires; ces points sont liés par les relations suivantes bien connues

$$w_k(\gamma_1) + w_k(\gamma_2) + \ldots + w_k(\gamma_{2p-2}) \equiv G_k \qquad (k=1,2,\ldots,p) \tag{7}$$

les lettres $G_1, G_2, \ldots, G_p$ désignant des constantes et le signe $\equiv$ indiquant que l'égalité a lieu à des multiples près des modules de périodicité. (Voyez Briot, *Théorie des fonctions abéliennes,* p. 147 et 149, où ces constantes sont désignées par K_k et $2C_k$.)

Pour former le rapport $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$, il faut donc former la fonction la plus générale régulière sur R_{ab}, admettant les multiplicateurs m_k, n_k et devenant infinie aux $(2p-2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}.$$

Cette fonction admettra aussi $(2p-2)$ zéros

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et sera donnée par l'expression

$$\frac{\Phi(z)}{w'(z)} = Ce^{\tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_2\beta_2}(z)+\dots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+w_2(z)\log m_2+\dots+w_p(z)\log m_p]},$$

les zéros et les infinis étant liés par les p relations

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2}[w_k(\beta_j)-w_k(\gamma_j)]$$

$$=\frac{1}{2}\log n_k-\frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1+b_{2k}\log m_2+\dots+b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k=1\,,\,2\,,\dots,\,p.$$

En vertu des relations (7) de la page précédente qui lient les infinis $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p-2}$, les relations ci-dessus s'écrivent plus simplement

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j) \tag{8}$$

$$\equiv G_k+\frac{1}{2}\log n_k-\frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1+b_{2k}\log m_2+\dots+b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k=1\,,\,2\,,\dots,\,p.$$

Ces relations montrent que, sur les $(2p-2)$ zéros

$$\beta_1\,,\,\beta_2\,,\dots,\,\beta_{2p-2}$$

de la fonction $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$, on peut en prendre $(p-2)$ *arbitrairement*, par exemple $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_{2p-2}$; les p zéros restants

$$\beta_1\,,\,\beta_2\,,\dots,\,\beta_p$$

seront déterminés par les équations (8) au nombre de p. La fonction la plus générale $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ contiendra donc dans son expression $(p-1)$ constantes arbitraires, à savoir les $(p-2)$ zéros arbitraires $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \dots, \beta_{2p-2}$ et le facteur constant C. Comme nous l'avons fait remarquer à la page 19, il faut s'assurer que les relations (8) déterminent effectivement p des zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ dès qu'on connaît les $(p-2)$ autres $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$. Pour cela écrivons ces relations sous la forme

$$\sum_{j=1}^{j=p} w_k(\beta_j)$$

$$\equiv G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p] - \sum_{j=p+1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j);$$
$$(k=1, 2, \ldots, p)$$

or, l'on sait que des équations de cette forme déterminent $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ *excepté dans le cas spécial où les quantités*

$$\frac{1}{2}\log n_k - [b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

seraient nulles à des multiples près des modules de périodicité. (Voyez Briot, *Théorie des fonctions abéliennes,* page 96, § 56.) *Ecartons pour le moment ce cas spécial* qui a été examiné aux pages 14 et 15 de ce mémoire et dans lequel les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme $E(z)$; alors, ce cas étant écarté, on peut choisir arbitrairement $(p-2)$ zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$ et déterminer les p zéros restants à l'aide des équations (8) de la page précédente. En donnant aux $(p-2)$ zéros arbitraires différentes positions, on obtient une infinité de fonctions ayant les infinis et les multiplicateurs donnés. Soient

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_{p-1}(z)$$

$(p-1)$ de ces fonctions supposées *linéairement indépendantes:* l'expression la plus générale de la fonction $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ ayant les mêmes infinis et les mêmes multiplicateurs sera

$$\frac{\Phi(z)}{w'(z)} = \mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z),$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ désignent des constantes arbitraires. En effet, cette fonction

$$\mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z)$$

possède les infinis et les multiplicateurs donnés et l'on pourra disposer des constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ de façon qu'elle s'annule en $(p-2)$ points donnés. Il est d'ailleurs évident qu'il existe au moins $(p-1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les infinis et les multiplicateurs donnés, puisque $(p-2)$ zéros peuvent être pris arbitrairement. (Voyez à ce sujet les théorèmes des pages 16 et 17.)

En résumé:

Pour que l'intégrale $\int \Phi(z)dz$ *reste finie il faut et il suffit que la fonction* $\Phi(z)$ *soit de la forme*

$$\Phi(z) = w'(z)[\mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z)]$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ *étant des constantes arbitraires.*

Théorème. *En dehors du cas spécial où les multiplicateurs* m_k, n_k *sont ceux d'une exponentielle* $E(z)$ (page 14), *il existe* $(p-1)$ *intégrales de première espèce linéairement indépendantes*

$$\omega_1(z) = \int w'(z)\varphi_1(z)dz, \qquad \omega_2(z) = \int w'(z)\varphi_2(z)dz,$$

$$\ldots, \quad \omega_{p-1}(z) = \int w'(z)\varphi_{p-1}(z)dz;$$

toute autre intégrale de première espèce $\omega(z)$ *est de la forme*

$$\omega(z) = \mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ *étant des constantes.*

Cas spécial. Plaçons-nous maintenant dans le cas spécial examiné précédemment (page 14) où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignant des constantes. Alors toute fonction, régulière sur la surface de Riemann R_{ab} et admettant ces multiplicateurs spéciaux, est de la forme

$$E(z)R(s, z)$$

où $R(s, z)$ désigne une fonction algébrique rationnelle en s et z. Pour obtenir les intégrales de première espèce, il faudra déterminer cette fonction $R(s, z)$ de façon que l'intégrale

$$\int E(z) R(s, z) dz$$

soit partout finie. Comme l'exponentielle $E(z)$ n'a ni zéros ni infinis, pour que l'intégrale ci-dessus soit finie, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int R(s, z) dz$$

le soit, c'est à dire que cette dernière intégrale soit une intégrale abélienne de première espèce

$$\int R(s, z) dz = \mu_1 w_1(z) + \mu_2 w_2(z) + \ldots + \mu_p w_p(z) + C^{te};$$

d'où en différentiant et appelant $w_k'(z)$ la dérivée de $w_k(z)$

$$R(s, z) = \mu_1 w_1'(z) + \mu_2 w_2'(z) + \ldots + \mu_p w_p'(z).$$

Si l'intégrale

$$\int E(z) R(s, z) dz$$

est de première espèce, elle est donc de la forme

$$\mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_p \omega_p(z) + C^{te},$$

à condition de poser

$$\omega_1(z) = \int E(z) w_1'(z) dz, \qquad \omega_2(z) = \int E(z) w_2'(z) dz,$$

$$\ldots, \quad \omega_p(z) = \int E(z) w_p'(z) dz.$$

Dans ce cas spécial il y a donc p intégrales de première espèce linéairement indépendantes et non $(p - 1)$ *comme dans le cas géneral.*

Mais, dans ce cas spécial, *il y a entre ces p intégrales de première espèce une relation* fort simple qui permet d'exprimer l'une d'entre elles au moyen des $(p - 1)$ autres et de l'exponentielle $E(z)$. En effet, en différentiant l'équation

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

on a

$$dE(z) = -2E(z)[\lambda_1 w_1'(z) + \lambda_2 w_2'(z) + \ldots + \lambda_p w_p'(z)]dz;$$

d'où, en intégrant,

$$E(z) = -2[\lambda_1 \omega_1(z) + \lambda_2 \omega_2(z) + \cdots + \lambda_p \omega_p(z)] + C^{te}; \tag{9}$$

ce qui est la relation annoncée.

Relations entre les pôles et les résidus d'une fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs donnés m_k et n_k.

Soit une fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs m_k et n_k admettant les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ que nous supposons, pour simplifier, *du premier ordre, distincts des points de ramification* et *situés à distance finie:* appelons $R_1, R_2, \ldots, R_q$ les résidus relatifs à ces pôles. Construisons par la méthode que nous venons d'indiquer, une fonction $\Omega'(z)$ ayant les multiplicateurs *inverses* de m_k, n_k, c'est à dire admettant le long de la coupure a_k le multiplicateur $\frac{1}{m_k}$ et le long de la coupure b_k le multiplicateur $\frac{1}{n_k}$; formons en outre cette fonction $\Omega'(z)$ de telle façon que l'intégrale

$$\Omega(z) = \int \Omega'(z) dz$$

soit finie partout, c'est à dire soit de *première espèce.* Cette fonction $\Omega'(z)$ devient alors à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$; elle devient infinie aux points de ramification, mais de telle façon que son intégrale reste finie. Dans ces conditions le produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

est une fonction régulière et uniforme sur la surface R de Riemann, par suite une fonction algébrique rationnelle en s et z; en effet le long d'une coupure, a_k par exemple, on a, en appelant comme toujours λ un point du bord gauche de la coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit:

$$\Phi(\lambda) = m_k \Phi(\rho), \qquad \Omega'(\lambda) = \frac{1}{m_k} \Omega'(\rho),$$

d'où l'on conclut

$$\Phi(\lambda)\Omega'(\lambda) = \Phi(\rho)\Omega'(\rho).$$

On pourra donc supprimer la coupure a_k sans que le produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

cesse d'être uniforme; on pourra répéter la même chose pour la coupure b_k. Donc ce produit est uniforme sur la surface primitive R de Riemann; il est une *fonction rationnelle* de s et z. Cette fonction rationnelle de s et z devenant à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$, la somme de ses résidus est *nulle* d'après un théorème bien connu. Or les pôles de ce produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

sont:

1° les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ du premier facteur $\Phi(z)$; en ces pôles le produit a pour résidus respectifs $R_1\Omega'(\alpha_1), R_2\Omega'(\alpha_2), \ldots, R_q\Omega'(\alpha_q)$;

2° les pôles du second facteur $\Omega'(z)$ qui sont tous situés aux points de ramification; en ces pôles tout les résidus sont *nuls* puisque l'intégrale $\Omega(z)$ est partout finie.

La somme des résidus du produit devant être *nulle*, on a la relation

$$R_1\Omega'(\alpha_1) + R_2\Omega'(\alpha_2) + \ldots + R_q\Omega'(\alpha_q) = 0. \tag{10}$$

Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas de la forme spéciale (page 14) qui permet de les identifier avec ceux d'une exponentielle $E(z)$, leurs inverses ne sont pas non plus de cette forme spéciale. La fonction $\Omega'(z)$ est alors une fonction linéaire à coefficients constants arbitraires de $(p-1)$ fonctions particulières $\Omega_1'(z), \Omega_2'(z), \ldots, \Omega_{p-1}'(z)$, et l'on a

$$\Omega'(z) = \mu_1\Omega_1'(z) + \mu_2\Omega_2'(z) + \ldots + \mu_{p-1}\Omega_{p-1}'(z),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ désignant des constantes arbitraires. La relation (10) donne donc, entre les pôles et les résidus, $(p-1)$ relations distinctes

$$\begin{array}{llll}
R_1\Omega_1'(\alpha_1) & + R_2\Omega_1'(\alpha_2) & + \ldots + R_q\Omega_1'(\alpha_q) & = 0, \\
R_1\Omega_2'(\alpha_1) & + R_2\Omega_2'(\alpha_2) & + \ldots + R_q\Omega_2'(\alpha_q) & = 0, \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
R_1\Omega_{p-1}'(\alpha_1) & + R_2\Omega_{p-1}'(\alpha_2) & + \ldots + R_q\Omega_{p-1}'(\alpha_q) & = 0.
\end{array}$$

Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k de $\Phi(z)$ sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

les multiplicateurs inverses $\frac{1}{m_k}$ et $\frac{1}{n_k}$ sont ceux d'une exponentielle $\frac{1}{E(z)}$ de la même forme. La fonction $\Omega'(z)$ est alors une fonction linéaire à coefficients constants de p fonctions particulières

$$\Omega'(z) = \mu_1 \Omega_1'(z) + \mu_2 \Omega_2'(z) + \ldots + \mu_p \Omega_p'(z),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ étant des constantes arbitraires. La relation (10) se décompose donc, dans ce cas, en p relations distinctes que l'on peut écrire

$$R_1 \Omega_k'(\alpha_1) + R_2 \Omega_k'(\alpha_2) + \ldots + R_q \Omega_k'(\alpha_q) = 0$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Dans ce cas spécial, on pourrait aussi obtenir ces p relations en remarquant que le quotient

$$\frac{\Phi(z)}{E(z)}$$

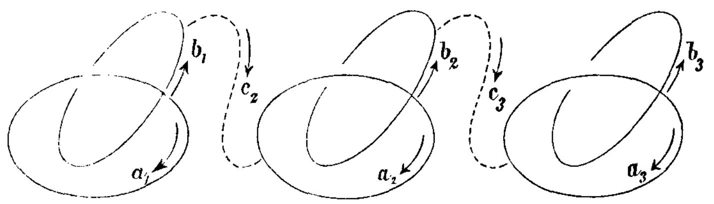
est une fonction algébrique et écrivant les p relations bien connues qui lient les pôles et les résidus d'une fonction algébrique.

Nous n'examinerons pas ici comment il faut modifier ces relations quand certains pôles deviennent multiples ou viennent coïncider avec des points de ramification. Ces modifications sont les mêmes que dans les questions analogues relatives aux fonctions algébriques. (Voyez le Mémoire de M. APPELL, *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique*, Acta mathematica, Tome 1, et une Note de M. GOURSAT, *Sur la théorie des intégrales abéliennes*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 97, page 1281.)

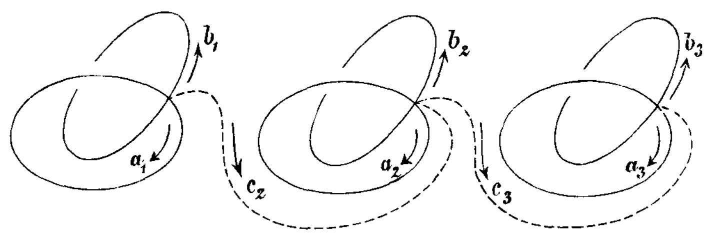
Pour avoir un exemple très particulier des théorèmes précédents, prenons le cas de $p = 1$. Nous verrons alors qu'il n'y a *aucune relation* entre les résidus d'une fonction doublement périodique *générale* de seconde espèce, mais qu'il y a *une* relation entre les pôles et les résidus d'une fonction doublement périodique de seconde espèce de la forme spéciale $e^{\lambda u} f(u)$, $f(u)$ étant doublement périodique et λ constant.

Modules de périodicité des intégrales de première espèce.

Pour simplifier l'étude des modules de périodicité, nous allons particulariser le système des coupures $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p, c_2, c_3, \ldots, c_p$ de RIEMANN reproduit par C. NEUMANN. En nous reportant à la figure schématique donnée par C. NEUMANN (*Riemann's Theorie der Abelschen Integrale*, zweite Auflage, Leipzig 1884, page 184), figure que nous reproduisons ci-dessous,



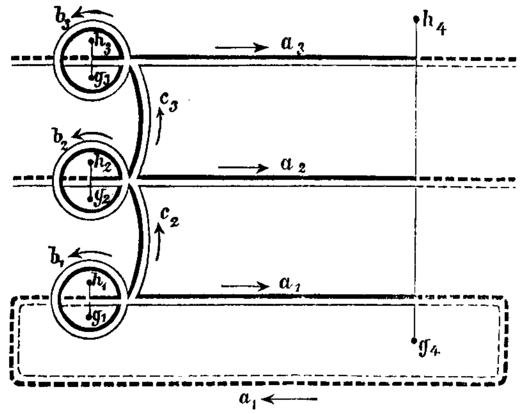
nous voyons que nous pouvons faire partir la coupure c_2 d'un point quelconque de b_1 pour la faire aboutir en un point quelconque de a_2; nous conviendrons, dans tout ce qui suit, de faire partir la coupure c_2 du point de croisement des coupures b_1 et a_1 pour la faire aboutir au point de croisement de b_2 et a_2; puis nous ferons partir la coupure c_3 de ce dernier point pour la faire aboutir au point de croisement de b_3 et a_3; et ainsi de suite, comme le montre cette nouvelle figure



Pour achever de préciser la disposition que nous adoptons pour les coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$, reprenons l'exemple traité par C. NEUMANN (loc. cit. page 178) dans lequel l'équation entre s et z est

$$s^2 = (z - g_1)(z - h_1)(z - g_2)(z - h_2)(z - g_3)(z - h_3)(z - g_4)(z - h_4).$$

L'on modifiera alors la figure donnée par NEUMANN (loc. cit. page 179) comme il est indiqué ci-dessous:



Pour ne pas surcharger la figure, nous n'avons pas tracé en entier les coupures a_2 et a_3 sur le feuillet inférieur de la surface; nous avons, comme NEUMANN, marqué d'un trait plus épais le bord gauche des coupures et ponctué les coupures situées sur le feuillet inférieur.

Cela posé, soit

$$\omega(z) = \int \omega'(z)\,dz$$

une intégrale de première espèce formée comme nous l'avons vu plus haut, la fonction $\omega'(z)$ admettant les multiplicateurs m_k et n_k. Comme cette fonction $\omega'(z)$ est uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} rendue simplement connexe à l'aide des coupures

$$\begin{array}{r} a_1, a_2, \ldots, a_p, \\ b_1, b_2, \ldots, b_p, \\ c_2, \ldots, c_p, \end{array}$$

et comme les résidus de cette fonction sont tous nuls, *l'intégrale $\omega(z)$ est aussi uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} et d'après sa formation même elle reste finie partout.*

Considérons la coupure a_k et appelons λ un point situé sur le bord gauche de cette coupure, ρ le point situé en face de λ sur le bord droit.

La fonction $\omega'(z)$ admettant le long de cette coupure a_k le multiplicateur m_k, on a

$$\omega'(\lambda) = m_k \omega'(\rho).$$

Pour un déplacement effectué le long de la coupure on a

$$d\lambda = d\rho,$$

puisque les points λ et ρ sont en face l'un de l'autre. On a donc aussi

$$\omega'(\lambda)d\lambda - m_k \omega'(\rho)d\rho = 0$$

et, en intégrant, on a tout le long de la coupure,

$$\omega(\lambda) - m_k \omega(\rho) = A_k,$$

la lettre A_k désignant une *constante.* Nous appellerons cette constante le *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure a_k.

De même, les deux valeurs de l'intégrale $\omega(z)$ en deux points λ et ρ, situés en face l'un de l'autre sur les bords gauche et droit de la coupure b_k, sont liées par la relation

$$\omega(\lambda) - n_k \omega(\rho) = B_k,$$

où B_k désigne une *constante* que nous appellerons *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure b_k.

Enfin, sur les deux bords d'une coupure c_h, on a comme nous l'avons vu à la page 9 pour toute fonction à multiplicateurs

$$\omega'(\lambda) = \omega'(\rho), \qquad \omega'(\lambda)d\lambda - \omega'(\rho)d\rho = 0,$$

d'où

$$\omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_h,$$

C_h étant constant tout le long de la coupure c_h. Cette constante C_h sera appelée *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure c_h.

Donc:

L'intégrale de première espèce $\omega(z)$ possède $(3p - 1)$ modules de périodicité, à savoir les modules

$$\begin{array}{rlr} A_1, A_2, \ldots, A_p & \text{le long des coupures} & a_1, a_2, \ldots, a_p, \\ B_1, B_2, \ldots, B_p & \text{le long des coupures} & b_1, b_2, \ldots, b_p, \\ C_2, \ldots, C_p & \text{le long des coupures} & c_2, \ldots, c_p; \end{array}$$

c'est à dire que l'on a

$$\text{le long de } a_k:\quad \omega(\lambda) - m_k\omega(\rho) = A_k, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

$$\text{le long de } b_k:\quad \omega(\lambda) - n_k\omega(\rho) = B_k, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

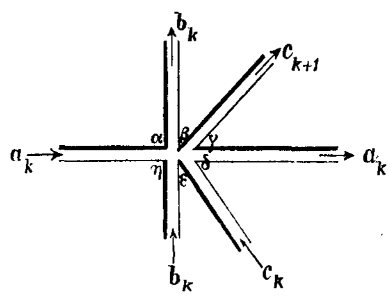
$$\text{le long de } c_h:\quad \omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_h. \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

Mais ces $(3p - 1)$ modules de périodicité sont liés par p relations linéaires et homogènes permettant d'exprimer p d'entre eux à l'aide des $(2p - 1)$ autres. Voici comment on obtient ces relations.

Figurons le point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} et appelons

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta,$$

les sommets des six angles formés par les bords de ces coupures, comme le montre la figure suivante:



Nous aurons, d'après la définition des modules de périodicité, et puisque l'épaisseur des coupures est infiniment petite, les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\omega(\alpha) - n_k\omega(\beta) &= B_k,\\
\omega(\beta) - \omega(\gamma) &= C_{k+1},\\
\omega(\gamma) - m_k\omega(\delta) &= A_k,\\
\omega(\varepsilon) - \omega(\delta) &= C_k,\\
\omega(\eta) - n_k\omega(\varepsilon) &= B_k,\\
\omega(\alpha) - m_k\omega(\eta) &= A_k.
\end{aligned}$$

Multiplions ces équations respectivement par $+1$, n_k, n_k, $-m_kn_k$, $-m_k$,

— 1, puis ajoutons-les membre à membre. La somme des premiers membres est nulle et l'on obtient la relation

$$B_k(1 - m_k) - A_k(1 - n_k) - m_k n_k C_k + n_k C_{k+1} = 0. \tag{11}$$

En supposant, successivement, $k = 1, 2, \ldots, p$, on aura ainsi p relations. Comme il n'existe ni coupure c_1 ni coupure c_{p+1}, il faudra dans ces relations considérer les constantes C_1 et C_{p+1} comme étant *nulles*. En écrivant ces p relations en détail, nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} B_1(1 - m_1) - A_1(1 - n_1) \qquad\qquad + n_1 C_2 = 0, \\ B_2(1 - m_2) - A_2(1 - n_2) - m_2 n_2 C_2 + n_2 C_3 = 0, \\ B_3(1 - m_3) - A_3(1 - n_3) - m_3 n_3 C_3 + n_3 C_4 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{p-1}(1 - m_{p-1}) - A_{p-1}(1 - n_{p-1}) - m_{p-1} n_{p-1} C_{p-1} + n_{p-1} C_p = 0, \\ B_p(1 - m_p) - A_p(1 - n_p) - m_p n_p C_p = 0. \end{array}\right. \tag{12}$$

Ces relations permettent d'exprimer $C_2, C_3, \ldots, C_p$ en fonction des modules de périodicité A_k, B_k et des multiplicateurs m_k, n_k. Dans le cas particulier où tous ces multiplicateurs m_k, n_k seraient égaux à *l'unité*, l'intégrale $\omega(z)$ deviendrait une *intégrale abélienne* de première espèce, et les relations ci-dessus montreraient que les constantes $C_2, C_3, \ldots, C_p$ seraient toutes *nulles* dans ce cas.

En éliminant les $(p - 1)$ constantes $C_2, C_3, \ldots, C_p$ entre les p relations (12), on obtiendra une relation entre les modules de périodicité $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_p$. Pour cela, multiplions la première des équations (12) par $\frac{1}{m_1} \cdot \frac{1}{n_1}$, la seconde par $\frac{1}{m_1 m_2} \cdot \frac{1}{n_2}$, la troisième par $\frac{1}{m_1 m_2 m_3} \cdot \frac{1}{n_3}, \ldots$ la $k^{\text{ième}}$ par $\frac{1}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k}, \ldots$, et ajoutons-les: nous obtiendrons l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{B_k(1 - m_k) - A_k(1 - n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0, \tag{13}$$

équation qui est une identité dans le cas particulier des intégrales abéliennes, puisque dans ce cas tous les multiplicateurs sont égaux à l'unité.

L'intégrale

$$\omega(z) = \int \omega'(z)dz$$

prise sur tout le contour de la surface de Riemann R_{abc} est évidemment *nulle*. Or la valeur de cette intégrale est facile à calculer en fonction des modules de périodicité et des multiplicateurs. Si l'on égale cette valeur à zéro, on obtient une relation qui n'est pas nouvelle mais qui est une conséquence des relations précédentes (12).

Cas spécial. Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

il existe, comme nous l'avons vu, p intégrales de première espèce

$$\omega_k(z) = \int E(z) w'_k(z) dz. \qquad (k=1,2,\ldots,p)$$

Une quelconque d'entre elles, $\omega(z)$, aura $(3p - 1)$ modules de périodicité liés par les relations que nous venons d'indiquer. Les modules de périodicité de l'intégrale $\lambda_p \omega_p(z)$ sont égaux et de signes contraires aux sommes des modules de périodicité correspondants des $(p - 1)$ autres intégrales $\lambda_1 \omega_1(z)$, $\lambda_2 \omega_2(z)$, ..., $\lambda_{p-1} \omega_{p-1}(z)$. C'est ce qui résulte immédiatement de l'identité (p. 27)

$$(9) \qquad 2[\lambda_1 \omega_1(z) + \lambda_2 \omega_2(z) + \ldots + \lambda_p \omega_p(z)] = -E(z) + C^{te}$$

dans laquelle les modules de périodicité du second membre sont tous *nuls*.

Relation entre les modules de périodicité de deux intégrales de première espèce aux multiplicateurs inverses.

La relation que nous allons établir est l'extension, à nos intégrales, de la célèbre relation qui lie les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce. Nous la démontrerons en suivant la méthode que Riemann a donnée pour les intégrales abéliennes.

Soit, comme précédemment, $\omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m_k, n_k, et soient

$$A_k, B_k, C_h \qquad \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale. D'autre part, désignons par $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k *inverses* de m_k et n_k:

$$m'_k = \frac{1}{m_k}, \qquad n'_k = \frac{1}{n_k}; \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

et soient

$$A'_k\,,\ B'_k\,,\ C'_h \qquad \left({\scriptstyle k=1,2,\ldots,p \atop h=2,3,\ldots,p}\right)$$

les modules de périodicité de cette seconde intégrale $\Omega(z)$.

L'intégrale

$$(14) \qquad I = \int \Omega(z)\,d\omega(z)$$

prise sur le contour de la surface de Riemann R_{abc} est *nulle*, car la fonction

$$\Omega(z)\,\omega'(z)$$

est sur cette surface uniforme et régulière et a tous ses résidus nuls.

Pour calculer cette intégrale I, appelons avec C. Neumann, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit. Lorsque la variable d'intégration z parcourt le contour de la surface R_{abc} dans le sens positif, elle parcourt les deux bords d'une même coupure en sens contraire. Les parties de l'intégrale relatives aux deux bords d'une même coupure seront

$$\int [\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho)],$$

l'intégration étant faite dans le sens positif le long du bord gauche. L'intégrale I sera donc

$$I = \sum_{k=1}^{k=p}\left[\int_{a_k}[\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho)] + \int_{b_k}[\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho)]\right] + \sum_{h=2}^{h=p}\int_{c_h}[\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho)],$$

les indices $a_k\,,\ b_k\,,\ c_h$ signifiant que les intégrales qui en sont affectées sont prises le long des coupures $a_k\,,\ b_k\,,\ c_h$. Or, sur la coupure a_k, on a

$$\Omega(\lambda) = m'_k\,\Omega(\rho) + A'_k, \qquad \omega(\lambda) = m_k\,\omega(\rho) + A_k,$$

d'où l'on déduit

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = A'_k d\omega(\lambda) + (m_k m'_k - 1)\Omega(\rho)d\omega(\rho);$$

mais, comme les multiplicateurs m_k et m'_k ont été supposés *inverses* l'un de l'autre, on a

$$m_k m'_k - 1 = 0$$

et l'équation ci-dessus prend la forme plus simple

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = A'_k d\omega(\lambda).$$

On a de même le long de la coupure b_k

$$\Omega(\lambda) = n'_k \Omega(\rho) + B'_k, \qquad \omega(\lambda) = n_k \omega(\rho) + B_k,$$

d'où l'on déduit, puisque $n_k n'_k - 1 = 0$,

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = B'_k d\omega(\lambda).$$

Enfin le long de la coupure c_h, on a

$$\Omega(\lambda) = \Omega(\rho) + C'_h, \qquad \omega(\lambda) = \omega(\rho) + C_h,$$

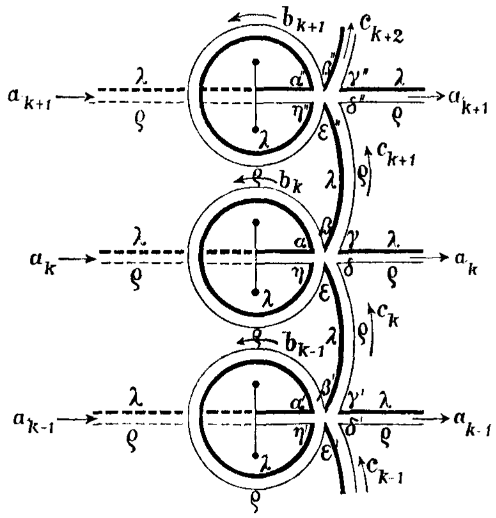
d'où l'on déduit

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = C'_h d\omega(\lambda).$$

D'après cela, l'intégrale I devient

$$(15) \qquad I = \sum_{k=1}^{k=p}\left[A'_k \int_{a_k} d\omega(\lambda) + B'_k \int_{b_k} d\omega(\lambda)\right] + \sum_{h=2}^{h=p} C'_h \int_{c_h} d\omega(\lambda).$$

Nous allons transformer cette expression et l'amener à ne contenir que les modules de périodicité des deux intégrales $\Omega(z)$ et $\omega(z)$. Pour faire cette transformation, figurons les coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} et les points de croisement des coupures a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, c_k, a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, c_{k+2}. Appelons (voyez la figure de la page suivante) α, β, γ, δ, ε, η les sommets des six angles formés par les bords des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} en leur point de croisement; α', β', γ', δ', ε', η' et α'', β'', γ'', δ'', ε'', η'' les sommets des angles analogues aux points de croisement des coupures a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, c_k et a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, c_{k+2}.



Nous aurons

$$\int_{a_k} d\omega(\lambda) = \omega(\alpha) - \omega(\gamma), \qquad \int_{b_k} d\omega(\lambda) = \omega(\eta) - \omega(\alpha),$$

$$\int_{c_k} d\omega(\lambda) = \omega(\varepsilon) - \omega(\beta'), \qquad \int_{c_{k+1}} d\omega(\lambda) = \omega(\varepsilon'') - \omega(\beta),$$

car toutes ces intégrales sont prises sur les bords gauches des coupures dans le sens indiqué par les flèches. (Les bords gauches sont marqués d'un trait plus gros.)

En calculant ainsi tous les termes de l'intégrale I

$$(15) \qquad I = \sum_{k=1}^{k=p} \left[A'_k \int_{a_k} d\omega(\lambda) + B'_k \int_{b_k} d\omega(\lambda) \right] + \sum_{h=2}^{h=p} C''_h \int_{c_h} d\omega(\lambda),$$

on aura l'intégrale I exprimée par une somme de termes où figureront les valeurs de l'intégrale $\omega(z)$ aux sommets des angles tels que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$, formés par les bords des coupures en leurs points de croisement. Evaluons, dans cette somme I, les termes qui contiennent les valeurs de l'intégrale $\omega(z)$ en l'un des six points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ situés au point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1}: nous désignerons ces termes par I_k. L'intégrale I sera la somme des quantités analogues à I_k évaluées successivement pour tous les points de croisement des coupures, et l'on aura

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} I_k.$$

D'après les intégrales évaluées à la page précédente, les termes de l'intégrale I qui contiennent les valeurs de $\omega(z)$ en l'un des six points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$, sont

$$I_k = A'_k[\omega(\alpha) - \omega(\gamma)] + B'_k[\omega(\eta) - \omega(\alpha)] + C'_k\omega(\varepsilon) - C'_{k+1}\omega(\beta).$$

Mais la figure de la page précédente donne d'après la définition même des modules de périodicité

$$\omega(\alpha) = n_k\omega(\beta) + B_k, \qquad \omega(\beta) = \omega(\gamma) + C_{k+1},$$
$$\omega(\alpha) = m_k\omega(\eta) + A_k, \qquad \omega(\eta) = n_k\omega(\varepsilon) + B_k;$$

l'on tire de ces relations, en exprimant

$$\omega(\beta), \omega(\gamma), \omega(\varepsilon), \omega(\eta)$$

en fonction de $\omega(\alpha)$ et faisant comme plus haut

$$\frac{1}{m_k} = m'_k, \qquad \frac{1}{n_k} = n'_k,$$

$$\omega(\beta) = n'_k\omega(\alpha) - n'_kB_k, \qquad \omega(\gamma) = n'_k\omega(\alpha) - n'_kB_k - C_{k+1},$$
$$\omega(\eta) = m'_k\omega(\alpha) - m'_kA_k, \qquad \omega(\varepsilon) = m'_kn'_k\omega(\alpha) - n'_k(m'_kA_k + B_k).$$

D'après cela, la quantité I_k devient:

$$I_k = \omega(\alpha)[A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_kn'_kC'_k - n'_kC'_{k+1}]$$
$$+ A'_k(n'_kB_k + C_{k+1}) - m'_kB'_kA_k - n'_kC'_k(m'_kA_k + B_k) + n'_kC'_{k+1}B_k.$$

Le coefficient de $\omega(\alpha)$

$$A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_kn'_kC'_k - n'_kC'_{k+1}$$

est *nul*, en vertu des relations (12) (page 34) appliquées aux modules de périodicité de l'intégrale $\Omega(z)$ dont les multiplicateurs sont m'_k et n'_k. Il reste alors

$$I_k = A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C'_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C'_{k+1} B_k.$$

Tels sont, dans l'intégrale I, les termes provenant du point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1}: l'intégrale I sera, comme nous l'avons déjà dit,

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} I_k.$$

Puisque cette intégrale I est *nulle*, on a donc la relation cherchée

$$(16)\qquad \sum_{k=1}^{k=p} [A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C'_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C'_{k+1} B_k] = 0$$

entre les modules de périodicité A_k, B_k, C_h et A'_k, B'_k, C'_h des deux intégrales $\omega(z)$ et $\Omega(z)$ aux multiplicateurs inverses. Comme les coupures c_1 et c_{p+1} *n'existent pas*, il faudra, suivant des conventions déjà faites, supposer

$$C_1 = C'_1 = C_{p+1} = C'_{p+1} = 0.$$

Comme vérification, supposons que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité, alors leurs inverses m'_k et n'_k deviennent aussi égaux à l'unité, et les deux intégrales $\omega(z)$, $\Omega(z)$ deviennent deux intégrales abéliennes de première espèce. Dans ce cas limite, les constantes C_k et C'_k sont toutes *nulles*, et la relation (16) que nous venons d'établir devient

$$\sum_{k=1}^{k=p} (A'_k B_k - A_k B'_k) = 0,$$

ce qui est la relation bien connue liant les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce.

Remarque. La relation (16) établie plus haut peut être transformée à l'aide des relations (12) de la page (34):

$$\left.\begin{aligned} A_k(1 - n_k) - B_k(1 - m_k) + m_k n_k C_k - n_k C_{k+1} &= 0, \\ A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_k n'_k C'_k - n'_k C'_{k+1} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (k=1,2,\ldots,p$$

C'est en se servant de ces relations que l'on pourrait montrer que la relation (16) est symétrique par rapport aux deux intégrales $\omega(z)$ et $\Omega(z)$, c'est à dire que cette relation ne change pas quand on y remplace A_k, B_k, C_k, m_k, n_k par $A'_k, B'_k, C'_k, m'_k, n'_k$ et inversement.

Supposons, par exemple, les multiplicateurs n_k et n'_k différents de l'unité ($k = 1, 2, \ldots, p$). Alors on pourra écrire les relations que nous venons de rappeler

$$A_k = \frac{n_k C_{k+1} - m_k n_k C_k + B_k(1 - m_k)}{1 - n_k},$$

$$A'_k = \frac{n'_k C'_{k+1} - m'_k n'_k C'_k + B'_k(1 - m'_k)}{1 - n'_k}$$

ou, en remplaçant dans la première n_k et m_k par $\frac{1}{n'_k}$ et $\frac{1}{m'_k}$

$$A_k = -\frac{m'_k C_{k+1} - C_k - n'_k B_k(1 - m'_k)}{m'_k(1 - n'_k)}.$$

L'on aura donc, en remplaçant dans I_k, A_k et A'_k par ces valeurs et réduisant

$$\begin{aligned} I_k &= A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C'_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C'_{k+1} B_k \\ &= \frac{n'_k B_k(C'_{k+1} - C'_k) + B'_k(C_{k+1} - C_k) + n'_k(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k)}{1 - n'_k}. \end{aligned}$$

La relation (16)

$$\sum_{k=1}^{k=p} I_k = 0,$$

peut donc s'écrire

$$(17) \quad \sum_{k=1}^{k=p} \frac{n'_k B_k(C'_{k+1} - C'_k) + B'_k(C_{k+1} - C_k)}{1 - n'_k} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{n'_k}{1 - n'_k}(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k) = 0$$

où la symétrie se met aisément en évidence. En effet remarquons que la somme

$$\sum_{k=1}^{k=p}(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k)$$

se réduit à

$$C_{p+1}C'_{p+1} - C_1 C'_1$$

c'est à dire à *zéro*, puisque

$$C_1 = C'_1 = C_{p+1} = C'_{p+1} = 0.$$

Ajoutons alors la moitié de cette somme nulle à la relation (17), nous aurons

$$\sum_{k=1}^{k=p}\frac{n'_k B_k(C'_{k+1}-C'_k)+B'_k(C_{k+1}-C_k)}{1-n'_k}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=p}\frac{1+n'_k}{1-n'_k}(C_{k+1}C'_{k+1}-C_kC'_k)=0,$$

relation dont le premier membre ne fait que changer de signe quand on remplace B'_k, C'_h, m'_k, n'_k par B_k, C_h, m_k, n_k et inversement B_k, C_h, m_k, n_k par B'_k, C'_h, m'_k, n'_k.

Ainsi, en supposant le genre p égal à 2 on a la relation suivante, puisqu'alors

$$C_1 = C'_1 = C_3 = C'_3 = 0:$$

$$(18)\qquad \frac{n'_1B_1C'_2+B'_1C_2}{1-n'_1}-\frac{n'_2B_2C'_2+B'_2C_2}{1-n'_2}+\frac{C_2C'_2}{2}\left(\frac{1+n'_1}{1-n'_1}-\frac{1+n'_2}{1-n'_2}\right)=0.$$

Intégrales de troisième espece.

Soit $\Phi(z)$ une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k, l'intégrale de cette fonction

$$\int \Phi(z)dz$$

est de *troisième espèce,* lorsqu'en certains points $z_1, z_2, \ldots$ de la surface de Riemann elle devient infinie comme

$$K_1 \log(z-z_1), \qquad K_2 \log(z-z_2), \quad \ldots$$

$K_1, K_2, \ldots$ désignant des constantes.

L'intégrale la plus simple de troisième espèce sera celle qui reste *finie* sur toute la surface de Riemann, *sauf en un seul point* z_0 où elle devient infinie comme

$$\log(z-z_0).$$

Une telle intégrale *existe toujours, excepté dans le cas spécial* où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z)+\lambda_2 w_2(z)+\ldots+\lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas spécial, toute intégrale de troisième espèce a *au moins deux infinis logarithmiques* z_0 et z_1, comme nous le verrons plus loin.

En laissant de côté ce cas spécial, nous allons former l'intégrale annoncée qui devient infinie en un seul point z_0 et cela comme

$$\log (z - z_0).$$

Soit

$$\varpi(z, z_0) = \int \varphi(z, z_0) dz$$

cette intégrale. La fonction $\varphi(z, z_0)$ devra être uniforme et régulière sur la surface de Riemann R_{ab}, admettre les multiplicateurs donnés m_k et n_k et devenir en chaque point à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$; cette fonction pourra devenir infinie en certains points de ramification ζ comme une puissance de $\frac{1}{z - \zeta}$ inférieure à l'unité; enfin elle devra devenir infinie au point z_0 comme $\frac{1}{z - z_0}$. Pour former cette fonction $\varphi(z, z_0)$, désignons comme précédemment par

$$w(z) = \int w'(z) dz$$

une intégrale abélienne de première espèce, et par

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

les $(2p - 2)$ zéros de la fonction algébrique $w(z)$ qui sont situés à distance finie, zéros qui vérifient les p relations connues (page 22)

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k. \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

Le rapport

$$\frac{\varphi(z, z_0)}{w'(z)}$$

sera une fonction régulière sur la surface de Riemann R_{ab}, admettant les multiplicateurs m_k et n_k, et devenant infinie aux $(2p - 1)$ points

$$z_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}.$$

D'après ce que nous avons vu dans la première partie, cette fonction aura aussi $(2p - 1)$ zéros

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2},$$

et son expression sera

$$\frac{\varphi(z\,,\,z_0)}{w'(z)} = Ce^{\tilde{\omega}_{z_0\beta_0}(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z)+\ldots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+w_2(z)\log m_2+\ldots+w_p(z)\log m_p]},$$

les infinis et les zéros étant liés par les p relations

$$w_k(\beta_0) - w_k(z_0) + \sum_{j=1}^{j=2p-2} [w_k(\beta_j) - w_k(\gamma_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p.$$

Comme l'on a

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k,$$

ces relations peuvent s'écrire

$$(19) \qquad \sum_{j=0}^{j=2p-2} w_k(\beta_j)$$

$$\equiv w_k(z_0) + G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p.$$

On conclut de là que l'on peut choisir arbitrairement $(p-1)$ zéros, $\beta_p\,,\,\beta_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,\beta_{2p-2}$ par exemple, et déterminer les p zéros restants β_0, $\beta_1\,,\,\ldots\,,\,\beta_{p-1}$ en fonction des premiers et de z_0.

Il est essentiel de montrer que la fonction

$$\frac{\varphi(z\,,\,z_0)}{w'(z)}$$

ainsi déterminée devient *effectivement infinie* au point donné z_0; pour cela il faut montrer que, les zéros $\beta_p\,,\,\beta_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,\beta_{2p-2}$ étant choisis arbitrairement d'une manière convenable, aucun des p zéros restants $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{p-1}$ déterminés par les équations (19) *ne coïncide avec* z_0. Si l'un de ces zéros, β_0 par exemple, coïncidait avec z_0, les équations (19) deviendraient

$$(20) \qquad \sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j)$$

$$\equiv G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p] \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

et elles détermineraient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p$ en fonction de $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$; elles établiraient donc une relation entre β_p et $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$, ce qui est *impossible* puisque nous choisissons arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$. Il est donc absurde de supposer que β_0 coïncide avec z_0 quand on choisit arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{2p-2}$.

Il est cependant un cas spécial où les relations (20) ne détermineraient pas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p$ en fonction de $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$: c'est le cas où les seconds membres des relations (20) se réduiraient aux constantes G_k, à des multiples près des modules de périodicité des intégrales abéliennes $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_p(z)$, c'est à dire où l'on aurait

$$(21) \qquad \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p] \equiv 0. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

Les équations (20) présenteraient alors le cas d'indétermination déjà signalé (BRIOT, *Théorie des fonctions abéliennes,* page 96, n° 56), et elles permettraient de prendre arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{2p-2}$; il n'y aurait donc plus une absurdité à supposer que β_0 coïncide avec z_0. Mais, lorsque les multiplicateurs m_k et n_k satisfont aux relations (21), ils sont identiques aux multiplicateurs d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

comme nous l'avons vu dans la première partie (page 15). Donc, *en écartant ce cas spécial* qui sera examiné à part, on pourra former une fonction

$$\frac{\varphi(z, z_0)}{w'(z)} = Ce^{\tilde{\omega}_{z_0\beta_0}(z) + \tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]}$$

régulière sur R_{ab}, admettant les multiplicateurs donnés, devenant infinie du premier ordre au point z_0 et aux points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$ qui sont les zéros de $w'(z)$ situés à distance finie. La fonction

$$\varphi(z, z_0) = Cw'(z)e^{\tilde{\omega}_{z_0\beta_0}(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z)+\ldots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+\ldots+w_p(z)\log m_p]}$$

a donc, comme seuls infinis, le point z_0 et les infinis de $w'(z)$; de plus elle devient à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{\text{I}}{z^2}$. Déterminons le facteur constant C de telle façon que le résidu de $\varphi(z, z_0)$ relatif au point z_0 soit égal à l'unité, c'est à dire que la différence

$$\varphi(z, z_0) - \frac{\text{I}}{z - z_0}$$

reste finie pour $z = z_0$. Alors l'intégrale

$$\varpi(z, z_0) = \int \varphi(z, z_0)dz$$

sera une intégrale de troisième espèce devenant infinie au seul point z_0 de telle façon que la différence

$$\varpi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie pour $z = z_0$. Nous employons, pour désigner cette intégrale, la lettre ϖ que l'on emploie aussi pour les intégrales abéliennes de troisième espèce: mais il ne pourra pas y avoir de confusion, car l'intégrale abélienne de troisième espèce est désignée par $\varpi_{z_0 z_1}(z)$ et la nôtre par $\varpi(z, z_0)$.

Si nous appelons $\Pi(z, z_0)$ l'intégrale la plus générale d'une fonction aux multiplicateurs donnés, admettant un seul infini z_0 de telle façon que la différence

$$\Pi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie au point z_0, cette intégrale sera de la forme

$$\Pi(z, z_0) = \varpi(z, z_0) + \mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ sont des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \ldots, \omega_{p-1}(z)$ les intégrales de première espèce de fonctions aux multiplicateurs donnés. En effet la différence

$$\Pi(z, z_0) - \varpi(z, z_0)$$

est une intégrale *partout finie,* c'est à dire une intégrale de première espèce.

Cas spécial. Examinons maintenant le cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Alors une fonction régulière sur la surface de Riemann R_{ab} et admettant les multiplicateurs m_k et n_k est de la forme

$$E(z)R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction algébrique rationnelle en s et z. Comme le facteur $E(z)$ est partout fini et différent de zéro, les infinis du produit $E(z)R(s, z)$ sont ceux de $R(s, z)$. L'on sait que, si la fonction algébrique $R(s, z)$ est en chaque point à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$, la somme des résidus de cette fonction $R(s, z)$ sur toute la surface de Riemann est *nulle;* cette fonction admet donc *au moins deux* résidus différents de zéro, si tous ses résidus ne sont pas nuls. *Par conséquent, si le produit $E(z)R(s, z)$ n'a que des infinis d'ordre inférieur au second, il a au moins deux infinis du premier ordre, ou bien il n'en a aucun.* Si donc l'intégrale

$$\int E(z)R(s, z)dz$$

ne doit avoir que des infinis logarithmiques, elle en a au moins deux, ou bien elle n'en a aucun et est de première espèce.

Voici comment on obtiendra une intégrale de cette forme avec deux infinis logarithmiques. Soit, comme précédemment

$$\varpi_{z_0 z_1}(z)$$

l'intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme $\log\frac{z - z_1}{z - z_0}$ et

$$\varpi'_{z_0 z_1}(z)$$

la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale: cette fonction devient infinie aux points de ramification d'un ordre inférieur à l'unité, elle devient infinie du premier ordre aux points z_0 et z_1 avec les résidus -1 et $+1$. L'intégrale

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z) \varpi'_{z_0 z_1}(z) dz$$

sera l'intégrale de troisième espèce la plus simple formée avec une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k. Cette intégrale est finie partout, sauf aux deux points z_0 et z_1 où elle devient infinie de telle façon que la différence

$$\varpi(z, z_0, z_1) + E(z_0) \log(z - z_0) - E(z_1) \log(z - z_1)$$

reste finie.

L'intégrale la plus générale possédant cette propriété est

$$\varpi(z, z_0, z_1) + \mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_p \omega_p(z) + \text{const.},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ désignant des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \ldots, \omega_p(z)$ les intégrales de première espèce aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k, intégrales qui sont au nombre de p. (Page 26.)

Modules de périodicité des intégrales de troisième espèce.

Prenons d'abord le cas où les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$; soit, comme précédemment, $\varpi(z, z_0)$ l'intégrale de troisième espèce qui devient infinie au seul point z_0 de la surface de Riemann R_{ab} de telle façon que la différence

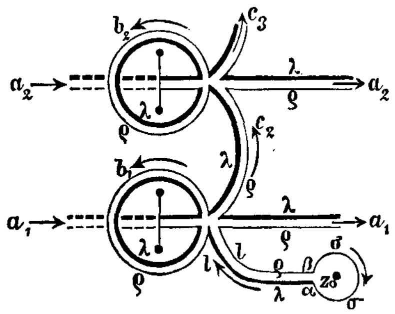
$$\varpi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie pour $z = z_0$. Si l'on suppose tracées les coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p; \; c_2, c_3, \ldots, c_p,$$

de la même façon que plus haut (page 31), on voit que l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ n'est pas uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} ainsi obtenue; car, si le point z tourne autour de z_0, cette intégrale augmente de $2\pi i$.

En suivant la méthode exposée par C. NEUMANN (loc. cit. pages 220 et suivantes) nous ajouterons aux coupures a_k, b_k, c_h un lacet l entourant le point z_0 et nous supposerons, pour simplifier, que ce lacet l aboutisse au point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2, comme le montre la figure. Sur cette figure le bord gauche du lacet l est marqué d'un trait plus gros; λ désigne, comme précédemment, un point du bord gauche de ce lacet ou d'une coupure quelconque et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit; enfin α et β désignent les deux points où la circonférence σ de rayon infiniment petit entourant le point z_0 se raccorde avec les deux bords de l.



L'intégrale $\varpi(z, z_0)$ est alors uniforme sur la surface de Riemann ainsi découpée que nous désignerons par R_{abcl}. On voit, comme on l'a fait pour l'intégrale de première espèce (page 32), que l'on a:

$$\text{le long de la coupure } a_k: \quad \varpi(\lambda, z_0) - m_k\varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{A}_k, \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

$$\text{le long de la coupure } b_k: \quad \varpi(\lambda, z_0) - n_k\varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{B}_k, \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

$$\text{le long de la coupure } c_h: \quad \varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{C}_h, \quad (h=2,3,\ldots,p)$$

les lettres $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_h$ désignant des constantes que nous appellerons *modules de périodicité de l'intégrale* $\varpi(z, z_0)$ le long des coupures a_k, b_k. c_h.

Reste le lacet l. La différence

$$\varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0)$$

des valeurs que prend l'intégrale sur les deux bords de ce lacet l est aussi constante, car sa différentielle est nulle. Cette différence constante le long du lacet l est égale en particulier à

$$\varpi(\alpha, z_0) - \varpi(\beta, z_0)$$

(voyez la figure de la page précédente), c'est à dire à l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ prise dans le sens négatif sur la petite circonférence σ entourant le point z_0: elle est donc

$$-2\pi i,$$

car la dérivée de $\varpi(z, z_0)$ admet le point z_0 comme pôle de résidu $+1$.

Ainsi, l'on a, le long de la coupure l,

$$\varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0) = -2\pi i.$$

En résumé, l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ admet $3p$ modules de périodicité, à savoir

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p & \text{sur les coupures} & a_1, a_2, \ldots, a_p, \\ \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p & \text{sur les coupures} & b_1, b_2, \ldots, b_p, \\ \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_p & \text{sur les coupures} & c_2, \ldots, c_p, \\ -2\pi i & \text{sur la coupure} & l. \end{array}$$

Relations entre ces modules de périodicité.

En appliquant à l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ les raisonnements appliqués aux pages 33 et 34 à l'intégrale de première espèce $\omega(z)$, nous déduirons, de la considération de chacun des points de croisement des coupures, une relation entre les modules de périodicité et les multiplicateurs correspondants.

Le point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2 et l, (voyez la figure de la page précédente) donne ainsi la relation

$$\mathfrak{B}_1(1 - m_1) - \mathfrak{A}_1(1 - n_1) + 2m_1n_1\pi i + n_1\mathfrak{C}_2 = 0;$$

le point de croisement des coupures a_2, b_2, c_2, c_3 donne de même la relation

$$\mathfrak{B}_2(1 - m_2) - \mathfrak{A}_2(1 - n_2) - m_2n_2\mathfrak{C}_2 + n_2\mathfrak{C}_3 = 0;$$

et ainsi de suite.

On obtiendra en tout, comme aux pages 33 et 34, le système des p relations suivantes

$$\mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k) - m_kn_k\mathfrak{C}_k + n_k\mathfrak{C}_{k+1} = 0, \tag{22}$$

où l'on fait

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

en convenant que

$$\mathcal{C}_1 = -2\pi i, \qquad \mathcal{C}_{p+1} = 0.$$

L'élimination de $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots, \mathcal{C}_p$ entre ces p relations fournira facilement l'équation

$$(23) \qquad 2\pi i + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathfrak{B}_k(1-m_k) - \mathfrak{A}_k(1-n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0,$$

qu'il est intéressant de rapprocher de l'équation analogue relative aux intégrales de première espèce (voyez page 34, équation 13).

Remarque. Il serait *absurde* de supposer ici les multiplicateurs m_k et n_k tous égaux à l'unité, car, dans cette hypothèse, l'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$ avec *un seul* infini logarithmique *n'existerait plus,* comme il est bien connu par la théorie des intégrales abéliennes.

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses.

Désignons, comme plus haut, par $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, et appelons

$$A'_k, B'_k, C'_h \qquad \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale relatifs aux coupures a_k, b_k, c_h.

L'intégrale

$$J = \int \Omega(z) d\varpi(z, z_0)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface de Riemann R_{abcl} (voyez page 49) est *nulle;* car, sur cette surface R_{abcl}, la fonction

$$\Omega(z) \frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$$

est régulière et a tous ses résidus nuls.

Si l'on appelle λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, les éléments de l'intégrale J correspondant à ces deux points seront:

$$\Omega(\lambda) d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho) d\varpi(\rho, z_0),$$

car les deux bords de la coupure sont parcourus en sens contraire par la variable d'intégration. Comme, outre les deux bords des coupures a_k, b_k, c_h et l, le contour de la surface R_{abcl} comprend encore la circonférence infiniment petite σ entourant le point z_0 et raccordant les deux bords de la coupure l, il faudra avoir soin de prendre l'intégrale J sur les deux bords de toutes les coupures et sur la circonférence σ. On a donc

$$J = \sum_{k=1}^{k=p}\left[\int_{a_k}[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0)] + \int_{b_k}[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0)]\right]$$
$$+ \sum_{h=2}^{h=p}\int_{c_h}[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0]$$
$$+ \int_l[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0)] + \int_\sigma \Omega(z)d\varpi(z, z_0);$$

les indices dont sont affectés les signes d'intégration signifiant que les premières intégrales sont prises le long des coupures marquées par l'indice et la dernière le long de la petite circonférence σ dans le sens de la flèche. Cette dernière intégrale est facile à calculer. En effet, dans l'intérieur de cette circonférence σ la fonction soumise à l'intégration

$$\Omega(z)\frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$$

admet le pôle simple z_0 avec le résidu $\Omega(z_0)$, car le facteur $\frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$ admet ce pôle avec le résidu $+ 1$. On a donc, puisque la circonférence σ est parcourue dans le sens négatif autour de z_0,

$$\int_\sigma \Omega(z)d\varpi(z, z_0) = - 2\pi i\Omega(z_0).$$

Quant à l'intégrale affectée de l'indice l

$$\int_l[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0)],$$

elle est *nulle;* car le long de la coupure l on a

$$\Omega(\lambda) = \Omega(\rho), \qquad d\varpi(\lambda, z_0) = d\varpi(\rho, z_0).$$

Enfin, la somme des $(3p-1)$ premières intégrales relatives aux coupures a_k, b_k, c_h, qui figurent dans l'intégrale J de la page précédente, peut être déduite de la somme des intégrales analogues qui constituent l'intégrale I envisagée à la page 36, en remplaçant dans cette dernière somme $\omega(z)$ par $\varpi(z, z_0)$. On en conclut, en répétant la suite des transformations que l'on a fait subir à l'intégrale I aux pages 37 et suivantes, que l'intégrale J a pour valeur

$$J = -2\pi i \Omega(z_0)$$
$$+\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}_k + \mathfrak{C}_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}_k - n'_k C''_k(m'_k\mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k) + n'_k C''_{k+1}\mathfrak{B}_k].$$

Cette intégrale J étant nulle, on a la relation

$$(24)\quad \sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}_k + \mathfrak{C}_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}_k - n'_k C''_k(m'_k\mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k) + n'_k C''_{k+1}\mathfrak{B}_k]$$
$$= 2\pi i \Omega(z_0),$$

dont le premier membre se déduit du premier membre de la relation 16 (page 40) en remplaçant dans cette relation les modules de périodicité A_k, B_k, C_h de l'intégrale de première espèce $\omega(z)$ par les modules de périodicité $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_h$ de l'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$. Il faudra bien entendu faire

$$C''_1 = C''_{p+1} = \mathfrak{C}_{p+1} = 0.$$

Quant à la constante $\mathfrak{C}_1$ elle doit être considérée comme égale à $-2\pi i$ qui est le module de périodicité de $\varpi(z, z_0)$ sur la coupure l, comme nous l'avons déjà dit à la page 51.

Cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \dots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas, comme nous l'avons vu plus haut (page 48), l'intégrale la plus simple de troisième espèce d'une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k est donnée par la formule

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z)\varpi'_{z_0 z_1}(z)dz,$$

$\varpi_{z_0 z_1}(z)$ désignant l'intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme

$$\log \frac{z - z_1}{z - z_0}$$

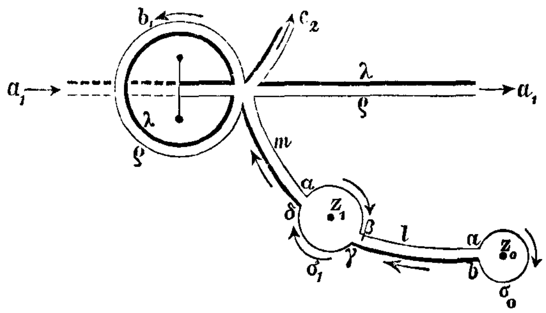
et $\varpi'_{z_0 z_1}(z)$ étant la dérivée de cette intégrale. L'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ est partout finie sauf aux points z_0, z_1 où elle devient infinie comme

$$E(z_1) \log (z - z_1) - E(z_0) \log (z - z_0).$$

Pour obtenir une surface sur laquelle l'intégrale

$$\varpi(z, z_0, z_1)$$

reste uniforme, nous suivrons encore la méthode exposée par C. Neumann (loc. cit. pages 220 et suivantes) et nous ajouterons aux coupures a_k, b_k, c_h



un lacet $l + m$ dont les deux bords sont infiniment rapprochés et qui renferme deux petites ouvertures circulaires σ_0 et σ_1 entourant les points z_0 et z_1. Nous supposerons de plus que ce lacet parte du point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2, comme le montre la figure; nous désignerons, avec C. Neumann, par R_{abclm} la surface de Riemann ainsi délimitée.

L'intégrale de troisième espèce

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z) \varpi'_{z_0 z_1}(z) dz$$

est régulière sur cette surface R_{abclm}: elle possède $(3p + 1)$ modules de périodicité à savoir:

$$\begin{array}{llr} \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p & \text{le long des coupures} & a_1, a_1, \ldots, a_p, \\ \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p & \text{le long des coupures} & b_1, b_2, \ldots, b_p, \\ \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_p & \text{le long des coupures} & c_2, \ldots, c_p, \\ \mathfrak{L}, \mathfrak{M} & \text{le long des coupures} & l, m. \end{array}$$

Les constantes $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont faciles à calculer. En appelant a et b les deux points où la circonférence σ_0 entourant z_0 se raccorde avec les bords de la coupure l, on aura

$$\mathfrak{L} = \varpi(b, z_0, z_1) - \varpi(a, z_0, z_1) = \int_a^b E(z)\varpi'_{z_0 z_1}(z)dz,$$

l'intégration étant faite sur la circonférence σ_0 dans le sens marqué par une flèche. Comme, à l'intérieur du cercle σ_0, la fonction intégrée possède le pôle $z = z_0$ avec le résidu $-E(z_0)$, l'intégrale qui est prise autour de ce pôle dans le sens négatif a pour valeur

$$\mathfrak{L} = 2\pi i E(z_0).$$

Quant à la constante $\mathfrak{M}$ elle est égale à la différence des valeurs de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ aux deux points δ et α où les deux bords de la coupure m se raccordent avec la circonférence σ_0. (Voyez la figure de la page précédente.)

$$\mathfrak{M} = \varpi(\delta, z_0, z_1) - \varpi(\alpha, z_0, z_1).$$

D'autre part on a aussi, en considérant les deux points β et γ où les deux bords de la coupure l rencontrent cette circonférence σ_1,

$$\mathfrak{L} = \varpi(\gamma, z_0, z_1) - \varpi(\beta, z_0, z_1);$$

d'où en retranchant

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = \varpi(\delta, z_0, z_1) - \varpi(\gamma, z_0, z_1) + \varpi(\beta, z_0, z_1) - \varpi(\alpha, z_0, z_1).$$

Or le second membre de cette relation n'est autre chose que l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ prise sur la circonférence σ_1 dans le sens de la flèche. Comme la fonction

$$E(z)\varpi'_{z_0 z_1}(z)$$

a, dans le cercle σ_1, le seul pôle z_1 avec le résidu $E(z_1)$, l'intégrale de cette fonction prise dans le sens négatif sur la circonférence σ_1 est

$$-2\pi i E(z_1).$$

On obtient donc la relation

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = -2\pi i E(z_1),$$

d'où, d'après la valeur trouvée auparavant pour $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{M} = 2\pi i[E(z_0) - E(z_1)].$$

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$.

La considération des p points de croisement des coupures donnera, comme pour l'intégrale de première espèce (page 34), les p relations

$$\mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k) - m_k n_k \mathfrak{C}_k + n_k \mathfrak{C}_{k+1} = 0$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

avec la convention que

$$\mathfrak{C}_1 = 2\pi i[E(z_0) - E(z_1)], \qquad \mathfrak{C}_{p+1} = 0.$$

L'élimination de $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_p$ entre ces p relations fournira l'équation

$$(25) \qquad 2\pi i[E(z_1) - E(z_0)] + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0$$

analogue à la relation (23) de la page 51.

Relation entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ *et ceux d'une intégrale de première espèce* $\Omega(z)$ *aux multiplicateurs inverses.*

En écrivant que l'intégrale

$$\int \Omega(z) d\varpi(z, z_0, z_1),$$

prise sur le contour de la surface de Riemann R_{abclm}, est *nulle*, et transformant cette intégrale comme on l'a fait pour une intégrale du même genre à propos des intégrales de première (pages 36 à 40) ou de troisième espèce (pages 51 à 53), on obtiendra la relation

$$(26)\quad \sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}_k+\mathfrak{C}_{k+1})-m'_kB'_k\mathfrak{A}_k-n'_kC''_k(m'_k\mathfrak{A}_k+\mathfrak{B}_k)+n'_kC''_{k+1}\mathfrak{B}_k]$$
$$=2\pi i[\Omega(z_1)E(z_1)-\Omega(z_0)E(z_0)].$$

Comme vérification, supposons que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité, leurs inverses m'_k et n'_k deviendront aussi l'unité, l'exponentielle $E(z)$ se réduira également à l'unité, enfin $\Omega(z)$ et $\varpi(z, z_0, z_1)$ deviendront des *intégrales abéliennes* l'une de première l'autre de troisième espèce. Comme, dans cette hypothèse, les constantes $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_p$ et $C''_1, C''_2, \ldots, C''_p$ deviennent nulles, les constantes $\mathfrak{C}_{p+1}$ et C''_{p+1} étant nulles par convention, la relation (26) que nous venons de trouver se réduit à la relation bien connue

$$\sum_{k=1}^{k=p}(A'_k\mathfrak{B}_k-B'_k\mathfrak{A}_k)=2\pi i[\Omega(z_1)-\Omega(z_0)]$$

qui lie les modules de périodicité $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$, d'une intégrale abélienne de troisième espèce, aux modules de périodicité A'_k et B'_k d'une intégrale abélienne de première espèce $\Omega(z)$.

Intégrales de seconde espèce.

Soit $\Phi(z)$ une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k $(k=1,2,\ldots,p)$, l'intégrale

$$\int \Phi(z)\,dz$$

sera de *deuxième espèce* si elle n'admet que des infinis *algébriques*. D'après cela, l'intégrale de *seconde espèce* la plus simple qu'on puisse imaginer est celle qui ne devient infinie qu'en un point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z-z_0}.$$

Une telle intégrale existe toujours, quelle que soit la position du point

z_0, *à condition que les multiplicateurs ne soient pas ceux d'une exponentielle de la forme*

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

non réduite à une constante.

Supposons d'abord que les multiplicateurs ne soient pas ceux d'une exponentielle telle que $E(z)$. Nous formerons alors, comme il suit, l'intégrale de *seconde espèce* avec un seul pôle du premier ordre de résidu $+1$.

Appelons, comme plus haut, $w(z)$ une intégrale abélienne de première espèce et $w'(z)$ la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale. Cette fonction algébrique $w'(z)$ devient nulle à distance finie en $(2p - 2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

liés par les p relations bien connues

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k. \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

Formons une fonction $\psi(z)$ admettant les multiplicateurs m_k et n_k, devenant infinie du premier ordre aux points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

et *infinie du second ordre* en un point z_0 donné arbitrairement. Cette fonction $\psi(z)$ ayant $2p$ infinis, puisque z_0 compte pour deux, aura aussi $2p$ zéros que nous nommerons

$$u, v, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}.$$

D'après ce que nous avons vu dans la première partie, cette fonction $\psi(z)$ sera

$$\psi(z) = Ce^{\tilde{\omega}_{z_0 u}(z) + \tilde{\omega}_{z_0 v}(z) + \tilde{\omega}_{\gamma_1 \beta_1}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z) \log m_1 + w_2(z) \log m_2 + \ldots + w_p(z) \log m_p]},$$

les zéros

$$u, v, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et les infinis

$$z_0, z_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

étant liés par les p relations

$$w_k(u) - w_k(z_0) + w_k(v) - w_k(z_0) + \sum_{j=1}^{j=2p-2} [w_k(\beta_j) - w_k(\gamma_j)]$$
$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Comme la somme

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j)$$

est égale à la constante G_k, les relations ci-dessus s'écrivent plus simplement

$$w_k(u) + w_k(v) + \sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j)$$
$$\equiv 2w_k(z_0) + G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + \ldots + b_{pk}\log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Ces relations montrent que, z_0 étant donné, on pourra choisir arbitrairement p zéros

$$u, v, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et déterminer par ces relations les p zéros restants:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p.$$

On pourra toujours choisir les zéros arbitraires

$$u, v, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$$

de telle façon qu'aucun des zéros restants

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$$

ne coïncide avec le point z_0. Alors la fonction $\psi(z)$ deviendra effectivement infinie du second ordre au point z_0. Si l'on considère le produit

$$\psi(z)w'(z),$$

on voit qu'il ne devient plus infini en aucun des points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$ qui sont les *zéros* de $w'(z)$; ce produit devient infini du second ordre au point z_0; il devient aussi infini aux infinis de $w'(z)$ et cela comme $w'(z)$; enfin ce produit est, en chaque point à l'infini, infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. On pourra disposer du facteur constant C qui figure dans l'expression de $\psi(z)$, de manière que le produit

$$(z - z_0)^2\psi(z)w'(z)$$

tende vers -1 quand z tend vers z_0. Alors, dans le voisinage de $z = z_0$, on aura pour $\psi(z)w'(z)$ un développement de la forme

$$\psi(z)w'(z) = -\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{P_0}{z - z_0} + B_0 + C_0(z - z_0) + \ldots,$$

$P_0, B_0, C_0, \ldots$ étant des constantes dont la première est le résidu de $\psi(z)w'(z)$ au pôle z_0. D'après toutes ces propriétés du produit $\psi(z)w'(z)$, l'intégrale

$$\int\psi(z)w'(z)dz$$

reste partout finie excepté au point z_0 où elle devient infinie comme

$$\frac{1}{z - z_0} + P_0 \log(z - z_0).$$

Puisque, par hypothèse, les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$, il existe une intégrale de troisième espèce

$$\varpi(z, z_0)$$

dont la dérivée admet les multiplicateurs m_k et n_k et qui devient infinie au point z_0 comme

$$\log(z - z_0).$$

Donc la différence

$$t(z, z_0) = \int\psi(z)w'(z)dz - P_0\varpi(z, z_0)$$

deviendra infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z - z_0}.$$

Nous avons ainsi formé l'intégrale de seconde espèce

$$t(z, z_0)$$

partout finie excepté au pôle $z = z_0$ de résidu $+ 1$. Nous désignons cette intégrale par la lettre t que Riemann et Neumann emploient pour désigner l'intégrale abélienne de seconde espèce. Cela ne pourra pas amener de confusion car notre intégrale est appelée $t(z, z_0)$ et l'intégrale abélienne avec le pôle simple z_0 est appelée par Neumann $t_{z_0}(z)$.

Cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle $E(z)$.

Dans ce cas on pourra toujours former comme précédemment l'intégrale

$$\int \psi(z) w'(z) dz$$

qui devient infinie au seul point z_0 comme

$$\frac{1}{z - z_0} + P_0 \log(z - z_0);$$

mais alors il n'existe plus d'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$ devenant infinie en un seul point z_0 comme $\log(z - z_0)$. On ne peut donc plus former l'intégrale $t(z, z_0)$ comme dans le cas général qui précède. Dans le cas actuel cette intégrale n'existe plus: la constante P_0 ne peut être nulle que pour des positions particulières du point z_0. En effet, dans le cas présent, la fonction

$$\frac{\psi(z) w'(z)}{E(z)}$$

est une fonction *algébrique* devenant à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$; et l'on sait que la somme de tous les résidus d'une pareille fonction algébrique est *nulle*. Or le seul pôle de cette fonction, ayant un résidu différent de zéro, est le point z_0: dans le voisinage de ce point on a

$$\psi(z) w'(z) = -\frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{P_0}{z - z_0} + B_0 + \ldots,$$

$$\frac{1}{E(z)} = e^{2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

$$= \frac{1}{E(z_0)} + \frac{2(z - z_0)}{E(z_0)} [\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_0)] + \ldots,$$

Si l'on forme le produit

$$\phi(z)w'(z)\cdot\frac{1}{E(z)}$$

et si l'on écrit que dans ce produit, le résidu, c'est à dire le coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$, est nul, on a la relation

$$(27)\qquad P_0 = 2[\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_0)]$$

qui montre que P_0 n'est nul que pour des *positions exceptionnelles* du point z_0.

Ainsi, dans le cas spécial dont nous nous occupons ici, il n'existe pas d'intégrale de deuxième espèce devenant infinie en un point arbitraire z_0 et cela comme $\frac{1}{z-z_0}$. Une telle intégrale ne peut exister que pour des positions *exceptionnelles* du point z_0 vérifiant l'équation

$$\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_0) = 0.$$

Mais, quel que soit z_0, il existe alors une intégrale

$$\tau(z, z_0) = \int \phi(z)w'(z)dz$$

devenant infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z-z_0} + P_0 \log(z-z_0),$$

P_0 ayant la valeur (27) ci-dessus. Cette intégrale $\tau(z, z_0)$ est, d'après notre classification, de troisième espèce; elle peut aussi être formée de la façon suivante. Si l'on appelle, avec NEUMANN,

$$t_{z_0}(z)$$

l'intégrale abélienne de seconde espèce admettant le seul pôle z_0 au premier degré et avec le résidu $+1$, on aura

$$\tau(z, z_0) = \frac{1}{E(z_0)}\int E(z)dt_{z_0}(z).$$

En effet la fonction sous le signe $\int$

$$E(z)\frac{dt_{z_0}(z)}{dz}$$

est une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k: dans le voisinage du point z_0 on a, en appelant $E'(z)$ la dérivée de $E(z)$,

$$E(z) = E(z_0) + (z - z_0)E'(z_0) + \dots,$$

$$\frac{dt_{z_0}(z)}{dz} = -\frac{1}{(z-z_0)^2} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \dots;$$

d'où, en multipliant membre à membre, puis divisant par $E(z_0)$,

$$\frac{E(z)}{E(z_0)}\frac{dt_{z_0}(z)}{dz} = -\frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{E'(z_0)}{E(z_0)}\frac{1}{(z-z_0)} + \dots.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{E(z_0)}\int E(z)\,dt_{z_0}(z)$$

devient donc infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z-z_0} + P_0 \log(z - z_0),$$

car la constante appelée P_0 est précisément

$$-\frac{E'(z_0)}{E(z_0)}.$$

Cette intégrale est, par suite, égale à $\tau(z, z_0)$, ou n'en diffère que par une somme d'intégrales de première espèce.

Puisque, dans ce cas spécial où les multiplicateurs sont ceux de l'exponentielle $E(z)$, il n'existe pas d'intégrale de deuxième espèce avec un seul pôle du premier ordre, l'intégrale de deuxième espèce la plus simple aura au moins *deux pôles* du premier ordre z_0 et z_1. Pour la former, appelons $\tau(z, z_1)$ l'intégrale qui devient infinie au seul point z_1 comme

$$\frac{1}{z-z_1} + P_1 \log(z - z_1), \qquad P_1 = 2[\lambda_1 w_1'(z_1) + \lambda_2 w_2'(z_1) + \dots + \lambda_p w_p'(z_1)],$$

et considérons l'expression

$$t(z, z_0, z_1) = P_1 E(z_0)\tau(z, z_0) - P_0 E(z_1)\tau(z, z_1) + P_0 P_1 \varpi(z, z_0, z_1)$$

où $\varpi(z, z_0, z_1)$ est l'intégrale de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme

$$E(z_1)\log(z-z_1)-E(z_0)\log(z-z_0).$$

Cette intégrale $t(z, z_0, z_1)$ *n'a plus d'infinis logarithmiques:* en effet au point z_0 elle devient infinie comme

$$P_1E(z_0)\left[\frac{1}{z-z_0}+P_0\log(z-z_0)\right]-P_0P_1E(z_0)\log(z-z_0)$$

c'est à dire, en réduisant, comme

$$\frac{P_1E(z_0)}{z-z_0};$$

de même au point z_1 elle devient infinie comme

$$-P_0E(z_1)\left[\frac{1}{z-z_1}+P_1\log(z-z_1)\right]+P_0P_1E(z_1)\log(z-z_1)$$

c'est à dire comme

$$-\frac{P_0E(z_1)}{z-z_1}.$$

Remarque. Si l'on suppose que, dans l'exponentielle

$$E(z)=e^{-2[\lambda_1w_1(z)+\lambda_2w_2(z)+\ldots+\lambda_pw_p(z)]}$$

toutes les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont nulles, cette exponentielle se réduit à l'unité et tous les multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ deviennent aussi égaux à l'unité. Alors la constante P_0 est nulle quel que soit z_0 et l'intégrale $\tau(z, z_0)$ se réduit à l'intégrale abélienne de seconde espèce $t_{z_0}(z)$.

Modules de périodicité d'une intégrale de deuxième espèce.

Nous venons de voir que, dans le cas général où les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$, il existe une intégrale de deuxième espèce

$$t(z, z_0)$$

partout finie excepté au point z_0 qui est un pôle simple de résidu $+1$. Cette intégrale est régulière sur la surface R_{abc} de RIEMANN: elle possède, comme une intégrale de première espèce, $(3p-1)$ modules de périodicité à savoir:

$$\left.\begin{array}{l}\text{le long de la coupure } a_k \text{ le module de périodicité } \mathfrak{A}'_k,\\ \text{le long de la coupure } b_k \text{ le module de périodicité } \mathfrak{B}'_k,\end{array}\right\} \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

$$\text{le long de la coupure } c_h \text{ le module de périodicité } \mathfrak{C}'_h. \quad (h=2,3,\ldots,p)$$

Cela signifie que l'on a:

$$\begin{array}{ll}\text{le long de } a_k\colon & t(\lambda, z_0) - m_k t(\rho, z_0) = \mathfrak{A}'_k,\\ \text{le long de } b_k\colon & t(\lambda, z_0) - n_k t(\rho, z_0) = \mathfrak{B}'_k,\end{array} \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

$$\text{le long de } c_h\colon \quad t(\lambda, z_0) - t(\rho, z_0) = \mathfrak{C}'_h. \quad (h=2,3,\ldots,p)$$

Relations entre ces modules.

La considération des points de croisement des coupures fournira entre ces modules de périodicité des relations identiques à celles qui ont été établies pour les modules de périodicité des intégrales de première espèce. (Pages 33 et 34.)

L'on obtient ainsi les p relations

$$(28) \qquad \mathfrak{B}'_k(1-m_k) - \mathfrak{A}'_k(1-n_k) - m_k n_k \mathfrak{C}'_k + n_k \mathfrak{C}'_{k+1} = 0$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

et où l'on convient de remplacer $\mathfrak{C}'_1$ et $\mathfrak{C}'_{p+1}$ par zéro.

De ces relations l'on déduit par l'élimination de $\mathfrak{C}'_2, \mathfrak{C}'_3, \ldots, \mathfrak{C}'_p$ l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathfrak{B}'_k(1-m_k) - \mathfrak{A}'_k(1-n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0.$$

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses.

Soit, comme plus haut, $\Omega(z)$, une intégrale de première espèce aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, admettant les modules de périodicité A'_k, B'_k, C'_k.

L'intégrale

$$I' = \int_{R_{abc}} \Omega(z) dt(z, z_0)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface de Riemann R_{abc} est égale à

$$-2\pi i \Omega'(z_0),$$

en désignant par $\Omega'(z)$ la dérivée de $\Omega(z)$ par rapport à z. En effet, sur la surface R_{abc} la fonction

$$\Omega(z)\frac{dt(z, z_0)}{dz}$$

est uniforme et régulière: elle admet le pôle z_0 et, dans le voisinage de ce point, on a

$$\Omega(z) = \Omega(z_0) + (z - z_0)\Omega'(z_0) + \dots,$$

$$\frac{dt(z, z_0)}{dz} = -\frac{1}{(z - z_0)^2} + a + b(z - z_0) + \dots;$$

donc, dans le produit $\Omega(z)\frac{dt(z, z_0)}{dz}$, le résidu relatif au pôle z_0 est

$$-\Omega'(z_0).$$

Ce produit a d'autres pôles aux points de ramification mais leurs résidus sont tous nuls; de plus il est à l'infini infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. Donc l'intégrale I' prise dans le sens positif sur le contour de la surface R_{abc} est égale à la valeur de cette même intégrale prise dans le même sens sur une petite circonférence entourant le point z_0, c'est à dire à

$$-2\pi i\Omega'(z_0),$$

comme nous l'avions annoncé.

D'autre part l'intégrale I' se transformera exactement comme l'intégrale I que nous avons traitée aux pages 36 et suivantes; et l'on trouvera que cette intégrale est égale à

$$\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}'_k + \mathfrak{C}'_{k+1}) - m'_kB'_k\mathfrak{A}'_k - n'_kC'_k(m'_k\mathfrak{A}'_k + \mathfrak{B}'_k) + n'_kC'_{k+1}\mathfrak{B}'_k].$$

On a donc la relation

$$(29)\qquad \begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}'_k + \mathfrak{C}'_{k+1}) - m'_kB'_k\mathfrak{A}'_k - n'_kC'_k(m'_k\mathfrak{A}'_k + \mathfrak{B}'_k) + n'_kC'_{k+1}\mathfrak{B}'_k]\\ = -2\pi i\Omega'(z_0)\end{aligned}$$

avec la convention

$$C'_1 = C'_{p+1} = \mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}'_{p+1} = 0.$$

Cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle $E(z)$.

Dans ce cas l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ avec un seul pôle simple z_0 n'existe plus. Il faut la remplacer par l'intégrale appelée $t(z, z_0, z_1)$ définie par l'équation (page 63)

$$t(z, z_0, z_1) = P_1E(z_0)\tau(z, z_0) - P_0E(z_1)\tau(z, z_1) + P_0P_1\varpi(z, z_0, z_1),$$

ou encore, d'après les expressions des intégrales

$$\tau(z, z_0)\ ,\ \tau(z, z_1)\ ,\ \varpi(z, z_0, z_1),$$

$$t(z, z_0, z_1) = P_1\int E(z)dt_{z_0}(z) - P_0\int E(z)dt_{z_1}(z) + P_0P_1\int E(z)d\varpi_{z_0z_1}(z).$$

Les constantes P_0 et P_1 ont les valeurs

$$P_0 = 2[\lambda_1w'_1(z_0) + \lambda_2w'_2(z_0) + \ldots + \lambda_pw'_p(z_0)],$$

$$P_1 = 2[\lambda_1w'_1(z_1) + \lambda_2w'_2(z_1) + \ldots + \lambda_pw'_p(z_1)].$$

Cette intégrale de seconde espèce est, comme toute intégrale de seconde espèce, uniforme et régulière sur la surface R_{abc} de Riemann; elle admet les deux pôles simples z_0 et z_1 avec les résidus respectifs

$$P_1 E(z_0)\,, \;-P_0 E(z_1).$$

Appelons encore $\mathfrak{A}'_k, \mathfrak{B}'_k, \mathfrak{C}'_h$ les modules de périodicité de cette intégrale $t(z, z_0, z_1)$ le long des coupures a_k, b_k, c_h $\left(\begin{smallmatrix} k=1,2,\ldots,p \\ h=2,3,\ldots,p \end{smallmatrix}\right)$. Ces modules sont liés entre eux par les p relations

$$\mathfrak{B}'_k(1-m_k)-\mathfrak{A}'_k(1-n_k)-m_k n_k\mathfrak{C}'_k+n_k\mathfrak{C}'_{k+1}=0$$

où

$$k=1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p,$$

et

$$\mathfrak{C}'_1=\mathfrak{C}'_{p+1}=0.$$

Enfin, ces modules de périodicité $\mathfrak{A}'_k, \mathfrak{B}'_k, \mathfrak{C}'_h$ sont liés aux modules de périodicité A'_k, B'_k, C'_h d'une intégrale de première espèce $\Omega(z)$, aux multiplicateurs inverses, par la relation

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}'_k+\mathfrak{C}'_{k+1})-m'_kB'_k\mathfrak{A}'_k-n'_kC'_k(m'_k\mathfrak{A}'_k+\mathfrak{B}'_k)+n'_kC'_{k+1}\mathfrak{B}'_k]\\ =2\pi i[P_0E(z_1)\Omega'(z_1)-P_1E(z_0)\Omega'(z_0)],\end{aligned}$$

que l'on obtient par la considération de l'intégrale

$$\int_{R_{abc}}\Omega(z)\,dt(z, z_0, z_1)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface R_{abc} de Riemann.

Formule de décomposition d'une fonction à multiplicateurs en éléments simples.

De même que, par la formule de Riemann-Roch (Journal de Crelle, t. 84, pag. 294, et C. Neumann loc. cit. page 258), toute fonction rationnelle de s et z, c'est à dire toute fonction régulière sur la surface R de Riemann, peut s'écrire sous la forme d'une somme d'intégrales abéliennes de seconde espèce, de façon que les pôles et les parties principales correspondantes se trouvent en évidence; de même toute fonction à multiplicateurs peut s'écrire sous la forme d'une somme d'intégrales de fonctions à multiplicateurs de première et seconde espèce, de façon à mettre en évidence les pôles et les parties principales correspondantes. Cette formule que nous allons établir remplace avantageusement la formule donnée par M. APPELL (Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par M. RESAL, t. 9 (1883), page 11). La formule de M. APPELL présente cet inconvénient que l'élément simple devient infini en $(p - 1)$ points étrangers à la question, tandis que notre élément ne devient infini qu'en un point.

Soit $\Phi(z)$ une fonction admettant les multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *non spéciaux* c'est à dire ne pouvant pas être identifiés avec ceux d'une exponentielle $E(z)$; cette fonction est régulière sur la surface R_{ab} de Riemann et admet sur cette surface un certain nombre q de pôles

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

que nous supposons d'abord *simples* et *distincts des points de ramification:* soient

$$R_1, R_2, \ldots, R_q$$

les résidus relatifs à ces pôles. Considérons la différence

$$\Delta = \Phi(z) - R_1 t(z, z_1) - R_2 t(z, z_2) - \ldots - R_q t(z, z_q),$$

où $t(z, z_\nu)$ désigne, comme plus haut, l'intégrale de seconde espèce, d'une fonction aux multiplicateurs donnés, qui devient infinie au seul point z_ν et cela comme $\frac{1}{z - z_\nu}$. Cette différence Δ est uniforme sur la surface R_{abc} de Riemann, car chacun de ses termes l'est; elle demeure sur cette surface partout finie, car dans le voisinage du point $z = z_1$ par exemple on a par hypothèse

$$\Phi(z) = \frac{R_1}{z - z_1} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_1) + \ldots$$

et

$$R_1 t(z, z_1) = \frac{R_1}{z - z_1} + \beta_0 + \beta_1(z - z_1) + \ldots,$$

ce qui montre que la différence Δ reste finie pour $z = z_1$; enfin la dérivée de Δ par rapport à z est régulière sur R_{ab} et admet les multiplicateurs m_k et n_k, puisqu'il en est ainsi de la dérivée de chacun des termes de Δ. Cette différence Δ est donc l'intégrale d'une fonction à multiplicateurs et, comme elle est *partout finie*, c'est une intégrale de *première espèce:* elle peut, par conséquent, se mettre sous la forme

$$\mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \dots + \mu_{p-1}\omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ étant des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \dots, \omega_{p-1}(z)$ les $(p-1)$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes. En égalant Δ à cette dernière expression, on obtient la formule cherchée

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= R_1 t(z, z_1) + R_2 t(z, z_2) + \dots + R_q t(z, z_q) \\ &+ \mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \dots + \mu_{p-1}\omega_{p-1}(z) + C^{te}, \end{aligned} \tag{30}$$

entièrement analogue à la formule de RIEMANN-ROCH. (Voyez C. NEUMANN, loc. cit. page 258.)

Pour établir cette formule, nous avons supposé les pôles $z_1, z_2, \dots, z_q$ du premier ordre: si l'un de ces pôles, par exemple z_1, était d'ordre n, il faudrait remplacer l'élément

$$R_1 t(z, z_1)$$

par une expression de la forme

$$R_1(z, z_1) + R_1'\frac{\partial t(z, z_1)}{\partial z_1} + R_1''\frac{\partial^2 t(z, z_1)}{\partial z_1^2} + \dots + R_1^{(n-1)}\frac{\partial^{n-1} t(z, z_1)}{\partial z_1^{n-1}},$$

comme il arrive dans toutes les formules de ce genre. Nous avons aussi supposé les points $z_1, z_2, \dots, z_q$ distincts des points de ramification. Il serait trop long d'indiquer les modifications bien simples que devrait subir la formule, si certains des pôles $z_1, z_2, \dots, z_q$ coïncidaient avec des points de ramification; ces modifications sont identiques à celles qui se présentent dans des conditions analogues pour les fonctions algébriques et les intégrales abéliennes de seconde espèce. (Voyez une Note de M. GOURSAT *Sur la théorie des intégrales abéliennes*, Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, t. 97, page 1281.)

On peut, comme vérification, déduire de cette formule de décomposition, les $(p-1)$ relations qui lient les résidus $R_1, R_2, \ldots, R_q$ et les pôles correspondants $z_1, z_2, \ldots, z_q$, relations que nous avons établies directement (page 28). Pour cela, désignons par

$$\begin{array}{r}\mathfrak{A}'_{1r}, \mathfrak{A}'_{2r}, \ldots\ldots, \mathfrak{A}'_{pr},\\ \mathfrak{B}'_{1r}, \mathfrak{B}'_{2r}, \ldots\ldots, \mathfrak{B}'_{pr},\\ \mathfrak{C}'_{2r}, \mathfrak{C}'_{3r}, \ldots, \mathfrak{C}'_{pr},\end{array}$$

les modules de périodicité de l'intégrale $t(z, z_r)$,

$$r = 1, 2, \ldots, q;$$

et par

$$\begin{array}{r}A_{1j}, A_{2j}, \ldots\ldots, A_{pj},\\ B_{1j}, B_{2j}, \ldots\ldots, B_{pj},\\ C_{2j}, C_{3j}, \ldots, C_{pj},\end{array}$$

les modules de périodicité de l'intégrale de première espèce $\omega_j(z)$,

$$j = 1, 2, \ldots, (p-1).$$

Comme les modules de périodicité de la fonction $\Phi(z)$ sont *nuls*, puisque $\Phi(z)$ est une fonction à multiplicateurs, la formule de décomposition établie précédemment (page 70) donnera immédiatement les $(3p-1)$ relations

$$(31)\left\{\begin{array}{l} R_1\mathfrak{A}'_{k1} + R_2\mathfrak{A}'_{k2} + \ldots + R_q\mathfrak{A}'_{kq} + \mu_1 A_{k1} + \mu_2 A_{k2} + \ldots + \mu_{p-1} A_{k,p-1} = 0,\\ R_1\mathfrak{B}'_{k1} + R_2\mathfrak{B}'_{k2} + \ldots + R_q\mathfrak{B}'_{kq} + \mu_1 B_{k1} + \mu_2 B_{k2} + \ldots + \mu_{p-1} B_{k,p-1} = 0,\\ R_1\mathfrak{C}'_{h1} + R_2\mathfrak{C}'_{h2} + \ldots + R_q\mathfrak{C}'_{hq} + \mu_1 C_{h1} + \mu_2 C_{h2} + \ldots + \mu_{p-1} C_{h,p-1} = 0,\end{array}\right.$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p, \qquad h = 2, 3, \ldots, p.$$

Soit, comme dans tout le cours de ce travail, $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, et soient

$$A'_k, B'_k, C'_h \qquad \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale. La relation qui lie les modules de périodicité des deux intégrales de première espèce

$$\omega_j(z)\,,\ \Omega(z)$$

aux multiplicateurs inverses est, comme nous l'avons vu (page 40)

$$\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k B_{kj} + C_{k+1,j}) - m'_k B'_k A_{kj} - n'_k C'_k(m'_k A_{kj} + B_{kj}) + n'_k C'_{k+1} B_{kj}] = 0,$$

ou, en ordonnant cette relation par rapport à A_{kj}, B_{kj}, $C_{k+1,j}$ et changeant les signes

$$(32)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}[A_{kj}(m'_k B'_k + m'_k n'_k C'_k)$$
$$+ B_{kj}(n'_k C'_k - n'_k A'_k - n'_k C'_{k+1}) - C_{k+1,j} A'_k] = 0,$$

où

$$C_{1,j} = C_{p+1,j} = C'_1 = C'_{p+1} = 0.$$

En faisant successivement

$$j = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ (p-1)$$

on obtiendra $(p-1)$ relations de cette forme. De même la relation qui lie les modules de pérodicité de l'intégrale de deuxième espèce $t(z\,,\,z_r)$ et de l'intégrale de première espèce $\Omega(z)$ aux multiplicateurs inverses (page 67) peut s'écrire, si on l'ordonne par rapport aux modules de périodicité de $t(z\,,\,z_r)$ et si on change les signes

$$(33)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}[\mathfrak{A}'_{kr}(m'_k B'_k + m'_k n'_k C'_k) + \mathfrak{B}'_{kr}(n'_k C'_k - n'_k A'_k - n'_k C'_{k+1}) - \mathfrak{C}'_{k+1,r} A'_k]$$
$$= 2\pi i \Omega'(z_r)$$

où

$$\mathfrak{C}'_{1,r} = \mathfrak{C}'_{p+1,r} = C'_1 = C'_{p+1} = 0.$$

En faisant successivement

$$r = 1\,,\ 2\,,\ \ldots\,,\ q,$$

on obtiendra q relations de cette forme. Cela posé, multiplions cette dernière relation (33) par R_r et la relation précédente (32) par μ_j et faisons la somme des $q + p - 1$ relations ainsi obtenues

$$(r = 1, 2, \ldots, q; j = 1, 2, \ldots, p - 1).$$

Dans cette somme, le premier membre est nul, en vertu des relations qui expriment que les modules de périodicité de $\Phi(z)$ sont nuls (eq. 31, page 71), et il reste

$$R_1 \Omega'(z_1) + R_2 \Omega'(z_2) + \ldots + R_q \Omega'(z_q) = 0,$$

ce qui est la relation établie directement (page 28) entre les pôles et les résidus d'une fonction à multiplicateurs. Cette relation, comme nous l'avons vu, se décompose en $(p - 1)$ relations distinctes.

Cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas, la formule de décomposition que nous avons établie ci-dessus n'est plus applicable, car l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ avec un seul infini simple n'existe plus. On pourrait alors établir une autre formule de décomposition en éléments simples, en prenant pour élément l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0, z_1)$ avec deux infinis simples qui devient infinie en ces deux points comme

$$\frac{P_1 E(z_0)}{z - z_0} - \frac{P_0 E(z_1)}{z - z_1}.$$ [1]

On aurait ainsi la formule

$$\Phi(z) = \sum_{r=1}^{r=q-1} \frac{R_r}{P_q E(z_r)} t(z, z_r, z_q) + \mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_p \omega_p(z) + C^{te},$$

P_q désignant la constante $2[\lambda_1 w_1'(z_q) + \lambda_2 w_2'(z_q) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_q)]$, $\omega_1(z)$, $\omega_2(z), \ldots, \omega_p(z)$ les intégrales de première espèce qui sont actuellement au nombre de p.

---

[1] Voir page 63.

Mais il est bien plus simple de remarquer qu'une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k est de la forme

$$\Phi(z) = E(z)R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction rationnelle de s et z, et d'appliquer ensuite à cette fonction rationnelle $R(s, z)$ la formule de RIEMANN-ROCH, comme le fait M. APPELL. (Journal de mathématiques, publié par M. RESAL, année 1883, page 13, N° 7.)

Expression la plus générale d'une intégrale de fonctions à multiplicateurs.

On démontre sans peine, comme on le fait pour les intégrales abéliennes, que toute intégrale de fonction à multiplicateurs est une somme d'intégrales de première espèce, d'intégrales de troisième espèce, d'intégrales de seconde espèce et de dérivées de ces dernières par rapport au paramètre. C'est ce qui résulte de ce fait, qu'en retranchant, d'une intégrale de fonction à multiplicateurs, des intégrales convenables de troisième espèce et de seconde espèce et des dérivées de ces dernières par rapport au paramètre, on amènera la différence à rester *partout finie.*

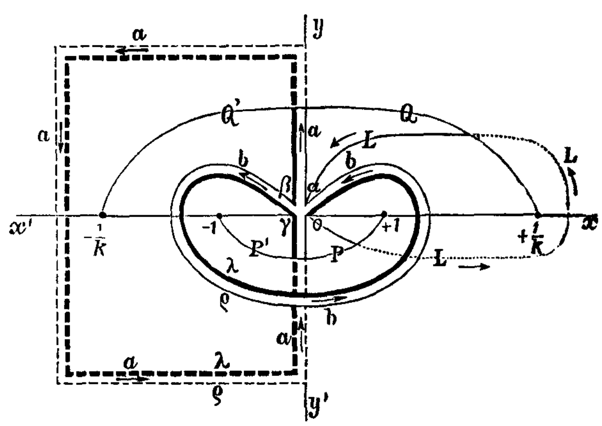
Troisième partie.

Développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.

Pour montrer, par un exemple simple, comment les intégrales de fonctions à multiplicateurs s'introduisent dans le problème du développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques, nous traiterons d'abord un exemple relatif aux fonctions elliptiques qui fera bien saisir l'esprit de la méthode.

Considérons le relation algébrique

$$s^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$$



où nous supposons *k réel et plus petit que l'unité.* La surface de Riemann correspondante possède deux feuillets et quatre points de ramification $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$ situés sur l'axe des quantités réelles Ox. On passe d'un des feuillets à l'autre en traversant l'une ou l'autre des lignes de passage (*Übergangslinien*)

$$+1,\ P,\ P',\ -1;\quad +\frac{1}{k},\ Q,\ Q',\ -\frac{1}{k}.$$

On transformera cette surface de Riemann en une surface R_{ab} simplement connexe à l'aide des coupures a et b, comme le montre la figure. Le point de croisement des deux coupures est à l'origine O qui appartient au bord droit de la coupure a et au bord gauche de la coupure b. Enfin nous supposerons que, dans le feuillet supérieur, la valeur de s est positive pour $z=0$.

L'intégrale elliptique de première espèce

$$w(z)=\int_0^z\frac{dz}{s}=\int_0^z\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

est uniforme sur la surface de Riemann R_{ab} figurée à la page précédente.

Le long de la coupure a, on a

$$w(\lambda)-w(\rho)=4K$$

et le long de la coupure b

$$w(\lambda)-w(\rho)=2iK',$$

K et K' ayant la signification que leur donne Jacobi et les lettres λ,ρ désignant comme toujours deux points situés en face l'un de l'autre sur les deux bords d'une coupure, λ sur le bord gauche et ρ sur le bord droit. En effet, si l'on désigne par $0,\alpha,\beta,\gamma$ les sommets des quatre angles formés par les bords des coupures a et b en leur point de croisement, la valeur constante de la différence $w(\lambda)-w(\rho)$ le long de la coupure a est égale en particulier à $w(\gamma)-w(0)$, c'est à dire à l'intégrale $w(z)$ prise le long du bord gauche de la coupure b depuis le point 0 jusqu'au point γ, ce qui donne bien $4K$; de même la valeur constante de $w(\lambda)-w(\rho)$ le long de la coupure b est égale en particulier à

$$w(0)-w(\alpha)=-[w(\alpha)-w(0)]$$

et la quantité entre crochets est l'intégrale prise de O en α sur le contour L qui contourne les deux points $+1$ et $+\frac{1}{k}$ dans le sens positif, intégrale égale à $-2iK'$.

En vue de ce qui suit, calculons les valeurs de l'intégrale $w(z)$ aux points à l'infini dans les deux feuillets que nous désignerons par j_0 et j_1, le point j_0 étant à l'infini dans le feuillet supérieur et j_1 dans le feuillet inférieur. Pour cela remarquons que le long de l'axe Ox des quantités réelles on a, pour s, la suite des valeurs suivantes:

feuillet supérieur:

$$\text{entre } 0 \text{ et } +1, \quad s > 0,$$

$$\text{entre } 1 \text{ et } +\frac{1}{k}, \quad \frac{s}{i} < 0,$$

$$\text{entre } \frac{1}{k} \text{ et } +\infty, \quad s > 0;$$

feuillet inférieur:

$$\text{entre } 0 \text{ et } +1, \quad s < 0,$$

$$\text{entre } 1 \text{ et } +\frac{1}{k}, \quad \frac{s}{i} > 0,$$

$$\text{entre } \frac{1}{k} \text{ et } +\infty, \quad s < 0.$$

Les raisonnements qui conduisent à ces signes sont bien connus: ils sont détaillés plus loin à l'occasion d'une question analogue, à la page 88.

D'après cela l'on a pour l'intégrale $w(z)$ les valeurs suivantes aux points $+1$ et $+\frac{1}{k}$:

$$w(1) = K, \qquad w\left(\frac{1}{k}\right) = K - iK',$$

car, pour aller le long de l'axe des x de l'origine au point $\frac{1}{k}$, il faut à partir du point $+1$ suivre l'axe dans le feuillet inférieur de façon à passer sous la coupure b. Si maintenant à partir du point $+\frac{1}{k}$ on s'éloigne à l'infini le long de l'axe Ox, on aura si l'on s'éloigne dans le feuillet supérieur

$$w(j_0) = w\left(\frac{1}{k}\right) + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{s},$$

s étant pris *positivement*, et si on s'éloigne dans le feuillet inférieur

$$w(j_1) = w\left(\frac{1}{k}\right) + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{s},$$

s étant *négatif*. Or on a

$$\int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dz}{+\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K;$$

les formules précédentes donneront donc

$$w(j_0) = 2K - iK', \qquad w(j_1) = -iK'.$$

Ces préliminaires étant posés, faisons

$$u = w(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

d'où par l'inversion

$$z = \operatorname{sn} u,$$

la fonction $\operatorname{sn} u$ admettant les deux périodes $4K$ et $2iK'$. Lorsque u varie par valeurs réelles de 0 à $4K$, la variable z décrit sur la surface R_{ab} de Riemann un chemin C composé de la portion $0, +1$ de l'axe des quantités réelles Ox dans le feuillet supérieur, de la portion $+1, -1$ de ce même axe dans le feuillet inférieur, enfin de la portion $-1, 0$ de ce même axe dans le feuillet supérieur. La fonction périodique $\operatorname{sn} u$ est donc pour ces valeurs de u développable en une série de Fourier de la forme

$$z = \operatorname{sn} u = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} p_\nu e^{\frac{\nu \pi u i}{2K}}$$

avec

$$p_\nu = \frac{1}{4K}\int_0^{4K} z e^{-\frac{\nu\pi u i}{2K}} du,$$

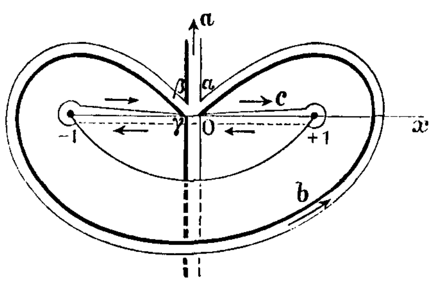
l'intégration étant faite par un chemin réel ou un chemin infiniment voisin. Pour évaluer cette intégrale définie, faisons-y le changement de variable

$$u = w(z), \qquad du = \frac{dz}{s};$$

nous aurons

$$(34) \qquad p_\nu = \frac{1}{4K}\int_C \frac{z\,dz}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)},$$

l'indice C rappelant que la variable z doit parcourir, sur la surface de Riemann R_{ab}, le chemin appelé C et défini à la page précédente, ou un chemin infiniment voisin comme celui que nous figurons ici et qui va, du point O au point γ, après avoir contourné les deux points $+1$, -1 en s'écartant infiniment peu de l'axe Ox.



Dans l'intégrale (34) qui donne p_ν, la fonction sous le signe d'intégration

$$\Phi(z) = \frac{z}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)}$$

est une *fonction à multiplicateurs,* régulière sur la surface de Riemann R_{ab}. Comme l'intégrale $w(z)$ admet le long des coupures a et b les modules de périodicité $4K$ et $2iK'$, la fonction $\Phi(z)$ admet le long de ces mêmes coupures les multiplicateurs

$$m_1 = 1, \qquad n_1 = q^{-\nu},$$

c'est à dire que cette fonction vérifie les relations:

$$\text{le long de la coupure } a, \quad \Phi(\lambda) = \Phi(\rho),$$

$$\text{le long de la coupure } b, \quad \Phi(\lambda) = q^{-\nu}\Phi(\rho),$$

en faisant, comme il est d'usage,

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}.$$

Cette fonction à multiplicateurs $\Phi(z)$ rentre dans le cas spécial examiné à la page 14, car ses multiplicateurs sont ceux de l'exponentielle

$$e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)}.$$

L'intégrale

$$\varpi(z) = \int_0^z \frac{z\,dz}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)} = \int_0^z \Phi(z)\,dz$$

est donc une intégrale de fonction à multiplicateurs. C'est une intégrale de troisième espèce admettant pour points critiques logarithmiques les deux points j_0 et j_1 situés à l'infini dans les deux feuillets. En effet, dans le voisinage du point j_0, c'est à dire pour des valeurs de z appartenant au feuillet supérieur et dont le module surpasse un nombre suffisamment grand, on a

$$\frac{z}{s} = \frac{1}{kz} + \frac{\alpha_1}{z^2} + \frac{\alpha_2}{z^3} + \dots,$$

$$e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)} = e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(j_0)} + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \dots.$$

Comme

$$w(j_0) = 2K - iK',$$

ainsi que nous l'avons montré, on a, en multipliant les développements ci-dessus,

$$\Phi(z) = \frac{z}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)} = \frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\delta_1}{z^2} + \frac{\delta_2}{z^3} + \dots.$$

Donc l'intégrale

$$\varpi(z) = \int_0^z \Phi(z)\,dz$$

devient au point j_0 infinie comme

$$\frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{k} \log z.$$

On verra de même que, dans le voisinage du point j_1, on a

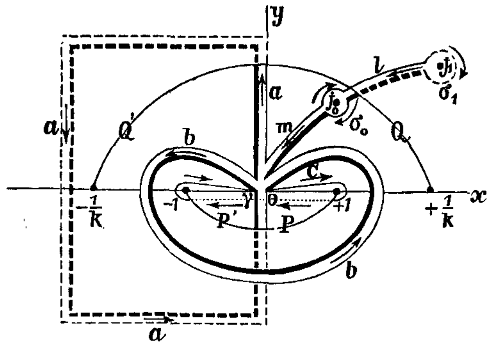
$$\Phi(z) = -\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\varepsilon_1}{z^2} + \frac{\varepsilon_2}{z^3} + \ldots,$$

et que l'intégrale $\varpi(z)$ devient au point j_1 infinie comme

$$\frac{-q^{\frac{\nu}{2}}}{k} \log z.$$

Nous pourrons appliquer à cette intégrale $\varpi(z)$ ce que nous avons dit aux pages 53 et suivantes: il suffira de supposer les points critiques logarithmiques z_0 et z_1 placés à l'infini aux points j_0 et j_1.

L'intégrale $\varpi(z)$ n'est pas uniforme sur la surface de Riemann R_{ab}:



elle est uniforme sur la surface R_{ablm} que l'on obtient en entourant les deux points j_0 et j_1 d'un lacet $l + m$, commençant et finissant au point de croisement des coupures a et b. Ce lacet est représenté dans la figure *schématique* ci-dessus où les points à l'infini j_0 et j_1 sont représentés comme s'ils étaient à distance finie, l'un j_0 dans le feuillet supérieur, l'autre j_1 dans le feuillet inférieur. Appelons

$$\mathfrak{A}\,,\ \mathfrak{B}\,,\ \mathfrak{L}\,,\ \mathfrak{M}$$

les modules de périodicité de l'intégrale

$$\varpi(z) = \int_0^z \frac{z\,dz}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(z)},$$

c'est à dire, supposons que l'on aît

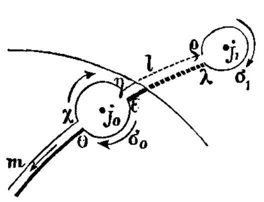
$$\begin{aligned}
&\text{le long de la coupure } a: && \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{A},\\
&\text{le long de la coupure } b: && \varpi(\lambda) - q^{-\nu}\varpi(\rho) = \mathfrak{B},\\
&\text{le long de la coupure } l: && \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{L},\\
&\text{le long de la coupure } m: && \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{M},
\end{aligned}$$

car les multiplicateurs sont 1 et $q^{-\nu}$. La formule qui donne p_ν (page 79) est

$$p_\nu = \frac{1}{4K}\int_C \frac{z\,dz}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(z)},$$

l'intégrale étant prise le long du contour C qui va du point O au point γ après avoir entouré les deux points $+1$ et -1 en s'écartant infiniment peu de l'axe Ox; on a donc

$$p_\nu = \frac{1}{4K}[\varpi(\gamma) - \varpi(0)] = \frac{\mathfrak{A}}{4K}. \tag{35}$$



Ainsi le calcul de p_ν se ramène au calcul du module de périodicité $\mathfrak{A}$. Or ce module est facile à calculer par les relations générales que nous avons établies et que nous allons reprendre pour le cas particulier actuel. Figurons les coupures l et m raccordées par deux circonférences infiniment petites σ_0 et σ_1 entourant les points j_0 et j_1. On a, pour le module de périodicité le long de l:

$$\mathfrak{L} = \varpi(\lambda) - \varpi(\rho).$$

Ce module $\mathfrak{L}$ est donc l'intégrale $\varpi(z)$ prise sur la circonférence σ_1 dans le sens de la flèche: or, dans le voisinage du point j_1, on a (page 81)

$$\Phi(z) = -\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\varepsilon_1}{z^2} + \frac{\varepsilon_2}{z^3} + \dots,$$

donc l'intégrale

$$\varpi(z) = \int \Phi(z)dz$$

prise sur la petite circonférence σ_1 dans le sens de la flèche est

$$-\frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

On trouve ainsi

$$\mathfrak{L} = -\frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

La figure donne aussi

$$\mathfrak{M} = \varpi(\theta) - \varpi(\chi), \qquad \mathfrak{L} = \varpi(\varepsilon) - \varpi(\eta),$$

d'où en retranchant

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = \varpi(\theta) - \varpi(\varepsilon) + [\varpi(\eta) - \varpi(\chi)],$$

ce qui montre que $\mathfrak{M} - \mathfrak{L}$ est l'intégrale $\varpi(z)$ prise dans le sens de la flèche sur la circonférence σ_0 entourant le point j_0. Comme, dans le voisinage de j_0, on a (page 80)

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\delta_1}{z^2} + \frac{\delta_2}{z^3} + \dots,$$

l'intégrale

$$\varpi(z) = \int \Phi(z)dz$$

prise sur la circonférence σ_0 dans le sens de la flèche est

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = (-1)^\nu \frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

On aura donc, d'après la valeur que nous venons de trouver pour $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{M} = \frac{2\pi i}{k} [(-1)^\nu - 1] q^{\frac{\nu}{2}}.$$

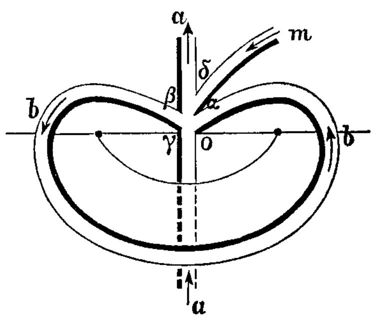
Il va de soi que, comme les points j_0 et j_1 sont à l'infini, la petite circonférence σ_1 entourant le point j_1 est en réalité une circonférence très grande de centre O située dans le feuillet inférieur et parcourue de ρ jusqu'en λ dans le sens positif autour de O; il en est de même pour σ_0.

Le point de croisement des coupures a, b, m donne la relation

$$\mathcal{B}(1 - m_1) - \mathcal{A}(1 - n_1) - m_1 n_1 \mathcal{M} = 0$$

où

$$m_1 = 1, \qquad n_1 = q^{-\nu}.$$



C'est ce qui résulte de la relation générale de la page 56; en voici d'ailleurs la démonstration. On a, d'après la définition même des modules de périodicité, les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\varpi(\gamma) &= \varpi(0) + \mathcal{A}, \\
\varpi(\gamma) &= q^{-\nu}\varpi(\beta) + \mathcal{B}, \\
\varpi(\beta) &= \varpi(\delta) + \mathcal{A}, \\
\varpi(\alpha) &= \varpi(\delta) + \mathcal{M}, \\
\varpi(0) &= q^{-\nu}\varpi(\alpha) + \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

Multipliant ces relations respectivement par $+1$, -1, $-q^{-\nu}$, $q^{-\nu}$, $+1$ et ajoutant, on a la relation cherchée

$$\mathcal{A}(1 - q^{-\nu}) + \mathcal{M}q^{-\nu} = 0,$$

d'où

$$\mathcal{A} = -\frac{q^{-\nu}}{1 - q^{-\nu}}\mathcal{M},$$

c'est à dire, d'après la valeur trouvée pour $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{A} = \frac{2\pi i}{k} \frac{q^{-\frac{\nu}{2}}}{1 - q^{-\nu}} [1 - (-1)^\nu].$$

Enfin comme le coefficient p_ν est égal à

$$\frac{\mathfrak{A}}{4K},$$

on a

$$p_\nu = \frac{\pi i}{2Kk} \cdot \frac{1 - (-1)^\nu}{q^{\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}}.$$

Ce coefficient est *nul* quand ν est *pair*, et quand ν est impair,

$$\nu = 2n + 1,$$

il a pour valeur

$$p_\nu = \frac{\pi i}{Kk} \frac{1}{q^{+\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}}.$$

On a donc pour le développement cherché

$$z = \operatorname{sn} u = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} p_\nu e^{\frac{\nu\pi u i}{2K}} = \frac{\pi i}{Kk} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{e^{\frac{\nu\pi u i}{2K}}}{q^{+\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}},$$

ν ne prenant que des valeurs impaires $2n + 1$. En réunissant les termes qui correspondent à des valeurs de ν égales et de signes contraires, on obtient enfin

$$z = \frac{2\pi\sqrt{q}}{Kk} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} \sin \frac{(2n+1)\pi u}{2K},$$

ce qui est le développement bien connu que JACOBI a donné pour $\sin \operatorname{am} u$. Il nous paraît remarquable que l'on puisse ainsi obtenir ce développement sans se servir des fonctions θ ni de la théorie des fonctions elliptiques.

La méthode que nous venons de suivre donnerait, de même, les développements en séries trigonométriques de toute fonction de u exprimée par une fonction rationnelle $R(s, z)$ de s et z, c'est à dire de toute fonction elliptique. Le calcul des coefficients se ramènera au calcul des modules de périodicité des intégrales de fonctions à multiplicateurs de la forme spéciale

$$\int R(s, z)dz \, . \, e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)}.$$

Ces modules se calculeront par les méthodes générales que nous avons données dans la deuxième partie.

Plus généralement on pourrait, en suivant la même voie, calculer les coefficients du développement en série trigonométrique d'une fonction doublement périodique de *seconde espèce* admettant la période $4K$ et se reproduisant, multipliée par un facteur constant arbitraire, quand la variable u augmente de $2iK'$.

Mais nous laissons de côté ce cas particulier, où $p = 1$, qui ne pourrait nous donner que des développements plus faciles à obtenir par d'autres méthodes, et nous entrons dans un ordre de recherches entièrement nouveau, en abordant les problèmes analogues pour les *intégrales ultraelliptiques* ($p = 2$) et les fonctions abéliennes de deux variables qui naissent de leur inversion.

Intégrales ultraelliptiques et fonctions abéliennes de genre 2.

Employons les notations de ROSENHAIN dans son *Mémoire couronné* (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de Paris, Tome 11, 1851, page 361), et considérons l'équation algébrique

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2 z)(1 - \lambda^2 z)(1 - \mu^2 z)$$

ou en abrégeant

$$s^2 = (zk\lambda\mu).$$

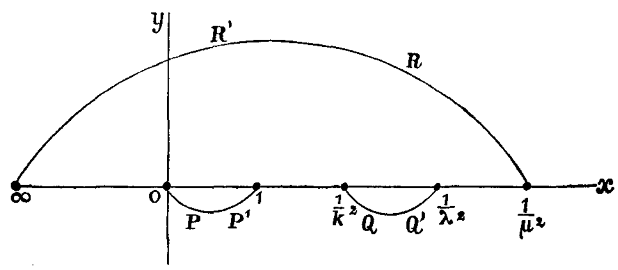
La surface de Riemann correspondante possède deux feuillets et six points de ramification

$$0, \; 1, \; \frac{1}{k^2}, \; \frac{1}{\lambda^2}, \; \frac{1}{\mu^2}, \; \infty.$$

Figurons ces points en supposant les quantités k, λ, μ réelles positives et

$$1 > k > \lambda > \mu;$$

de plus figurons le point à l'infini comme s'il était à distance finie sur la partie négative de l'axe des quantités réelles. Il y aura trois lignes



de passage d'un feuillet à l'autre (*Übergangslinien* d'après C. NEUMANN), à savoir les lignes

$$oPP'\mathrm{I}\ ,\ \frac{\mathrm{I}}{k^2}QQ'\frac{\mathrm{I}}{\lambda^2}\ ,\ \frac{\mathrm{I}}{\mu^2}RR'\infty.$$

Nous conviendrons de prendre la *valeur positive* de

$$s = \sqrt{(zk\lambda\mu)}$$

en tous les points du *feuillet supérieur situés sur l'axe des quantités réelles* Ox *entre* o *et* I. Alors les valeurs de s aux différents points de l'axe Ox des quantités réelles sont de la forme suivante:

$$\text{Feuillet supérieur. } z \text{ réel.}\ \begin{cases} o < z < \mathrm{I} & \ldots\ s > o, \\ \mathrm{I} < z < \frac{\mathrm{I}}{k^2} & \ldots\ \frac{s}{i} < o, \\ \frac{\mathrm{I}}{k^2} < z < \frac{\mathrm{I}}{\lambda^2} & \ldots\ s < o, \\ \frac{\mathrm{I}}{\lambda^2} < z < \frac{\mathrm{I}}{\mu^2} & \ldots\ \frac{s}{i} > o, \\ \frac{\mathrm{I}}{\mu^2} < z < +\infty & \ldots\ s < o, \\ -\infty < z < o & \ldots\ \frac{s}{i} > o. \end{cases}$$

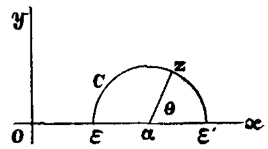
Feuillet inférieur. z réel.

$$\left\{\begin{array}{ll} 0 < z < 1 & \ldots s < 0, \\ 1 < z < \frac{1}{k^2} & \ldots \frac{s}{i} > 0, \\ \frac{1}{k^2} < z < \frac{1}{\lambda^2} & \ldots s > 0, \\ \frac{1}{\lambda^2} < z < \frac{1}{\mu^2} & \ldots \frac{s}{i} < 0, \\ \frac{1}{\mu^2} < z < +\infty & \ldots s > 0, \\ -\infty < z < 0 & \ldots \frac{s}{i} < 0. \end{array}\right.$$

Les valeurs de ce tableau résultent de la proposition élémentaire suivante. Soit un point α sur Ox et σ une détermination du radical $\sqrt{z-\alpha}$ en un point ε infiniment voisin de α situé à gauche de α; si la variable z décrit autour de α comme centre, avec $\alpha\varepsilon$ comme rayon, un demi-cercle situé au dessus de Ox, $\varepsilon C\varepsilon'$, la valeur σ' du radical $\sqrt{z-\alpha}$ au point ε' sera

$$\sigma' = -i\sigma.$$

En effet sur le cercle on a



$$z - \alpha = re^{\theta i},$$

$$\sqrt{z-\alpha} = \sqrt{r}e^{\frac{\theta i}{2}}.$$

Supposons qu'au point ε on prenne $\theta = \pi$, alors

$$\sigma = \sqrt{r}e^{\frac{\pi i}{2}} = i\sqrt{r};$$

quand z décrit le demi-cercle $\varepsilon C\varepsilon'$, θ décroît de π à 0, et le radical $\sqrt{z-\alpha}$ prend en ε' la valeur

$$\sigma' = \sqrt{r}.$$

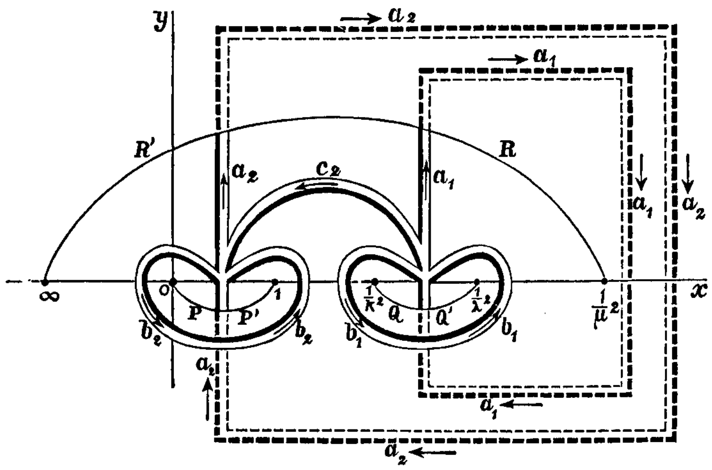
On a donc, comme nous l'avons annoncé,

$$\sigma' = -i\sigma.$$

Si, au lieu de décrire de ε en ε' un demi-cercle *au dessus* de Ox, la variable z décrivait un demi-cercle *au dessous* de Ox, la valeur de $\sqrt{z-\alpha}$ au point ε' serait $+i\sigma$.

Il suffira d'appliquer ce résultat successivement à chacun des points de ramification $0, 1, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}$ pour avoir les valeurs de s en tous les points de Ox, telles qu'elles sont indiquées dans le tableau des pages précédentes.

Surface de Riemann R_{abc}. Pour rendre la surface de Riemann considérée simplement connexe, il faudra tracer deux coupures a_1 et a_2, deux coupures b_1 et b_2, enfin une coupure c_2. Figurons ces coupures avec la disposition que nous sommes convenus d'adopter (page 31).



La coupure b_1 entoure les points $\frac{1}{k^2}, \frac{1}{\lambda^2}$ et se trouve sur le feuillet supérieur; la coupure b_2 entoure les points $0, 1$ et se trouve sur le feuillet supérieur. Les coupures a_1 et a_2 sont en partie sur un feuillet, en partie sur l'autre: les portions de ces coupures situées sur le feuillet inférieur sont *ponctuées*. Enfin la coupure c_2 va du point de croisement des coupures a_1, b_1 à celui des coupures a_2, b_2.

Appelons $V(z)$ et $W(z)$ les intégrales abéliennes normales de première espèce correspondant à la relation algébrique

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2z)(1 - \lambda^2z)(1 - \mu^2z).$$

Ces intégrales sont, en adoptant les notations de Rosenhain (Mémoire couronné loc. cit. pages 432—435)

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \qquad W(z) = -\int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

B, C, B', C' désignant des constantes définies par les équations

$$(36)\quad \begin{cases} \dfrac{i\pi}{2} = B\displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{s} - C\int_0^1 \frac{zdz}{s}, & \text{o} = B'\displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{s} - C'\int_0^1 \frac{zdz}{s}, \\[2ex] \text{o} = B\displaystyle\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}, & \dfrac{i\pi}{2} = B'\displaystyle\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C'\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}, \end{cases}$$

où les intégrations sont faites le long de l'axe des quantités réelles et où s est pris positivement.

Ces relations montrent que B et C sont des quantités *purement imaginaires positives,* c'est à dire des quantités de la forme

$$iP,$$

P étant réel positif. En effet la troisième de ces relations écrite sous la forme

$$\text{o} = \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B - Cz}{s} dz$$

montre que $(B - Cz)$ s'annule pour une valeur réelle de z comprise entre $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$: donc le rapport $\frac{B}{C}$ est réel et supérieur à 1. La première relation (36) montre alors immédiatement que B et C sont de la forme iP, la quantité P étant réelle positive.

De même l'équation

$$\text{o} = \int_0^1 \frac{B' - C'z}{s} dz$$

montre que le rapport $\frac{B'}{C'}$ est réel positif et moindre que 1, et alors l'équation

$$\frac{i\pi}{2} = B'\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C'\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}$$

montre que B' et C' sont *purement imaginaires négatifs* c'est à dire de la forme

$$-iP,$$

P étant réel et positif.

Les valeurs de ces quatre constantes B, C, B', C' sont d'ailleurs données par Rosenhain (loc. cit. page 433).

On a de plus les quatre équations

$$(37)\quad \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{2}\log p = \int_{-\infty}^{0}\frac{B - Cz}{s}dz, & A = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{B - Cz}{s}dz, \\ A = \int_{-\infty}^{0}\frac{B' - C'z}{s}dz, & \frac{1}{2}\log q = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}}\frac{B' - C'z}{s}dz \end{array}\right.$$

avec $\frac{s}{i} < 0$. (Rosenhain, Mémoire couronné, loc. cit. page 435.) Ces intégrations sont encore faites le long de l'axe Ox des quantités réelles, s est alors purement imaginaire et son signe est fixé comme il suit.

Dans la première intégrale qui est égale à $\frac{1}{2}\log p$, la quantité $(B - Cz)$ est purement imaginaire positive d'après ce qui précède; comme la valeur de l'intégrale est *négative,* puisque p est réel positif et moindre que l'unité, il faut prendre pour s une valeur imaginaire telle que $\frac{s}{i}$ soit négatif. Dans la dernière intégrale qui est égale à $\frac{1}{2}\log q$, la quantité $B' - C'z$ est purement imaginaire positive; comme la valeur de l'intégrale est négative puisque q est réel positif et moindre que l'unité, il faut aussi prendre dans cette intégrale $\frac{s}{i}$ négatif. Enfin, dans les deux intégrales qui donnent A, les numérateurs

$$B - Cz\ ,\ B' - C'z$$

restent purement imaginaires négatifs; nous prendrons, dans l'une et l'autre, le signe de s de façon que $\frac{s}{i}$ soit *négatif;* alors A sera positif.

En résumé *dans les quatre intégrales* (37) de la page précédente, nous prenons $\frac{s}{i}$ *négatif.*

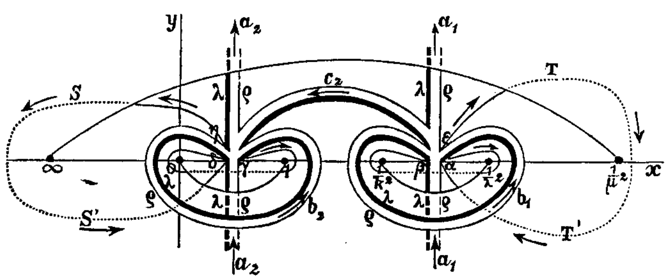
Modules de périodicité des intégrales normales.

Les deux intégrales

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \qquad W(z) = -\int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz$$

sont uniformes sur la surface de Riemann R_{abc} figurée à la page 89. Leurs modules de périodicité le long de la coupure c_2 sont nuls, d'après une propriété générale des intégrales abéliennes. (Voyez C. NEUMANN, loc. cit. p. 216.) Calculons les modules de périodicité de ces intégrales le long des coupures a_1, a_2, b_1, b_2.

Prenons d'abord l'intégrale $V(z)$. Le module de périodicité de $V(z)$ le long de la coupure a_1 est la différence $V(\lambda) - V(\rho)$ constante tout



le long de a_1; ce module est donc en particulier $V(\beta) - V(\alpha)$, α et β étant les points où l'axe Ox rencontre les bords de la coupure a_1. Or cette différence

$$V(\beta) - V(\alpha)$$

est l'intégrale

$$\int \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise du point α jusqu'au point β sur un contour entourant les deux points $\frac{1}{\lambda^2}$, $\frac{1}{k^2}$, comme celui que nous avons figuré; et cette intégrale est égale à

$$2\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise le long de l'axe Ox sur le feuillet supérieur. Mais cette dernière intégrale est *nulle,* en vertu des équations (36) de la page 90. Donc le module de périodicité de $V(z)$ le long de a_1 est *nul.*

Le long de a_2 le module de périodicité de $V(z)$ est de même $V(\delta) - V(\gamma)$, γ et δ étant les points où l'axe Ox rencontre les bords de la coupure a_2. Il est donc égal à l'intégrale

$$2\int_0^1 \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise le long de l'axe Ox dans le feuillet supérieur ($s > 0$), c'est à dire à πi.

Pour l'intégrale

$$W(z) = -\int_0^z \frac{(B' - C'z)\,dz}{s}$$

le module de périodicité le long de a_1 est $W(\beta) - W(\alpha)$ c'est à dire l'intégrale

$$-\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

prise le long de l'axe Ox dans le feuillet supérieur ($s < 0$) (d'après le tableau de la page 87); ce module est donc πi, car l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

où s est *positif* est égale à $\frac{\pi i}{2}$. Enfin le module de périodicité de $W(z)$ le long de a_2 est *nul.*

Passons maintenant aux coupures b_1 et b_2. Le long de b_1 le module de périodicité de $V(z)$ est égal à

$$V(\alpha) - V(\varepsilon)$$

c'est à dire à l'intégrale

$$\int \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise depuis le point ε jusqu'au point α sur le contour $\varepsilon T T' \alpha$ qui entoure les deux points de ramification $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}$.

Cette intégrale se réduit à son tour à

$$2 \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz,$$

l'intégration étant faite le long de l'axe Ox des quantités réelles sur le feuillet supérieur, c'est à dire $\frac{s}{i}$ étant pris *positivement* (tableau de la page 87). Or on a

$$A = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz$$

avec $\frac{s}{i}$ *négatif:* donc le module de périodicité de $V(z)$ le long de b_1 est $-2A$.

Le module de périodicité de $W(z)$ le long de la coupure b_1 est égal à l'intégrale

$$-\int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

prise sur le même contour $\varepsilon TT'\alpha$, c'est à dire à

$$-2\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B'-C'z}{s}\,dz$$

l'intégration étant faite le long de l'axe des quantités réelles dans le feuillet supérieur $\left(\frac{s}{i}>0\right)$. Comme on a (page 91)

$$\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B'-C'z}{s}\,dz = \frac{1}{2}\log q, \qquad \left(\frac{s}{i}<0\right),$$

le module cherché est $\log q$.

Il nous reste à calculer les modules de périodicité de $V(z)$ et $W(z)$ le long de la coupure b_2. Le module de périodicité de $V(z)$ est égal à la différence $V(\delta) - V(\eta)$, c'est à dire à l'intégrale

$$\int_{\eta}^{\delta} \frac{B-Cz}{s}\,dz$$

prise sur le contour $\eta SS'\delta$ qui entoure les deux points de ramification 0 et $-\infty$. Cette intégrale se réduit, comme il est bien connu, à

$$2\int_{0}^{-\infty} \frac{B-Cz}{s}\,dz$$

prise dans le feuillet supérieur le long de l'axe des quantités réelles $\left(\frac{s}{i}>0\right)$. Or on a (page 91)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{B-Cz}{s}\,dz = \frac{1}{2}\log p, \qquad \left(\frac{s}{i}<0\right),$$

le module de périodicité cherché est donc $\log p$.

De même le module de périodicité de $W(z)$ le long de b_2 est

$$-2\int_0^{-\infty}\frac{B'-C'z}{s}dz, \qquad \left(\frac{s}{i}>0\right),$$

c'est à dire (page 91) $-2A$.

En résumé les modules de périodicité des intégrales $V(z)$ et $W(z)$ sont donnés par le tableau suivant

	Sur la coupure a_1	Sur la coupure a_2	Sur la coupure b_1	Sur la coupure b_2
$V(z)$	0	πi	$-2A$	$\log p$
$W(z)$	πi	0	$\log q$	$-2A$

Il importe, en vue de ce qui suit, de calculer les valeurs des intégrales

$$V(z)=\int_0^z\frac{B-Cz}{s}dz, \qquad W(z)=-\int_0^z\frac{B'-C'z}{s}dz$$

aux points de ramification ∞ et $\frac{1}{k^2}$.

Calculons d'abord $V(\infty)$ et $W(\infty)$. Pour aller du point 0 à l'infini sans traverser une coupure, il suffit de suivre l'axe des quantités réelles *négatives* dans le feuillet *inférieur* $\left(\frac{s}{i}<0\right)$. On aura donc

$$V(\infty)=\int_0^{-\infty}\frac{B-Cz}{s}dz, \qquad W(\infty)=-\int_0^{-\infty}\frac{B'-C'z}{s}dz,$$

l'intégration étant faite le long de l'axe des quantités réelles et $\frac{s}{i}$ étant pris *négativement*. On a donc, d'après les formules (37) de la page 91

$$V(\infty)=-\frac{1}{2}\log p, \qquad W(\infty)=A.$$

Nous avons de même $V\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $W\left(\frac{1}{k^2}\right)$ en allant du point O au point $\frac{1}{k^2}$ le long de l'axe des quantités réelles Ox dans le feuillet inférieur, de façon à passer sous les coupures. Donc

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = \int_0^1 \frac{B - Cz}{s} dz + \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s} dz,$$

$$W\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\int_0^1 \frac{B' - C'z}{s} dz - \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

les intégrations étant faites sur l'axe Ox et s étant pris *négativement* entre 0 et 1, $\frac{s}{i}$ *positivement* entre 1 et $\frac{1}{k^2}$. Dans ces conditions on a

$$\int_0^1 \frac{B - Cz}{s} dz = -\frac{\pi i}{2}, \qquad \int_0^1 \frac{B' - C'z}{s} dz = 0.$$

Puis, d'après des formules dues à JACOBI et reproduites par ROSENHAIN (Mémoire couronné, loc. cit. page 381, formules 29), on a

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{B - Cz}{s} dz + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz,$$

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{B' - C'z}{s} dz + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

ou on prendra partout $\frac{s}{i} > 0$. Donc, en vertu des équations (37) de la page 91 dans lesquels $\frac{s}{i}$ est *négatif,* on aura actuellement:

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s} dz = -\frac{1}{2} \log p - A,$$

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz = - A - \frac{1}{2} \log q.$$

Par conséquent

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2} \log p - A, \qquad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2} \log q.$$

Cela posé les équations différentielles de JACOBI sont les suivantes (d'après ROSENHAIN, loc. cit. page 432)

$$dv = dV(z_1) + dV(z_2),$$
$$dw = dW(z_1) + dW(z_2)$$

ou

$$dv = \frac{B - Cz_1}{s_1} dz_1 + \frac{B - Cz_2}{s_2} dz_2,$$
$$dw = -\frac{B' - C'z_1}{s_1} dz_1 - \frac{B' - C'z_2}{s_2} dz_2,$$

en faisant, pour abréger,

$$s_1 = \sqrt{(z_1 k\lambda\mu)}, \qquad s_2 = \sqrt{(z_2 k\lambda\mu)}.$$

Dans ces équations on remarquera que le second membre de la seconde a un signe contraire au signe du second membre de la seconde équation de ROSENHAIN: ce petit changement nous est imposé par la disposition des coupures et le choix des intégrales normales $V(z)$ et $W(z)$ qui en résulte. La variable que nous appelons w est donc égale à celle que ROSENHAIN appelle w changée de signe. Nous n'en pourrons pas moins appliquer toutes les formules de ROSENHAIN à condition d'y changer partout le signe de A. Ainsi nous écrirons la fonction $\varphi_{3,3}(v, w)$, (voyez ROSENHAIN, Mémoire couronné, page 388)

$$\varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{m^2 \log p + n^2 \log q - 4mnA + 2mv + 2nw},$$

en mettant $-4mnA$ au lieu de $4mnA$; et de même pour les autres fonctions $\varphi_{r,s}$. En effet, changer le signe de A revient à changer le signe de w, comme on le voit en changeant n en $-n$.

Intégrons maintenant les équations différentielles de JACOBI écrites à la page précédente, et prenons pour valeur initiale de z_2 la valeur o et pour valeur initiale de z_1 la valeur $\frac{1}{k^2}$; nous aurons, puisque

$$V(0) = W(0) = 0,$$

$$(38) \qquad \begin{cases} v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{cases}$$

L'inversion de ces équations donne, d'après ROSENHAIN (Mémoire couronné, page 422),

$$(39) \qquad \begin{cases} 1\,; \quad \dfrac{\varphi_{1,0}^2(v\,,\,w)}{\varphi_{0,0}^2(v\,,\,w)} = -k\lambda\mu z_1 z_2, \\ 3\,; \quad \dfrac{\varphi_{3,1}^2(v\,,\,w)}{\varphi_{0,0}^2(v\,,\,w)} = \dfrac{\lambda\mu}{k_1\lambda_k\mu_k}(1-k^2 z_1)(1-k^2 z_2) \end{cases}$$

où nous n'écrivons que la première et la troisième formule de ROSENHAIN. Les fonctions

$$\varphi_{1,0}(v\,,\,w)\,,\ \varphi_{3,1}(v\,,\,w)$$

s'annulent pour

$$v = w = 0, \qquad \text{(ROSENHAIN, loc. cit. p. 416)}$$

de sorte qu'alors on a

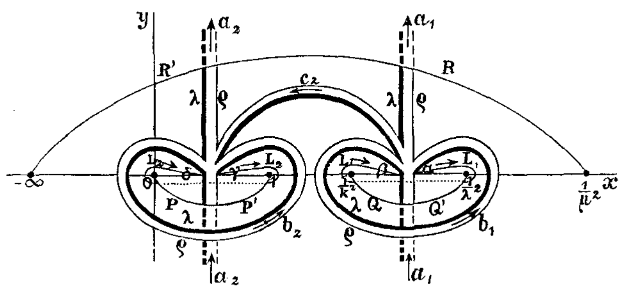
$$z_2 = 0, \qquad z_1 = \frac{1}{k^2},$$

ce qui est bien d'accord avec la façon dont nous avons fixé les valeurs initiales de z_1 et z_2 en écrivant les équations (38).

Reprenons la surface de Riemann de la page 92 et appelons, comme plus haut, $\alpha\,,\beta\,,\gamma\,,\delta$ les points où l'axe Ox des quantités réelles rencontre les bords des coupures a_1 et a_2. Si l'on suppose $z_2 = \gamma\,,\, z_1 = \alpha$, les variables v et w prennent des valeurs v_0 et w_0 données par les équations

$$v_0 = V(\gamma) + V(\alpha) - V\left(\frac{1}{k^2}\right), \qquad w_0 = W(\gamma) + W(\alpha) - W\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Supposons ensuite que z_2 parte de γ, décrive la portion $\gamma 1$ de l'axe Ox dans le feuillet supérieur, la portion $1, 0$ du même axe dans le feuillet



inférieur, et enfin la portion 0δ du même axe dans le feuillet supérieur; supposons en même temps que z_1 parte de α, décrive la portion $\alpha\frac{1}{\lambda^2}$ de l'axe Ox dans le feuillet supérieur, la portion $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{k^2}$ du même axe dans le feuillet inférieur, et enfin la portion $\frac{1}{k^2}\beta$ du même axe dans le feuillet supérieur. Alors les variables v et w définies par les équations de JACOBI

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

partent des valeurs v_0 et w_0 qui sont *purement imaginaires* (c'est à dire *sans partie réelle*) et varient par une suite continue de valeurs purement imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + i\pi$ et $w_0 + i\pi$. Cela résulte immédiatement de ce que, sur l'axe des quantités réelles, dans l'un et l'autre feuillet, les intégrales

$$\left.\begin{aligned}
V(z_2) \qquad &= \int_0^{z_2} \frac{B - Cz_2}{s_2}\, dz_2\,, \\
V(z_1) - V\left(\frac{1}{k^2}\right) &= \int_{\frac{1}{k^2}}^{z_1} \frac{B - Cz_1}{s_1}\, dz_1, \\
W(z_2) \qquad &= -\int_0^{z_2} \frac{B' - C'z_2}{s_2}\, dz_2, \\
W(z_1) - W\left(\frac{1}{k^2}\right) &= -\int_{\frac{1}{k^2}}^{z_1} \frac{B' - C'z_1}{s_1}\, dz_1
\end{aligned}\right| \begin{aligned} & 0 \leqq z_2 \leqq 1, \\ & \frac{1}{k^2} \leqq z_1 \leqq \frac{1}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

sont purement imaginaires, (pages 90 et suivantes) et de ce que l'on a

$$V(\beta) - V(\alpha) = 0, \qquad V(\delta) - V(\gamma) = \pi i,$$
$$W(\beta) - W(\alpha) = \pi i, \qquad W(\delta) - W(\gamma) = 0.$$

Inversement, comme, par l'inversion, $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$ deviennent des fonctions uniformes de v et w, lorsque v et w varient par valeurs purement imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + \pi i$, $w_0 + \pi i$, les points z_1 et z_2 restent sur l'axe Ox des quantités réelles et décrivent: le point z_2 un chemin L_2 formé de la droite $\gamma 1$ dans le feuillet supérieur, de la droite $1, 0$ dans le feuillet inférieur, enfin de la droite 0δ dans le feuillet supérieur, et le point z_1 un chemin L_1 formé de la droite $\alpha\frac{1}{\lambda^2}$ dans le feuillet supérieur, de la droite $\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{k^2}$ dans le feuillet inférieur, enfin de la droite $\frac{1}{k^2}\beta$ dans le feuillet supérieur. Nous avons, dans la figure de la page précédente, représenté ces chemins L_1 et L_2 par des contours fermés voisins de l'axe des quantités réelles: d'après ce que nous venons de dire, ces contours doivent être supposés infiniment voisins de cet axe.

La fonction abélienne

$$\frac{\varphi^2_{1,0}(v\,,\,w)}{\varphi^2_{0,0}(v\,,\,w)} = -\,k\lambda\mu z_1 z_2$$

admet par rapport à chacune des variables la période πi et reste finie quand v et w partent des valeurs purement imaginaires v_0 et w_0 et varient par valeurs purement imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + \pi i$ et $w_0 + \pi i$. On a donc, par la série de Fourier,

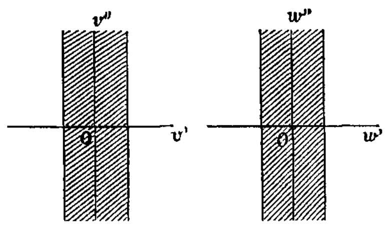
$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} P_{m,n} e^{-2mv-2nw}, \tag{40}$$

m et n étant des *entiers* qui prennent toutes les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$ et $P_{m,n}$ un coefficient indépendant de v et w.

Ce développement est valable pour toutes les valeurs purement imaginaires de v et w: il aura encore lieu pour des valeurs de v et w suffisamment voisines de valeurs purement imaginaires. En d'autres termes, si l'on fait

$$v = v' + iv'', \qquad w = w' + iw''$$

et si l'on représente les variables imaginaires v et w sur deux plans $v'Ov''$ et $w'Ow''$, le développement sera valable pour les valeurs de v



situées dans une bande parallèle à l'axe Ov'' et les valeurs de w situées dans une bande parallèle à l'axe Ow''. Ces deux bandes sont ombrées sur la figure.

Le coefficient $P_{m,n}$ est donné par l'intégrale double

$$P_{m,n} = -\frac{1}{\pi^2} \int_{v_0}^{v_0+\pi i} dv \int_{w_0}^{w_0+\pi i} \frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} e^{2mv+2nw} dw, \tag{41}$$

l'intégration étant étendue à des valeurs purement imaginaires de v et w, de sorte qu'il suffirait de poser

$$v = v_0 + iv'', \qquad w = w_0 + iw''$$

pour avoir une intégrale double étendue à *des valeurs réelles v'' et w''.*

Le calcul de cette intégrale double se ramène au calcul des modules de périodicité d'intégrales de fonctions à multiplicateurs. Pour le montrer, faisons-y le changement de variables défini par les équations de JACOBI[1]

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

en prenant pour nouvelles variables z_1 et z_2. Comme nous l'avons expliqué en détail, pour faire varier v et w par valeurs *purement* imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + i\pi$ et $w_0 + i\pi$, il suffit de faire varier z_2 par *valeurs réelles* de γ à 1 dans le feuillet supérieur (voyez la figure de la page 100), puis de 1 à 0 dans le feuillet inférieur, puis de 0 à δ dans le feuillet supérieur, et de faire varier z_1 par *valeurs réelles* de α à $\frac{1}{\lambda^2}$ dans le feuillet supérieur, puis de $\frac{1}{\lambda^2}$ à $\frac{1}{k^2}$ dans le feuillet inférieur, enfin de $\frac{1}{k^2}$ à β dans le feuillet supérieur. Ainsi que nous en sommes convenus, nous dirons, pour désigner d'une manière abrégée ces successions de valeurs réelles de z_1 et z_2, que les variables z_1 et z_2 décrivent les contours L_1 et L_2.

Nous devrons alors, en appliquant les règles élémentaires du changement de *variables réelles* dans une intégrale double, remplacer

$$dv\,dw$$

par

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z_1}\frac{\partial w}{\partial z_2} - \frac{\partial v}{\partial z_2}\frac{\partial w}{\partial z_1}\right)dz_1\,dz_2.$$

Or les équations

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

[1] voir page 99.

donnent, puisque

$$V(z)=\int_0^z \frac{B-Cz}{s}\,dz, \qquad W(z)=-\int_0^z \frac{B'-C'z}{s}\,dz,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z_1}=\frac{B-Cz_1}{s_1}, \qquad \frac{\partial v}{\partial z_2}=\frac{B-Cz_2}{s_2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z_1}=-\frac{B'-C'z_1}{s_1}, \qquad \frac{\partial w}{\partial z_2}=-\frac{B'-C'z_2}{s_2},$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial z_1}\frac{\partial w}{\partial z_2}-\frac{\partial v}{\partial z_2}\frac{\partial w}{\partial z_1}=(BC'-CB')\frac{z_2-z_1}{s_1 s_2}.$$

Nous devrons donc faire, dans l'intégrale double,

$$dv\,dw=(BC'-CB')\frac{z_2-z_1}{s_1 s_2}dz_1 dz_2.$$

Comme dv et dw sont *purement imaginaires positifs,* le produit $dvdw$ est *réel négatif;* dans le second membre, le facteur $(BC'-CB')$ est réel positif d'après les valeurs de B, C, B', C', la différence z_2-z_1 est négative puisque z_2 est réel et compris entre o et 1, z_1 réel et compris entre $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$, enfin $\frac{dz_1}{s_1}$ et $\frac{dz_2}{s_2}$ sont tous deux positifs d'après la suite des valeurs que prennent z_1 et z_2 dans les deux feuillets, s_1 étant pris positivement quand z_1 croit et négativement quand z_1 décroît, et de même s_2 à l'égard de z_2. Comme on a de plus

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v,w)}{\varphi_{0,0}^2(v,w)}=-k\lambda\mu z_1 z_2,$$

l'intégrale (41) qui donne le coefficient $P_{m,n}$ devient, après le changement de variables,

$$(42)\quad P_{m,n}=\Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{z_1 z_2(z_2-z_1)}{s_1 s_2}e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]}dz_1 dz_2,$$

la lettre Δ désignant le facteur constant

$$\Delta=\frac{k\lambda\mu}{\pi^2}(BC'-CB')$$

et les indices L_1 et L_2 rappelant que les variables réelles z_1 et z_2 doivent décrire sur la surface de Riemann les chemins définis plus haut et appelés L_1 et L_2. Il se présente une petite difficulté à propos de cette transformation, c'est que les éléments des deux intégrales se correspondent bien deux à deux, mais les éléments appartenant à la limite de l'une n'appartiennent pas à la limite de l'autre. Pour montrer la légitimité de la transformation, nous allons vérifier que la nouvelle intégrale (42) est bien équivalente à la première (41). Si l'on pose:

$$z_2 = \frac{1}{k^2}\cos^2 u_1 + \frac{1}{\lambda^2}\sin^2 u_1, \qquad s_2 = \sin u_2 \cos u_2 \, \Delta_2 u_2,$$

$$z_1 = \sin^2 u_2, \qquad s_1 = \sin u_1 \cos u_1 \, \Delta_1 u_1,$$

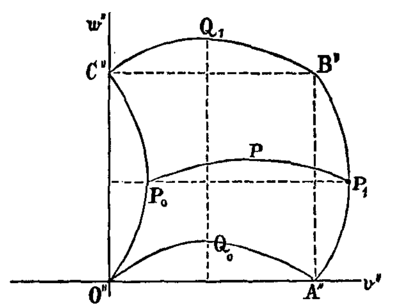
où $\Delta_1 u_1$ et $\Delta_2 u_2$ sont des quantités qui restent réelles et positives pour toutes les valeurs réelles de u_1 et u_2, on fera décrire à z_1 le chemin L_1 et à z_2 le chemin L_2 en faisant varier u_1 et u_2 de 0 à π par valeurs réelles. L'intégrale double (42) deviendra ainsi une intégrale double étendue aux valeurs réelles de u_1 et u_2 telles que

$$0 \leqq u_1 \leqq \pi, \qquad 0 \leqq u_2 \leqq \pi.$$

D'autre part, posons comme précédemment

$$v = v_0 + v''i, \qquad w = w_0 + w''i,$$

v'' et w'' étant réels, et désignons par P un point ayant pour coordonnées v'' et w'' par rapport à deux axes rectangulaires $O''v''$, $O''w''$.



On peut alors dire que l'intégrale (41) est étendue à l'aire du carré $O''A''B''C''$ dont les cotés sont égaux à π. Les éléments des intégrales (41) et (42) sont égaux; pour comparer les champs d'intégration, donnons, dans l'intégrale (42), à u_2 une valeur constante et faisons varier u_1 de o à π: le point P de coordonnées v'' et w'' décrira une courbe P_0PP_1 telle que le segment P_0P_1 soit parallèle à l'axe $O''v''$ et ait pour longueur π; car si, dans les équations (38) de JACOBI, on laisse z_2 constant en faisant décrire à z_1 le contour L_1, w revient à la même valeur et v augmente de πi. A chaque valeur constante donnée à u_2 correspond ainsi une courbe P_0PP_1 dans le plan $v''O''w''$; si l'on fait varier cette valeur constante donnée à u_2 de o à π, la courbe P_0PP_1 se déplace et se déforme d'une manière continue depuis la position $O''Q_0A''$ correspondant à $u_2 = 0$, jusqu'à la position $C''Q_1B''$ correspondant à $u_2 = \pi$, de façon à recouvrir une fois et une seule fois l'aire $O''Q_0A''P_1B''Q_1C''P_0O''$. Cette aire est limitée par quatre courbes: la courbe $C''Q_1B''$ se déduit de $O''Q_0A''$ en augmentant les ordonnées de cette dernière courbe de π $(Q_0Q_1 = \pi)$, et la courbe $A''P_1B''$ se déduit de $O''P_0C''$ en augmentant les abscisses de cette dernière de π $(P_0P_1 = \pi)$. L'intégrale double (42) est donc égale à l'intégrale double (41) étendue à l'aire curviligne $O''Q_0A''P_1B''Q_1C''P_0O''$; mais, comme la fonction de v et w qui figure dans l'intégrale (41) admet par rapport à v'' et w'' la période π, la valeur de cette intégrale étendue à l'aire curviligne est égale à la valeur de cette même intégrale étendue au carré $O''A''B''C''$, c'est à dire aux valeurs

$$0 \leqq v'' \leqq \pi, \qquad 0 \leqq w'' \leqq \pi.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Il est donc bien établi que la première intégrale double (41) donnant $P_{m,n}$ peut être remplacée par la nouvelle intégrale (42); mais, et c'est là un premier point d'une grande importance, dans cette nouvelle intégrale double, les variables se séparent, *et l'intégrale se ramène à quatre intégrales simples.* En effet, si l'on pose

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z_1\,dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)}, \qquad \mathfrak{A}_1 = \int_{L_1} \frac{z_1^2\,dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)},$$

$$A_2 = \int_{L_2} \frac{z_2\,dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2)+2nW(z_2)}, \qquad \mathfrak{A}_2 = \int_{L_2} \frac{z_2^2\,dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2)+2nW(z_2)},$$

on a

$$P_{m,n} = \Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)}(A_1\mathfrak{A}_2 - A_2\mathfrak{A}_1),$$

ou encore, puisque (d'après pag. 98)

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\log p - A, \qquad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2}\log q,$$

$$(43) \qquad P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} e^{2(m-n)A}(A_1\mathfrak{A}_2 - A_2\mathfrak{A}_1).$$

Le calcul du coefficient $P_{m,n}$ est ainsi ramené au calcul des quatre intégrales définies

$$A_1, A_2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2.$$

Or ces quatre constantes sont les modules de périodicité, le long des coupures a_1 et a_2, des intégrales *de fonctions à multiplicateurs*

$$\int \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}, \qquad \int \frac{z^2\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}.$$

Pour le montrer, considérons l'exponentielle

$$E(z) = e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

qui est, ainsi que $V(z)$ et $W(z)$, uniforme sur la surface R_{ab} de Riemann avec les coupures a_1, a_2, b_1, b_2. Cette exponentielle admet le long des coupures a_1, a_2, b_1, b_2 les multiplicateurs respectifs

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 1, \qquad n_1 = r^{2m}q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m}r^{2n}$$

en faisant pour simplifier

$$e^{-2A} = r.$$

C'est ce qui résulte immédiatement du tableau des modules de périodicité des intégrales $V(z)$ et $W(z)$ tel que nous l'avons donné à la page 96.

Ainsi, le long de la coupure a_1, on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = e^{2m[V(\lambda)-V(\rho)]+2n[W(\lambda)-W(\rho)]},$$

et, comme le long de a_1,

$$V(\lambda) - V(\rho) = 0, \qquad W(\lambda) - W(\rho) = \pi i,$$

on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = 1, \qquad E(\lambda) = E(\rho);$$

ce qui montre que le multiplicateur m_1 relatif à la coupure a_1 est *l'unité.* On voit de même que le multiplicateur m_2 relatif à la coupure a_2 est *l'unité.*

Le long de la coupure b_1, on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = e^{2m[V(\lambda) - V(\rho)] + 2n[W(\lambda) - W(\rho)]}$$

c'est à dire, puisque

$$V(\lambda) - V(\rho) = -2A, \qquad W(\lambda) - W(\rho) = \log q,$$

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = r^{2m} q^{2n};$$

ce qui montre que le multiplicateur n_1 relatif à la coupure b_1 est $r^{2m}q^{2n}$. On voit de même que le multiplicateur n_2 relatif à la coupure b_2 est $p^{2m}r^{2n}$.

Alors la fonction

$$\Phi(z) = \frac{z}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)} = \frac{z}{s} E(z)$$

est aussi uniforme sur la surface R_{ab} de Riemann et admet le long des coupures a_1, a_2, b_1, b_2 les mêmes multiplicateurs que l'exponentielle $E(z)$ à savoir

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 1, \qquad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m} r^{2n}.$$

L'intégrale de cette fonction

$$\omega(z) = \int_0^z \frac{z\,dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

est uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} avec les coupures a_1, a_2, b_1, b_2, c_2, telle qu'elle est figurée à la page 100. Cette intégrale est de *première espèce, car elle est partout finie.* Le module de périodicité de cette intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure a_1 est la valeur constante que possède la différence

$$\omega(\lambda) - m_1 \omega(\rho),$$

c'est à dire $\omega(\lambda) - \omega(\rho)$ puisque $m_1 = 1$, le long de la coupure a_1. Or cette différence est

$$\omega(\beta) - \omega(\alpha),$$

α et β désignant comme plus haut les points où l'axe Ox rencontre les deux bords de la coupure a_1. Le module de périodicité de $\omega(z)$ le long de a_1 est donc la valeur de l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

prise de α à β sur un contour L_1 entourant les deux points $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{k^2}$, et pouvant être pris infiniment voisin de l'axe des quantités réelles. Ce module de périodicité est donc la constante appelée précédemment A_1 (page 106)

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z_1\,dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)}.$$

On verra de même que le module de périodicité de cette intégrale $\omega(z)$ le long de a_2 est la constante appelée précédemment A_2 (page 106). Nous appellerons en outre B_1, B_2 et C_2 les modules de périodicité de cette intégrale $\omega(z)$ le long des coupures b_1, b_2, c_2, de sorte que l'on aura

$$\begin{aligned}
&\text{le long de } a_1: \quad \omega(\lambda) - \omega(\rho) = A_1,\\
&\text{le long de } a_2: \quad \omega(\lambda) - \omega(\rho) = A_2,\\
&\text{le long de } b_1: \quad \omega(\lambda) - n_1\omega(\rho) = B_1,\\
&\text{le long de } b_2: \quad \omega(\lambda) - n_2\omega(\rho) = B_2,\\
&\text{le long de } c_2: \quad \omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_2,
\end{aligned}$$

les multiplicateurs m_1 et m_2 étant égaux à 1 et n_1 et n_2 ayant les valeurs

$$n_1 = r^{2m}q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m}r^{2n}.$$

Les modules de périodicité et les multiplicateurs de l'intégrale de première espèce $\omega(z)$ sont liés par les deux relations suivantes, déduites de la considération des points de croisement des coupures a_1, b_1, c_2 et a_2, b_2, c_2,

$$\begin{aligned} B_1(1-m_1) - A_1(1-n_1) + \quad n_1 C_2 &= 0, \\ B_2(1-m_2) - A_2(1-n_2) - m_2 n_2 C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Ce sont là en effet les relations générales (12) de la page 34 appliquées au cas actuel où le genre est égal à 2. D'après les valeurs des multiplicateurs m_1, m_2, n_1, n_2, on a $1 - m_1 = 0$, $1 - m_2 = 0$ et il vient les deux relations

$$(44) \qquad \begin{aligned} -A_1(1 - r^{2m}q^{2n}) + r^{2m}q^{2n} C_2 &= 0, \\ -A_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n} C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction

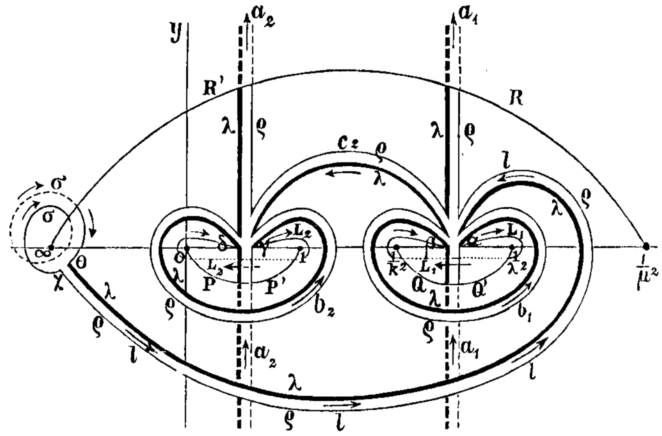
$$\Psi(z) = \frac{z^2}{s} e^{2m\,V(z) + 2n\,W(z)} = \frac{z^2}{s} E(z).$$

Cette fonction est uniforme sur la surface R_{ab} de Riemann et admet le long des coupures a_1, a_2, b_1, b_2 les mêmes multiplicateurs m_1, m_2, n_1, n_2 que l'exponentielle $E(z)$.

L'intégrale de cette fonction

$$\varpi(z) = \int_0^z \Psi(z)dz = \int_0^z \frac{z^2 dz}{s} e^{2m\,V(z)+2n\,W(z)}$$

est partout finie excepté à l'infini où elle possède un *point critique logarithmique;* c'est donc une intégrale de *troisième espèce* qui n'est plus uniforme sur la surface R_{abc} de Riemann comme l'intégrale précédente $\omega(z)$. Cette intégrale $\varpi(z)$ sera uniforme sur la surface R_{abcl} obtenue en ajoutant aux coupures a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 un lacet l commençant et finissant au point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2 et tournant deux fois autour du point ∞, comme le montre la figure schématique suivante où le point ∞ est figuré par un point à distance finie.



On voit, sur cette figure, comment le lacet l se termine par un contour fermé σ tournant deux fois autour du point ∞ en passant d'un feuillet à l'autre chaque fois qu'il traverse la ligne de passage $\frac{1}{\mu^2} RR' \infty$.

L'intégrale $\varpi(z)$ uniforme sur cette surface de Riemann R_{abcl} possède *six* modules de périodicité relatifs aux six coupures a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 et l; les modules de périodicité relatifs aux coupures a_1 et a_2 sont les constantes appelées précédemment $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ (page 106)

$$\mathfrak{A}_1 = \int_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)}, \qquad \mathfrak{A}_2 = \int_{L_2} \frac{z_2^2 dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2)+2nW(z_2)},$$

les indices L_1 et L_2 signifiant que les intégrales sont prises sur les contours L_1 et L_2 qui entourent le premier les points $\frac{1}{k^2}, \frac{1}{\lambda^2}$, le second les points $0, 1$, infiniment près de l'axe Ox des quantités réelles. Ces constantes $\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{A}_2$ étant les modules de périodicité de l'intégrale

$$\varpi(z) = \int_0^z \frac{z^2 dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

le long des coupures a_1 et a_2, nous appellerons en outre $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, $\mathfrak{C}_2$, $\mathfrak{L}$ les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures b_1, b_2, c_2, l. De sorte que l'on aura:

$$\begin{aligned}
&\text{le long de la coupure } a_1: \quad \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{A}_1,\\
&\text{le long de la coupure } a_2: \quad \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{A}_2,\\
&\text{le long de la coupure } b_1: \quad \varpi(\lambda) - n_1\varpi(\rho) = \mathfrak{B}_1,\\
&\text{le long de la coupure } b_2: \quad \varpi(\lambda) - n_2\varpi(\rho) = \mathfrak{B}_2,\\
&\text{le long de la coupure } c_2: \quad \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{C}_2,\\
&\text{le long de la coupure } l\ : \quad \varpi(\lambda) - \varpi(\rho) = \mathfrak{L},
\end{aligned}$$

les multiplicateurs m_1 et m_2 étant égaux à 1 et les multiplicateurs n_1 et n_2 à $r^{2m}q^{2n}$ et $p^{2m}r^{2n}$.

Le point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2, l et celui des coupures a_2, b_2, c_2 fournissent chacun une relation entre les modules de périodicité et les multiplicateurs, ainsi que nous l'avons montré dans la deuxième partie (page 56 par exemple). Ces relations sont les suivantes

$$\mathfrak{B}_1(1 - m_1) - \mathfrak{A}_1(1 - n_1) - m_1 n_1 \mathfrak{L} + n_1 \mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$\mathfrak{B}_2(1 - m_2) - \mathfrak{A}_2(1 - n_2) - m_2 n_2 \mathfrak{C}_2 = 0,$$

où il faudra faire

$$m_1 = 1, \qquad m_2 = 1, \qquad n_1 = r^{2m}q^{2n}, \qquad n_2 = p^{2m}r^{2n}.$$

On aura donc

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{n_1\mathfrak{C}_2 - n_1\mathfrak{L}}{1 - n_1}, \qquad \mathfrak{A}_2 = -\frac{n_2\mathfrak{C}_2}{1 - n_2}.$$

D'ailleurs on a trouvé précédemment (page 110 éq. 44)

$$A_1 = \frac{n_1 C_2}{1 - n_1}, \qquad A_2 = -\frac{n_2 C_2}{1 - n_2}.$$

Donc le coefficient $P_{m,n}$ donné par la formule (43) de la page 107, où l'on fait $e^{-2A} = r$,

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} (A_1\mathfrak{A}_2 - A_2\mathfrak{A}_1),$$

devient

$$P_{m,n} = -(-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} \frac{n_1 n_2}{(1-n_1)(1-n_2)} C_2 \mathfrak{L}$$

ou encore, en remplaçant $\frac{n_2 C_2}{1-n_2}$ par sa valeur $-A_2$ et n_1 par $r^{2m}q^{2n}$,

$$(45) \qquad P_{m,n} = (-1)^m \Delta \frac{p^m q^n r^{m+n}}{1-r^{2m}q^{2n}} A_2 \mathfrak{L}.$$

Ce coefficient $P_{m,n}$ est ainsi exprimé à l'aide de A_2 et $\mathfrak{L}$ seulement. Or la constante $\mathfrak{L}$ est aisée à calculer. Cette constante est égale à la différence

$$\varpi(\lambda) - \varpi(\rho)$$

tout le long de la coupure l: elle est donc en particulier égale à

$$\varpi(\theta) - \varpi(\chi),$$

θ et χ étant les points où le contour σ qui entoure deux fois le point ∞ se raccorde avec les bords de la coupure l (Voyez la figure de la page 111). La constante $\mathfrak{L}$ est donc la valeur de l'intégrale

$$\int_\chi^\theta \frac{z^2 dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

prise sur ce contour σ dans le sens marqué par une flèche.

Dans le voisinage du point ∞, c'est à dire pour des valeurs de z dont le module dépasse un nombre suffisamment grand, on a

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{(zk\lambda\mu)}} = \frac{1}{k\lambda\mu z^{\frac{5}{2}}}\left(1-\frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{k^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{\lambda^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{\mu^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

d'où en développant en série suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{z}$:

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{k\lambda\mu z^{\frac{5}{2}}}\left[1 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots\right].$$

La fonction

$$2mV(z) + 2nW(z) = \int_0^z \frac{2mB - 2nB' - (2mC - 2nC')z}{s} dz$$

sera donc, pour ces mêmes valeurs de z, développable en une série de la forme

$$2mV(z) + 2nW(z) = K + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}}\left[1 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \dots\right]$$

où K désigne une constante d'intégration et où nous n'avons calculé exactement que le coefficient du terme en $\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}$. La constante K est aisée à déterminer: en effet en faisant $z = \infty$, on a

$$2mV(\infty) + 2nW(\infty) = K,$$

et comme (voyez page 96)

$$V(\infty) = -\frac{1}{2}\log p, \qquad W(\infty) = A,$$

on a

$$K = -m\log p + 2nA.$$

D'après cela l'exponentielle

$$E(z) = e^{2mV(z)+2nW(z)} = e^{K+\frac{2(2mC-2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}}\left[1+\frac{\beta_1}{z}+\dots\right]},$$

se développe en une série de la forme

$$E(z) = p^{-m}r^{-n}\left[1 + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}}\left(1 + \frac{\gamma_1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{\gamma_2}{z} + \dots\right)\right],$$

car

$$e^K = e^{-m\log p+2nA} = p^{-m}r^{-n}.$$

En vertu de ces développements de $\frac{1}{s}$ et $E(z)$, on a, pour les mêmes valeurs de z,

$$\frac{z^2}{s}E(z) = \frac{p^{-m}r^{-n}}{k\lambda\mu}\left[\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu}\frac{1}{z} + \frac{\delta_1}{z^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2}{z^2} + \dots\right].$$

La constante $\mathfrak{L}$ est, comme nous l'avons vu, l'intégrale

$$\int_{\chi}^{\theta}\frac{z^2}{s}E(z)\,dz$$

prise sur un contour σ entourant deux fois le point ∞ dans le sens négatif (figure de la page 111), c'est à dire sur une circonférence très grande de centre O parcourue deux fois dans le sens positif autour de O. Or cette dernière intégrale est le produit de $4\pi i$ par le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement ci-dessus de $\frac{z^2}{s}E(z)$. On a donc

$$\mathfrak{L} = \frac{16\pi i}{k^2\lambda^2\mu^2}p^{-m}r^{-n}(mC - nC').$$

La constante $\mathfrak{L}$ étant ainsi calculée, l'expression (45) trouvée pour $P_{m,n}$ à la page 113 devient

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16\pi i\Delta}{k^2\lambda^2\mu^2}(mC - nC')\frac{q^n r^m}{1 - r^{2m}q^{2n}}A_2$$

ou encore, puisque

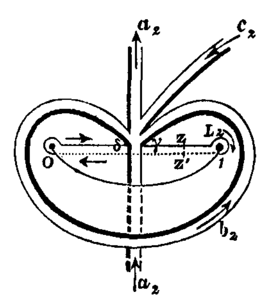
$$\Delta = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2}(BC' - CB') \qquad \text{(page 104)},$$

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu}(mC - nC')\frac{A_2}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} \tag{46}$$

où il ne reste plus d'inconnu que le coefficient A_2 exprimé par l'intégrale définie

$$A_2 = \int_{L_2} \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

prise de γ en δ sur le contour L_2 infiniment voisin du segment de droite $O1$ (figure de la page 111).



Cette dernière intégrale peut s'écrire d'une façon un peu plus commode. Figurons le contour L_2 formé de l'axe des quantités réelles de γ en 1 dans le feuillet supérieur, de 1 en O dans le feuillet inférieur (partie ponctuée) et de O en δ dans le feuillet supérieur. Appelons z un point de l'axe des quantités réelles situé dans le feuillet supérieur entre O et 1, et z' le point du même axe situé au dessous de z dans le feuillet inférieur, et soient s et s' les valeurs correspondantes de s, de sorte que $s' = -s$. L'intégrale qui donne A_2 pourra s'écrire

$$A_2 = \int_0^\delta \frac{z\,dz}{s} E(z) + \int_\gamma^1 \frac{z\,dz}{s} E(z) + \int_1^0 \frac{z'dz'}{s'} E(z').$$

Comme l'exponentielle $E(z)$ admet le multiplicateur $m_2 = 1$ le long de la coupure a_2, elle ne change pas quand on franchit cette coupure, et, par conséquent, les deux premières intégrales peuvent être réunies en une seule

$$\int_0^1 \frac{z\,dz}{s} E(z).$$

D'autre part on a le long de la droite $O\delta$

$$z' = z, \qquad s' = -s, \qquad V(z') = -V(z), \qquad W(z') = -W(z),$$

car on a, par exemple

$$V(z') = \int_0^{z'} \frac{B - Cz'}{s'} dz' = -\int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz = -V(z)$$

et de même pour l'intégrale W. Puis le long de la droite $\gamma 1$, on a

$$z' = z, \qquad s' = -s, \qquad V(z') = -\pi i - V(z), \qquad W(z') = -W(z).$$

En effet on a, sur cette portion de l'axe Ox,

$$V(z') = V(1) + \int_1^{z'} \frac{B - Cz'}{s'} dz' = V(1) - \int_1^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

et

$$V(z) = V(1) + \int_1^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

d'où en ajoutant

$$V(z') + V(z) = 2V(1) = -\pi i;$$

on trouvera de même

$$W(z') + W(z) = 2W(1) = 0;$$

car

$$V(1) = -\frac{\pi i}{2}, \qquad W(1) = 0.$$

Il résulte de là que l'on a entre O et γ

$$E(z') = e^{2mV(z')+2nW(z')} = e^{-2mV(z)-2nW(z)}$$

et entre γ et 1

$$E(z') = e^{2mV(z')+2nW(z')} = e^{-2mV(z)-2nW(z)},$$

car le facteur $e^{-2m\pi i}$ égale 1. On a ainsi la même expression de $E(z')$ entre O et 1, et la formule qui donne A_2 peut s'écrire

$$A_2 = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} E(z) + \int_1^0 \frac{z'dz'}{s'} E(z') = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)} + \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{-2mV(z)-2nW(z)}.$$

Donc, en posant

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}, \tag{47}$$

l'intégration étant faite le long de l'axe Ox dans le feuillet supérieur en traversant la coupure a_2, on aura

$$A_2 = \psi(m, n) + \psi(-m, -n)$$

et l'expression de $P_{m,n}$ deviendra

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu}(mC - nC')\frac{\psi(m, n) + \psi(-m, -n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} \tag{48}$$

où il n'entre plus que l'intégrale simple rectiligne $\psi(m, n)$ définie ci-dessus.

Le développement de la fonction abélienne considérée est donc

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} \tag{49}$$

$$= \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu}\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty}(-1)^m(mC - nC')\frac{\psi(m, n) + \psi(-m, -n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} e^{-2mv-2nw},$$

les constantes B, B', C, C' ayant les valeurs que donne ROSENHAIN à la page 433 de son Mémoire. Comme le premier membre est une fonction *paire* de v et w, il doit en être de même du second. C'est ce qu'on vérifie immédiatement, car si l'on change v et w en $-v$ et $-w$, puis m et n en $-m$ et $-n$, le second membre ne change pas. En réunissant dans la série les termes qui correspondent à des valeurs de m et n égales et de signes contraires, on aura la série trigonométrique suivante ne contenant que des cosinus

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}$$

$$= \frac{32(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^m (mC - nC') \frac{\psi(m, n) + \psi(-m, -n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} \cos(2miv + 2niw)$$

Il faut remarquer que, dans ces formules, le coefficient $P_{0,0}$ correspondant à $m = n = 0$ se présente sous forme illusoire $\frac{0}{0}$. On obtiendra directement ce coefficient en faisant dans la formule (42), page 104, $m = n = 0$. On a ainsi

$$P_{0,0} = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2}(BC' - CB') \int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \frac{z_1 z_2 (z_2 - z_1)}{s_1 s_2} dz_1 dz_2$$

ou bien

$$P_{0,0} = \frac{k\lambda\mu(BC' - CB')}{\pi^2}(A_1^0 \mathfrak{A}_2^0 - A_2^0 \mathfrak{A}_1^0)$$

en faisant

$$A_1^0 = \int\limits_{L_1} \frac{z_1 dz_1}{s_1}, \qquad A_2^0 = \int\limits_{L_2} \frac{z_2 dz_2}{s_2},$$

$$\mathfrak{A}_1^0 = \int\limits_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1}, \qquad \mathfrak{A}_2^0 = \int\limits_{L_2} \frac{z_2^2 dz_2}{s_2}.$$

Le coefficient $P_{0,0}$ est ainsi exprimé à l'aide de quatre constantes dont les deux premières A_1^0 et A_2^0 sont les modules de périodicité de l'intégrale *abélienne*

$$\int \frac{z\,dz}{s}$$

le long des coupures a_1 et a_2, et les deux dernières $\mathfrak{A}_1^0$ et $\mathfrak{A}_2^0$ les modules de périodicité de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{z^2 dz}{s}$$

le long des mêmes coupures a_1 et a_2. Les deux premières constantes A_1^0 et A_2^0 se calculent immédiatement à l'aide des équations (36) de la page 90; il est inutile d'insister sur ce calcul.

Développement de la fonction abélienne qui donne la somme $z_1 + z_2$ exprimée en v et w.

Nous venons de trouver le développement de $-k\lambda\mu z_1 z_2$ en série trigonométrique: nous formerons de même celui de $-k\lambda\mu(z_1 + z_2)$. En supposant

$$-k\lambda\mu(z_1 + z_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} Q_{m,n} e^{-2mv-2nw},$$

on trouve, comme pour $P_{m,n}$ (pages 102—104),

$$(50) \quad Q_{m,n} = \Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)} \int\limits_{L_1}\int\limits_{L_2} \frac{(z_1+z_2)(z_2-z_1)}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]} dz_1 dz_2,$$

formule qui se déduit de la formule (42) de la page 104 en y remplaçant $z_1 z_2$ par $z_1 + z_2$. L'intégrale double ainsi obtenue se décompose en quatre intégrales simples dont deux

$$\mathfrak{A}_1 = \int\limits_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \int\limits_{L_2} \frac{z_2^2 dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2)+2nW(z_2)}$$

sont les mêmes que précédemment et dont les deux autres

$$A_1' = \int_{L_1} \frac{dz_1}{s_1} e^{2m V(z_1) + 2n W(z_1)},$$

$$A_2' = \int_{L_2} \frac{dz_2}{s_2} e^{2m V(z_2) + 2n W(z_2)}$$

se ramènent facilement à celles que nous avons appelées A_1 et A_2. Avec ces notations, la formule qui donne $Q_{m,n}$ s'écrit

$$Q_{m,n} = (-1)^m k\lambda\mu \frac{BC' - CB'}{\pi^2} p^m q^{-n} r^{n-m} (\mathfrak{A}_2 A_1' - \mathfrak{A}_1 A_2'),$$

car

$$\Delta = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2}(BC' - CB'),$$

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\log p - A, \qquad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2}\log q.$$

En répétant les calculs qui ont été faits pour la détermination de $P_{m,n}$ on trouvera la formule

$$Q_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu}(mC - nC') \frac{A_2'}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n}$$

ne différant de la formule (46) de la page 115 que par le changement de A_2 en A_2'. Cette constante A_2'

$$A_2' = \int_{L_2} \frac{dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

peut s'écrire plus simplement

$$A_2' = \psi'(m, n) + \psi'(-m, -n),$$

en posant

$$\psi'(m, n) = \int_0^1 \frac{dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)};$$

il suffit, pour le voir, de répéter le raisonnement fait pour A_2 aux pages 115—117. On aura donc le développement

$$(51)\qquad -k\lambda\mu(z_1+z_2)$$

$$=\frac{16(BC'-CB')i}{\pi k\lambda\mu}\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty}(-1)^m(mC-nC')\frac{\psi'(m\,,n)+\psi'(-m\,,-n)}{r^{-m}q^{-n}-r^mq^n}e^{-2mv-2nw}$$

que l'on pourrait ordonner suivant les cosinus des arcs $(2miv+2niw)$. Le coefficient $Q_{0,0}$ devra être calculé à part, comme nous l'avons fait pour $P_{0,0}$.

Il est important de remarquer que la fonction $\psi'(m\,,n)$ peut se ramener à $\psi(m\,,n)$; cela revient à dire que les constantes A_1' et A_2' peuvent s'exprimer en fonction de A_1 et A_2. En effet, comme

$$V(z)=\int_0^z\frac{B-Cz}{s}dz,\qquad W(z)=-\int_0^z\frac{B'-C'z}{s}dz,$$

l'on a, pour l'exponentielle $E(z)$, l'expression

$$E(z)=e^{2mV(z)+2nW(z)}=e^{2(mB-nB')\int_0^z\frac{dz}{s}-2(mC-nC')\int_0^z\frac{zdz}{s}}$$

d'où l'on déduit, en différentiant,

$$dE(z)=2(mB-nB')\frac{dz}{s}E(z)-2(mC-nC')\frac{z\,dz}{s}E(z).$$

Intégrons cette identité de 0 à 1, l'intégrale du premier membre sera

$$E(1)-E(0)=(-1)^m-1,$$

car

$$V(0)=W(0)=0,\qquad V(1)=-\frac{i\pi}{2},\qquad W(1)=0;$$

on aura donc

$$(-1)^m-1=2(mB-nB')\psi'(m\,;n)-2(mC-nC')\psi(m\,,n),$$

formule qui exprime $\psi'(m\,,n)$ en fonction de $\psi(m\,,n)$ à condition toutefois que $(mB-nB')$ ne soit pas nul. En retranchant de la relation ci-dessus celle qu'on en déduit par le changement de m et n en $-m$, $-n$, on a

$$(mB - nB')[\psi'(m, n) + \psi'(-m, -n)]$$
$$= (mC - nC')[\psi(m, n) + \psi(-m, -n)],$$

formule qui permettra d'exprimer $[\psi'(m, n) + \psi'(-m, -n)]$ en fonction de $[\psi(m, n) + \psi(-m, -n)]$, à condition que $(mB - nB')$ ne soit pas nul.

Connaissant ainsi les développements en série de $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$, on écrira immédiatement les développements en séries trigonométriques des cinq fonctions abéliennes

$$\frac{\varphi^2_{1,0}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}, \quad \frac{\varphi^2_{2,0}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}, \quad \frac{\varphi^2_{3,1}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}, \quad \frac{\varphi^2_{3,2}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}, \quad \frac{\varphi^2_{3,3}(v, w)}{\varphi^2_{0,0}(v, w)}$$

qui, d'après les formules données par Rosenhain à la page 422 de son Mémoire, s'expriment toutes linéairement en $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$. (Nos variables z_1 et z_2 sont celles que Rosenhain appelle x_1 et x_2). Dans ces cinq développements figurera la seule intégrale définie appelée $\psi(m, n)$

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{2m\,V(z) + 2n\,W(z)},$$

le chemin d'intégration étant *rectiligne.*

Il est essentiel de remarquer que les modules des intégrales

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{2m\,V(z) + 2n\,W(z)}, \qquad \psi'(m, n) = \int_0^1 \frac{dz}{s} e^{2m\,V(z) + 2n\,W(z)}$$

restent finis quand m et n croissent indéfiniment par valeurs positives ou négatives. En effet, ces deux intégrales sont prises le long de l'axe Ox des quantités réelles: or, le long de cet axe les intégrales

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \qquad W(z) = -\int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz$$

sont *purement imaginaires,* puisque les constantes B, C, B', C' le sont (pages 90 et 91); le module de l'élément différentiel de l'intégrale $\psi(m, n)$

$$\frac{z\,dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

est donc égal à

$$\frac{z\,dz}{s}$$

et, le module de l'intégrale $\psi(m, n)$ étant plus petit que la somme des modules des éléments différentiels, on a

$$|\psi(m, n)| \leq \int_0^1 \frac{z\,dz}{s},$$

où, d'après la notation de M. Weierstrass, nous appelons $|u|$ le module de la quantité imaginaire u. On trouve de même, pour le module de $\psi'(m, n)$

$$|\psi'(m, n)| \leq \int_0^1 \frac{dz}{s}.$$

Cette remarque permet de voir comment convergent les séries que nous avons obtenues.

Sur un cas particulier dans lequel certains coefficients des séries précédentes se présentent sous forme indéterminée.

Dans la détermination des coefficients $P_{m,n}$ et $Q_{m,n}$ nous avons supposé que le dénominateur de ces coefficients

$$1 - r^{2m} q^{2n}$$

est *différent de zéro.* Ce dénominateur est toujours nul pour $m = n = 0$; aussi faut-il, comme nous l'avons vu, calculer à part les coefficients $P_{0,0}$ et $Q_{0,0}$. Mais, *si l'on ne se trouve pas dans un cas de réduction* des fonctions θ de deux variables à des fonctions θ d'une variable, ce dénominateur

$$1 - r^{2m} q^{2n}$$

ne sera nul que pour $m = n = 0$.

En effet, supposons-le *nul* pour $m = m'$, $n = n'$

$$r^{2m'} q^{2n'} = 1,$$

alors, comme on a posé $r = e^{-2A}$, on aura

$$e^{-4m'A + 2n' \log q} = 1,$$

d'où, A et $\log q$ étant réels,

$$-4m'A + 2n' \log q = 0.$$

Dans ce cas, il y aurait donc *réduction* pour les fonctions θ et les fonctions abéliennes correspondantes. J'en rappelle rapidement la raison. Les fonctions abéliennes précédentes de v et w admettent les couples de périodes suivants:

$$\text{pour } v\text{:} \quad \log p\,, \quad -2A$$

$$\text{et pour } w\text{:} \quad -2A\,, \quad \log q.$$

En appelant $F(v, w)$ une de ces fonctions, on aura donc

$$F(v + m \log p - 2nA\,, w - 2mA + n \log q) = F(v, w),$$

m et n désignant des entiers quelconques. Si l'on fait, en particulier, $m = m'$, $n = n'$, la quantité ajoutée à w devient nulle d'après l'hypothèse faite, et il vient

$$F(v + m' \log p - 2n'A\,, w) = F(v, w)$$

comme on a aussi

$$F(v + \pi i\,, w) = F(v, w);$$

on voit que la fonction abélienne $F(v, w)$ est une fonction ***doublement périodique*** de v aux périodes $m' \log p - 2n'A$ et πi. Il y a donc réduction, comme nous l'avons annoncé. La quantité

$$m' \log p - 2n'A$$

ne peut pas être nulle en même temps que

$$-2m'A + n' \log q,$$

car on aurait
$$4A^2 - \log p \,.\, \log q = 0$$

et les séries de ROSENHAIN qui définissent les fonctions $\varphi_{r,s}(v, w)$ seraient divergentes.

Supposons-nous placés dans un cas de réduction de ce genre, c'est à dire supposons
$$-2m'A + n'\log q = 0,$$

m' et n' étant premiers entre eux. La quantité
$$r^{-m}q^{-n} - r^m q^n = r^{-m}q^{-n}(1 - r^{2m}q^{2n})$$

qui figure au dénominateur du coefficient $P_{m,n}$ dans la série de la page 117, est nulle pour toutes les valeurs de m et n de la forme
$$m = \nu m', \qquad n = \nu n', \qquad\qquad (\nu = \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm \infty)$$

le numérateur
$$A_2 = \psi(m, n) + \psi(-m, -n)$$

est alors nul aussi et le coefficient $P_{m,n}$ se présente sous une forme illusoire $\frac{0}{0}$, qu'il est aisé d'éviter, comme nous allons voir.

En effet, nous avons établi les relations suivantes, pages 110 et 112
$$-A_1(1 - r^{2m}q^{2n}) + r^{2m}q^{2n}C_2 = 0,$$
$$-A_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n}C_2 = 0,$$
$$-\mathfrak{A}_1(1 - r^{2m}q^{2n}) - r^{2m}q^{2n}\mathfrak{L} + r^{2m}q^{2n}\mathfrak{C}_2 = 0,$$
$$-\mathfrak{A}_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n}\mathfrak{C}_2 = 0.$$

Puisque nous supposons
$$1 - r^{2m}q^{2n} = 0$$

et que $(1 - p^{2m}r^{2n})$ ne peut pas être nul en même temps, comme nous l'avons vu à la page précédente, ces relations donnent
$$C_2 = 0, \qquad A_2 = 0, \qquad \mathfrak{C}_2 = \mathfrak{L}, \qquad \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathfrak{L}p^m r^n}{p^m r^n - p^{-m}r^{-n}}.$$

Le coefficient $P_{m,n}$, donné par la formule

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} (A_1 \mathfrak{A}_2 - A_2 \mathfrak{A}_1)$$

devient alors

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^{2m} q^{-n} r^{2n-m} \frac{A_1 \mathfrak{L}}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

ou, d'après la valeur de $\mathfrak{L}$ (page 115)

$$\mathfrak{L} = \frac{16\pi i}{k^2 \lambda^2 \mu^2} p^{-m} r^{-n} (mC - nC'),$$

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16\pi i \Delta}{k^2 \lambda^2 \mu^2} (mC - nC') \frac{p^m q^{-n} r^{n-m} A_1}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}};$$

cette formule lève l'indétermination qui se présentait avec la première expression de $P_{m,n}$. La constante A_1 est définie par l'intégrale

$$A_1 = \int\limits_{L_1} \frac{z\,dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)},$$

l'intégrale étant prise sur le contour L_1 qui entoure les points $\frac{1}{k^2}$, $\frac{1}{\lambda^2}$ figuré à la page 111.

Si l'on pose

$$V_1(z) = V(z) - V\left(\frac{1}{k^2}\right) = \int\limits_{\frac{1}{k^2}}^{z} \frac{B - Cz}{s} dz,$$

$$W_1(z) = W(z) - W\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\int\limits_{\frac{1}{k^2}}^{z} \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

en remarquant que

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2}\log p - A, \qquad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2}\log q,$$

on obtient

$$A_1 = (-1)^m p^{-m} q^n r^{m-n} \int\limits_{L_1} \frac{z\,dz}{s} e^{2m V_1(z) + 2n W_1(z)}.$$

Cette dernière intégrale peut s'écrire

$$\psi''(m, n) + \psi''(-m, -n)$$

si l'on pose

$$\psi''(m, n) = \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{z\,dz}{s} e^{2m V_1(z) + 2n W_1(z)},$$

l'intégrale étant *rectiligne:* c'est ce qu'on voit comme nous l'avons fait aux pages 116 et 117 pour une intégrale analogue. On aura donc enfin

$$P_{m,n} = \frac{16\pi i\Delta}{k^2\lambda^2\mu^2}(mC - nC'')\frac{\psi''(m, n) + \psi''(-m, -n)}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}.$$

Il serait d'ailleurs aisé de voir que cette formule convient pour toutes les valeurs de m et n; de sorte qu'on a deux formules pour développer

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}$$

suivant qu'on prend l'ancienne expression de $P_{m,n}$ où celle que nous venons d'obtenir. Ces deux développements se reconnaissent immédiatement comme équivalents à cause de la relation

$$\frac{A_2}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} = p^m q^{-n} r^{n-m} \frac{A_1}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

qui se déduit des relations (44) de la page 110 par l'élimination de C_2: puisqu'on a

$$A_2 = \psi(m, n) + \psi(-m, -n),$$
$$A_1 = (-1)^m p^{-m} q^n r^{-n+m}[\psi''(m, n) + \psi''(-m, -n)],$$

on aura la relation

$$(-1)^m \frac{\psi(m, n) + \psi(-m, -n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} = \frac{\psi''(m, n) + \psi''(-m, -n)}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

qui montre l'équivalence des deux développements et permet de lever l'indétermination chaque fois qu'elle se présente.

On pourrait faire les mêmes remarques sur le coefficient $Q_{m,n}$.

Mais nous laissons cette question de côté pour revenir au développement en séries trigonométriques de fonctions abéliennes autres que celles que nous venons de considérer et qui se ramènent à $z_1 z_2$ et $z_1 + z_2$.

Développement d'une fonction de v et w symétrique et entière en z_1 et z_2, s_1 et s_2.

Une fonction symétrique et entière en z_1 et z_2, s_1 et s_2 est une somme de termes de l'une des trois formes suivantes

$$z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu\,,\quad s_1 z_1^\nu z_2^\rho + s_2 z_1^\rho z_2^\nu\,,\quad s_1 s_2 (z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu),$$

les exposants ν et ρ étant des entiers positifs ou nuls. Il suffira donc de développer en série chacune de ces trois expressions.

Appellons $f(z_1\,,\,z_2)$ l'une de ces expressions et soit

$$f(z_1\,,\,z_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} R_{m,n} e^{-2mv-2nw},$$

développement valable pour des valeurs purement imaginaires de v et w et des valeurs voisines. On verra, d'après la même méthode que ci-dessus, que le coefficient $R_{m,n}$ est donné par l'intégrale double

$$2)\quad R_{m,n} = (-1)^m \frac{BC' - CB'}{\pi^2} p^m q^{-n} r^{n-m} \int_{L_1}\int_{L_2} \frac{f(z_1\,,\,z_2)(z_1 - z_2)}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]} dz_1 dz_2$$

obtenue en remplaçant, dans l'intégrale de la page 104, $z_1 z_2$ par $-\frac{1}{k\lambda\mu} f(z_1\,,\,z_2)$. Les indices L_1 et L_2 signifient, comme plus haut, que l'intégrale est étendue aux valeurs réelles de z_1 et z_2 représentées par les contours L_1 et L_2 supposés infiniment voisins de l'axe Ox. Désignons par $E(z)$ l'exponentielle

$$E(z) = e^{2mV(z)+2nW(z)};$$

alors en supposant

$$f(z_1\,,\,z_2) = z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu,$$

nous serons ramenés à calculer l'expression

$$\int_{L_1} \frac{z_1^{\nu+1}}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^\rho}{s_2} E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} \frac{z_1^\rho}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^{\nu+1}}{s_2} E(z_2) dz_2$$

$$- \int_{L_1} \frac{z_1^\nu}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^{\rho+1}}{s_2} E(z_2) dz_2 + \int_{L_1} \frac{z_1^{\rho+1}}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^\nu}{s_2} E(z_2) dz_2,$$

formée d'intégrales simples.

De même en supposant

$$f(z_1, z_2) = s_1 z_1^\nu z_2^\rho + s_2 z_1^\rho z_2^\nu$$

nous aurons, pour calculer $R_{m,n}$, à calculer l'expression

$$\int_{L_1} z_1^{\nu+1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^\rho}{s_2} E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} \frac{z_1^\rho}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^{\nu+1} E(z_2) dz_2$$

$$+ \int_{L_1} \frac{z_1^{\rho+1}}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^\nu E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} z_1^\nu E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^{\rho+1}}{s_2} E(z_2) dz_2,$$

composée d'intégrales simples.

Enfin si nous supposons

$$f(z_1, z_2) = s_1 s_2 (z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu)$$

nous aurons à calculer l'expression

$$\int_{L_1} z_1^{\nu+1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^\rho E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} z_1^\rho E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^{\nu+1} E(z_2) dz_2$$

$$+ \int_{L_1} z_1^{\rho+1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^\nu E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} z_1^\nu E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^{\rho+1} E(z_2) dz_2,$$

formée d'intégrales simples.

Si l'on considère l'intégrale de fonction à multiplicateurs

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu dz}{s} E(z), \qquad \nu \geqq 0,$$

les constantes

$$A_{1,\nu}=\int_{L_1}\frac{z_1^\nu dz_1}{s_1}E(z_1),\qquad A_{2,\nu}=\int_{L_2}\frac{z_2^\nu dz_2}{s_2}E(z_2)$$

sont les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures a_1 et a_2; de même, les constantes

$$A'_{1,\nu}=\int_{L_1}z_1^\nu E(z_1)dz_1,\qquad A'_{2,\nu}=\int_{L_2}z_2^\nu E(z_2)dz_2$$

sont les modules de périodicité relatifs aux coupures a_1 et a_2 de l'intégrale de fonction à multiplicateurs

$$\varphi_\nu(z)=\int z^\nu E(z)dz. \qquad (\nu\geqq 0)$$

Ces fonctions à multiplicateurs

$$\frac{z^\nu}{s}E(z)\,,\ z^\nu E(z)$$

ont d'ailleurs les mêmes multiplicateurs que l'exponentielle $E(z)$, c'est à dire les multiplicateurs

$$m_1\,,\,m_2\,,\,n_1\,,\,n_2$$

définis précédemment (page 108)

$$m_1=1,\qquad m_2=1,\qquad n_1=r^{2m}q^{2n},\qquad n_2=p^{2m}r^{2n}.$$

On voit que le calcul des coefficients $R_{m,n}$ se ramène au calcul de déterminants de l'une des trois formes suivantes

$$A_{1,\nu}A_{2,\rho}-A_{1,\rho}A_{2,\nu},\qquad A_{1,\nu}A'_{2,\rho}-A_{2,\nu}A'_{1,\rho},\qquad A'_{1,\nu}A'_{2,\rho}-A'_{1,\rho}A'_{2,\nu}$$

où $\nu\geqq 0\,,\,\rho\geqq 0$.

Toutes ces intégrales

$$\psi_\nu=\int\frac{z^\nu}{s}E(z)dz,\qquad \varphi_\nu=\int z^\nu E(z)dz$$

où

$$\nu=0\,,1\,,2\,,\ldots,\infty$$

se ramènent à trois d'entre elles. En effet faisons, pour abréger,

$$E(z) = e^{2m V(z) + 2n W(z)} = e^{\int_0^z \frac{M+Nz}{s} dz}$$

avec

$$M = 2(mB - nB'), \qquad N = -2(mC - nC').$$

L'identité

$$dE(z) = M\frac{E(z)}{s}dz + N\frac{z}{s}E(z)dz$$

donne par l'intégration

(53) $$E(z) = M\psi_0 + N\psi_1$$

ce qui ramène le calcul de ψ_0 à celui de ψ_1.

Puis l'identité

$$dz^\nu E(z) = \nu z^{\nu-1}E(z)dz + M\frac{z^\nu}{s}E(z)dz + N\frac{z^{\nu+1}}{s}E(z)dz$$

où $\nu \geqq 1$ donne par l'intégration

(54) $$z^\nu E(z) = \nu\varphi_{\nu-1} + M\psi_\nu + N\psi_{\nu+1},$$

formule qui ramène le calcul des fonctions

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$$

à celui des fonctions

$$\psi_1, \psi_2, \psi_3, \ldots.$$

D'autre part, soit

$$s^2 = z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z) = 2\alpha_0z^5 + \alpha_1z^4 + 2\alpha_2z^3 + \alpha_3z^2 + 2\alpha_4z$$

d'où

$$\frac{ds}{dz} = \frac{5\alpha_0z^4 + 2\alpha_1z^3 + 3\alpha_2z^2 + \alpha_3z + \alpha_4}{s};$$

la différentiation de l'expression $sz^\nu E(z)$ donne

$$d[sz^\nu E(z)] = z^\nu\frac{ds}{dz}E(z)dz + \nu sz^{\nu-1}E(z)dz + sz^\nu(M + Nz)\frac{dz}{s}E(z)$$

ou en réduisant

$$d[sz^\nu E(z)]$$

$$= \frac{(2\nu+5)\alpha_0 z^{\nu+4} + (\nu+2)\alpha_1 z^{\nu+3} + (2\nu+3)\alpha_2 z^{\nu+2} + (\nu+1)\alpha_3 z^{\nu+1} + (2\nu+1)\alpha_4 z^\nu}{s} E(z)dz$$

$$+ Mz^\nu E(z)dz + Nz^{\nu+1}E(z)dz.$$

L'intégration de cette identité donne:

$$(55) \quad sz^\nu E(z) = (2\nu+5)\alpha_0\psi_{\nu+4} + (\nu+2)\alpha_1\psi_{\nu+3} + (2\nu+3)\alpha_2\psi_{\nu+2}$$
$$+ (\nu+1)\alpha_3\psi_{\nu+1} + (2\nu+1)\alpha_4\psi_\nu + M\varphi_\nu + N\varphi_{\nu+1};$$

remplaçons, dans cette relation, φ_ν et $\varphi_{\nu+1}$ par leurs expressions déduites de la relation (54) de la page précédente dans laquelle on changerait successivement ν en $\nu+1$ et $\nu+2$:

$$\varphi_\nu = \frac{z^{\nu+1}E(z)}{\nu+1} - \frac{M}{\nu+1}\psi_{\nu+1} - \frac{N}{\nu+1}\psi_{\nu+2},$$

$$\varphi_{\nu+1} = \frac{z^{\nu+2}E(z)}{\nu+2} - \frac{M}{\nu+2}\psi_{\nu+2} - \frac{N}{\nu+2}\psi_{\nu+3}.$$

Nous aurons

$$(56) \qquad \left(sz^\nu - \frac{M}{\nu+1}z^{\nu+1} - \frac{N}{\nu+2}z^{\nu+2}\right)E(z) = (2\nu+5)\alpha_0\psi_{\nu+4}$$
$$+\left[(\nu+2)\alpha_1 - \frac{N^2}{\nu+2}\right]\psi_{\nu+3} + \left[(2\nu+3)\alpha_2 - \frac{MN}{\nu+1} - \frac{MN}{\nu+2}\right]\psi_{\nu+2}$$
$$+\left[(\nu+1)\alpha_3 - \frac{M^2}{\nu+1}\right]\psi_{\nu+1} + (2\nu+1)\alpha_4\psi_\nu,$$

relation exprimant l'intégrale $\psi_{\nu+4}$ en fonction des quatre précédentes $\psi_{\nu+3}, \psi_{\nu+2}, \psi_{\nu+1}, \psi_\nu$. En faisant successivement dans cette relation

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots$$

on exprimera toutes les fonctions ψ_ν à l'aide des quatre premières

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3;$$

et comme ψ_0 et ψ_1 sont liés par une relation établie précédemment, (relation (53) de la page 131), ou pourra exprimer toutes les fonctions ψ_ν à l'aide des trois

$$\psi_1 , \psi_2 , \psi_3 .$$

Comme chaque fonction φ_ν se ramène aux fonctions ψ_ν par la formule (54) de la page 131, on voit *que toutes les intégrales* appelés φ_ν et ψ_ν, $(\nu = 0 , 1 , 2 , 3 , \ldots , \infty)$ s'expriment en fonction linéaire à coefficients constants de

$$\psi_1 , \psi_2 , \psi_3$$

et de *fonctions connues.*

Ces *fonctions connues* sont de la forme

$$sz^\nu E(z) , \; z^\nu E(z),$$

et leurs modules de périodicité sont *nuls.* Les modules de périodicité d'une quelconque des intégrales φ_ν et ψ_ν sont donc des fonctions *linéaires homogènes* des modules de périodicité correspondants des trois intégrales

$$\psi_1 , \psi_2 , \psi_3 .$$

Par exemple

$$\begin{aligned}
A_{1,\nu} &= aA_{1,1} + a'A_{1,2} + a''A_{1,3}, \\
A_{2,\nu} &= aA_{2,1} + a'A_{2,2} + a''A_{2,3}, \\
A_{1,\rho} &= bA_{1,1} + b'A_{1,2} + b''A_{1,3}, \\
A_{2,\rho} &= bA_{2,1} + b'A_{2,2} + b''A_{2,3}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
A_{1,\nu}A_{2,\rho} - A_{2,\nu}A_{1,\rho} = &(ab' - ba')(A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}), \\
&+ (ab'' - ba'')(A_{1,1}A_{2,3} - A_{2,1}A_{1,3}), \\
&+ (a'b'' - b'a'')(A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}).
\end{aligned}$$

Le calcul du déterminant

$$A_{1,\nu}A_{2,\rho} - A_{2,\nu}A_{1,\rho}$$

se trouve ainsi ramené, quels que soient les entiers ν et ρ, à celui des trois déterminants

$$(57) \qquad A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}, \quad A_{1,1}A_{2,3} - A_{2,1}A_{1,3}, \quad A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}.$$

Il en sera de même des déterminants tels que

$$A_{1,\nu}A'_{2,\rho} - A_{2,\nu}A'_{1,\rho},$$
$$A'_{1,\nu}A'_{2,\rho} - A'_{2,\nu}A'_{1,\rho}$$

qui peuvent aussi figurer dans l'expression de $R_{m,n}$. (Voyez page 130).

On sera donc toujours ramené, par voie récurrente, au calcul des trois déterminants (57) de la page précédente.

Or le premier de ces trois déterminants n'est autre chose que celui qui a été désigné à la page 106 par

$$A_1\mathfrak{A}_2 - A_2\mathfrak{A}_1;$$

en effet on a

$$A_1 = A_{1,1}, \qquad A_2 = A_{1,2}, \qquad \mathfrak{A}_1 = A_{2,1} \qquad \mathfrak{A}_2 = A_{2,2};$$

ce déterminant à été calculé et exprimé à l'aide de l'intégrale définie rectiligne

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} E(s).$$

Le second des déterminants (57)

$$A_{1,1}A_{2,3} - A_{2,1}A_{1,3}$$

peut, par les mêmes méthodes, être exprimé à l'aide de la même intégrale définie rectiligne $\psi(m, n)$.

Enfin le troisième de ces déterminants

$$A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}$$

exige pour son expression deux nouvelles intégrales rectilignes analogues à $\psi(m, n)$

$$\chi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^2\,dz}{s} E(z), \qquad \varpi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^3\,dz}{s} E(z).$$

En effet les deux intégrales

$$\psi_2(z) = \int \frac{z^2\,dz}{s} E(z), \qquad \psi_3(z) = \int \frac{z^3\,dz}{s} E(z)$$

dont la première n'est autre chose que l'intégrale appelée précédemment $\varpi(z)$ (pages 110 et suivantes)

$$\varpi(z)=\int\frac{z^2\,dz}{s}E(z)$$

sont des intégrales de troisième espéce de fonctions aux multiplicateurs

$$m_1=1,\qquad m_2=1,\qquad n_1=r^{2m}q^{2n},\qquad n_2=p^{2m}r^{2n};$$

ces intégrales ont pour point critique logarithmique le point ∞. Elles sont uniformes sur la surface de Riemann R_{abcl} figurée à la page 111. Appelons $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}'$ les modules de périodicité de ces intégrales ψ_2 et ψ_3 le long de la coupure l; nous avons calculé $\mathfrak{L}$ précédemment aux pages 113—115; en suivant la même méthode on aura $\mathfrak{L}'$. Le développement que nous avons établi à la page 114

$$\frac{z^2}{s}E(z)=\frac{p^{-m}r^{-n}}{k\lambda\mu}\left[\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}+\frac{\delta_0}{z}+\frac{\delta_1}{z^{\frac{3}{2}}}+\frac{\delta_2}{z^2}+\dots\right]$$

donne immédiatement

$$\frac{z^3}{s}E(z)=\frac{p^{-m}r^{-n}}{k\lambda\mu}\left[z^{\frac{1}{2}}+\delta_0+\frac{\delta_1}{z^{\frac{1}{2}}}+\frac{\delta_2}{z}+\dots\right];$$

alors

$$\mathfrak{L}'=4\pi i\frac{p^{-m}r^{-n}}{k\lambda\mu}\delta_2.$$

Nous avons établi les deux relations suivantes entre les modules de périodicité $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{L}$ de l'intégrale $\psi_2(z)$ ou $\varpi(z)$, modules que nous appelons ici, pour plus de symétrie dans les formules, $A_{1,2}, A_{2,2}, C_{2,2}, \mathfrak{L}$ (voyez page 112)

$$A_{1,2}=\frac{n_1C_{2,2}-n_1\mathfrak{L}}{1-n_1},\qquad A_{2,2}=-\frac{n_2C_{2,2}}{1-n_2}.$$

On aura de même, en appelant

$$A_{1,3}, A_{2,3}, C_{2,3}, \mathfrak{L}'$$

les modules de périodicité de $\psi_3(z)$

$$A_{1,3} = \frac{n_1 C_{2,3} - n_1 \mathfrak{L}'}{1 - n_1}, \qquad A_{2,3} = -\frac{n_2 C_{2,3}}{1 - n_2}.$$

D'où l'on tire

$$A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3} = \frac{n_1 n_2}{(1 - n_1)(1 - n_2)}(\mathfrak{L}C_{2,3} - \mathfrak{L}'C_{2,2})$$

ou encore

$$A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3} = \frac{n_1}{1 - n_1}A_{2,2}\mathfrak{L}' - \frac{n_2}{1 - n_2}A_{2,3}\mathfrak{L}.$$

Le calcul du troisième des déterminants (57) est ainsi ramené au calcul des deux modules de périodicité

$$A_{2,2} = \int\limits_{L_2} \frac{z^2 dz}{s} E(z), \qquad A_{2,3} = \int\limits_{L_2} \frac{z^3 dz}{s} E(z).$$

Si l'on pose

$$\chi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{s} E(z), \qquad \varpi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^3 dz}{s} E(z),$$

les intégrales étant rectilignes, on voit, comme aux pages 115—117, que l'on a

$$A_{2,2} = \chi(m, n) + \chi(-m, -n), \qquad A_{2,3} = \varpi(m, n) + \varpi(-m, -n).$$

En résumé, le calcul des coefficients des développements en série trigonométrique d'une fonction abélienne exprimée par une fonction symétrique entière de z_1 et z_2, s_1 et s_2, se ramène toujours par des opérations algébriques élémentaires au calcul des trois intégrales définies rectilignes

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z\,dz}{s} E(z), \qquad \chi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{s} E(z), \qquad \varpi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^3 dz}{s} E(z)$$

où

$$E(z) = e^{2m V(z) + 2n W(z)}.$$

Il serait, par exemple, bien facile d'appliquer cette méthode générale au développement de $s_1 s_2$ ou de $s_1 + s_2$.

On peut, par les mêmes méthodes, calculer les coefficients des développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes de l'une des deux formes

$$R(s_1, z_1)R(s_2, z_2), \quad R(s_1, z_1) + R(s_2, z_2),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction rationnelle de s et z. Pour que ces développements soient convergents comme les précédents, il faut et il suffit que $R(s, z)$ reste finie quand z varie par valeurs réelles de 0 à 1 et de $\frac{1}{k^2}$ à $\frac{1}{\lambda^2}$.

Développements de fonctions non symétriques en z_1, s_1 et z_2, s_2.

Les méthodes que nous avons appliquées au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques procédant suivant les puissances de e^{2v} et e^{2w}, peuvent, dans certains cas, donner les coefficients du développement en séries trigonométriques de fonctions *non-symétriques* en z_1, s_1 et z_2, s_2, fonctions qui s'expriment par des *racines carrées* de fonctions abéliennes.

Prenons, par exemple, la fonction

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} z_1 z_2,$$

où nous supposons z_2 réel et compris entre 0 et 1, z_1 réel et compris entre $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$. Cette fonction s'exprime par une racine carrée de fonctions abéliennes, car

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} = \frac{k\lambda\mu}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2}},$$

la racine étant prise positivement. Nous avons vu que, si les variables v et w partent de valeurs *purement imaginaires* v_0 et w_0 et varient par valeurs purement imaginaires de v_0 et w_0 à $v_0 + \pi i$, $w_0 + \pi i$, les variables z_2 et z_1 oscillent sur l'axe des quantités réelles la première z_2 entre 0 et 1, la seconde z_1 entre $\frac{1}{k^2}$ et $\frac{1}{\lambda^2}$ de façon à décrire les lacets appelés

L_2 et L_1. (Page 100.) Lorsque v et w varient ainsi de v_0 et w_0 à $v_0+\pi i$ et $w_0+\pi i$, la fonction

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2-z_1}z_1z_2$$

est donc uniforme, finie et continue. Elle est pour ces valeurs *purement imaginaires* de v et w développable en une série de la forme

$$-k\lambda\mu\frac{z_1z_2}{z_2-z_1}=\sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty}S_{m,n}e^{-2mv-2nw}$$

avec

$$S_{m,n}=\frac{k\lambda\mu}{\pi^2}\int_{v_0}^{v_0+\pi i}dv\int_{w_0}^{w_0+\pi i}\frac{z_1z_2}{z_2-z_1}e^{2mv+2nw}dw.$$

En faisant, dans cette intégrale double, le changement de variables défini par les équations d'inversion de Jacobi

$$v=V(z_1)+V(z_2)-V\left(\frac{1}{k^2}\right),\qquad w=W(z_1)+W(z_2)-W\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

on trouve, comme pour $P_{m,n}$ (pages 102—104),

$$S_{m,n}=\Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right)-2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)}\int_{L_1}\int_{L_2}\frac{z_1z_2dz_1dz_2}{s_1s_2}e^{2m[V(z_1)+V(z_2)]+2n[W(z_1)+W(z_2)]},$$

formule qui se déduit de la formule (42) de la page 104 en y remplaçant z_1z_2 par $\frac{z_1z_2}{z_2-z_1}$. L'on aura donc, d'après les valeurs des intégrales $V\left(\frac{1}{k^2}\right)$ et $W\left(\frac{1}{k^2}\right)$,

$$S_{m,n}=(-1)^m k\lambda\mu\frac{BC'-CB'}{\pi^2}p^m q^{-n}r^{n-m}A_1A_2,$$

où A_1 et A_2 désignent comme précédemment (pages 106 et suivantes) les intégrales

$$A_1=\int_{L_1}\frac{z_1dz_1}{s_1}e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)},\qquad A_2=\int_{L_2}\frac{z_2dz_2}{s_2}e^{2mV(z_2)+2nW(z_2)},$$

dont les valeurs sont liées par les relations (44) de la page 110:

$$-A_1(1 - r^{2m}q^{2n}) + r^{2m}q^{2n}C_2 = 0,$$
$$-A_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n}C_2 = 0,$$

qui donnent par l'élimination de C_2

$$A_1 = -q^n p^{-m} r^{m-n} \frac{p^{-m}r^{-n} - p^m r^n}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} A_2 .$$

On a donc

$$S_{m,n} = (-1)^m k\lambda\mu \frac{BC' - CB'}{\pi^2} \cdot \frac{p^m r^n - p^{-m}r^{-n}}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} A_2^2,$$

et comme

$$A_2 = \psi(m, n) + \psi(-m, -n),$$

on voit que le coefficient $S_{m,n}$ est encore exprimé à l'aide de l'intégrale définie appelée $\psi(m, n)$.

On trouverait de même les développements de fonctions de la forme

$$\frac{f(s_1, z_1; s_2, z_2)}{z_2 - z_1}$$

où le numérateur $f(s_1, z_1; s_2, z_2)$ désigne une fonction symétrique entière de s_1, z_1 et s_2, z_2.

Sans insister davantage sur ces développements, j'arrive à une autre question intéressante, à savoir celle de l'*inversion* d'une intégrale ultra-elliptique, $\frac{1}{i} V(z)$ par exemple, pour *des valeurs réelles de z et de l'intégrale.*

Les intégrales définies appelées $\psi(m, n)$, $\chi(m, n)$, $\varpi(m, n)$ se présentent dans une autre espèce de problèmes qui se posent souvent en mécanique rationelle.

Soit, pour fixer les idées, la relation

(58) $$t = \frac{1}{i}\int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

où B et C sont les mêmes constantes purement imaginaires que précédemment et où s est lié à z par la même relation que ci-dessus

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2 z)(1 - \lambda^2 z)(1 - \mu^2 z).$$

Supposons que t désigne le *temps* et z une *variable réelle* servant à fixer la position d'un mobile au temp t. Alors les variables z et t doivent rester réelles, et t aller toujours en croissant.

Dans ces conditions, comme $\frac{B}{i}$ et $\frac{C}{i}$ sont des constantes réelles positives

$$\frac{B}{i} > \frac{C}{i},$$

z croîtra de 0 à 1, le radical

$$s = \sqrt{(zk\lambda\mu)}$$

étant pris positivement; puis z décroîtra de 1 à 0, le même radical s étant pris négativement; puis z croîtra de nouveau de 0 à 1, s étant positif; et ainsi de suite indéfiniment. Nous avons vu (page 90) que l'on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{B - Cz}{s} dz;$$

d'après cela, si dans la relation (58) de la page précédente

$$t = \frac{1}{i}\int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz \tag{58}$$

on veut prendre le temps t comme variable *indépendante* et la variable réelle z comme fonction de t, on voit que z est une fonction réelle de t admettant la période π et restant finie (comprise entre 0 et 1) pour toutes les valeurs du temps t. On pourra donc développer z en série trigonométrique de la forme

$$z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p_m e^{-2mti}$$

convergente pour toutes les valeurs réelles de t. La connaissance des coefficients de ce développement permettrait donc de réaliser, à ce point de vue spécial, l'*inversion* de l'intégrale (58). Le coefficient p_m est donné par l'intégrale définie

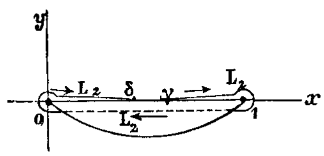
$$p_m = \frac{1}{\pi}\int_{t_0}^{t_0+\pi} z e^{2mti}\,dt,$$

ou, en faisant, dans cette intégrale, le changement de variable

$$t = \frac{1}{i}\int_0^z \frac{B - Cz}{s}\,dz = \frac{1}{i}\,V(z),$$

$$p_m = \frac{1}{i\pi}\int_{L_2} \frac{(B - Cz)\,z\,dz}{s}\,e^{2m\,V(z)},$$

l'indice L_2 signifiant comme précédemment (page 101 et figure de la page 100) que le point z décrit un chemin formé de la portion $\gamma 1$ de l'axe Ox dans le feuillet supérieur ($s > 0$), de la portion $1, 0$ du même axe dans le feuillet inférieur ($s < 0$), enfin de la portion 0δ du même axe dans le feuillet supérieur ($s > 0$); δ étant infiniment voisin de γ. Pour pouvoir figurer ce chemin L_2, nous l'avons représenté non comme confondu avec le segment 01 (ce qu'il est en réalité), mais comme infiniment rapproché de ce segment.



Nous avons vu précédemment que l'on a

$$\int_{L_2} \frac{z\,dz}{s}\,e^{2m\,V(z)+2n\,W(z)} = \psi(m, n) + \psi(-m, -n),$$

$$\int_{L_2} \frac{z^2\,dz}{s}\,e^{2m\,V(z)+2n\,W(z)} = \chi(m, n) + \chi(-m, -n).$$

On aura donc, pour déterminer p_m, l'équation

$$p_m = \frac{B}{\pi i}[\psi(m, 0) + \psi(-m, 0)] - \frac{C}{\pi i}[\chi(m, 0) + \chi(-m, 0)],$$

où

$$\psi(m\,,\,0)=\int\limits_0^1 \frac{z\,dz}{s}\,e^{2m\,V(z)},$$

$$\chi(m\,,\,0)=\int\limits_0^1 \frac{z^2\,dz}{s}\,e^{2m\,V(z)}.$$

On est donc bien ramené, pour calculer p_m, aux mêmes intégrales que pour développer les fonctions abéliennes précédentes en séries trigonométriques.

On verra de même que si l'on veut développer non seulement z mais z^ν ou bien sz^ν (ν entier positif) en série trigonométrique ordonnée par rapport aux puissances de e^{2ti}, le calcul des coefficients se ramène à celui des trois intégrales

$$\psi(m\,,\,0)\,,\ \chi(m\,,\,0)\,,\ \varpi(m\,,\,0)$$

en vertu des formules de réduction des pages 131 et suivantes.

On arrive donc à cette conclusion remarquable que, si l'on sait développer en séries trigonométriques les fonctions abéliennes

$$z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu,$$

on sait en même temps faire l'inversion de l'intégrale ultraelliptique

$$t=\frac{1}{i}\int\limits_0^z \frac{B-Cz}{s}\,dz$$

z et t réels) et développer

$$z\,,\,z^2,\,\ldots\,,\,z^\nu\,,\,\ldots\,,\,s\,,\,sz\,,\,sz^2,\,\ldots\,,\,sz^\nu,\,\ldots$$

en séries trigonométriques procédant suivant les puissances de e^{2ti}.

Ces résultats s'étendraient sans peine à l'inversion d'une intégrale ultraelliptique de la forme plus générale

$$t=\frac{\nu}{i}\int\limits_0^z \frac{B-Cz}{s}\,dz+\frac{\rho}{i}\int\limits_0^z \frac{B'-C'z}{s}\,dz,$$

ν et ρ étant des entiers tels que l'expression

$$\nu(B - Cz) + \rho(B' - C'z)$$

ne s'annule pas entre o et 1.

Les intégrales $\psi(m, n)$, $\chi(m, n)$, $\varpi(m, n)$ comprennent comme cas très-particuliers les fonctions de Bessel.

Dans les calculs précédents (pages 131 et suivantes) relatifs à la réduction des intégrales de la forme

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu\, dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}, \qquad \varphi_\nu(z) = \int z^\nu dz\, e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

où ν est un entier positif ou nul, à trois d'entre elles ψ_1, ψ_2, ψ_3, nous avons supposé m et n entiers, d'après la nature de la question qu'il s'agissait de résoudre. Les formules de réduction que nous avons établies sont les mêmes lorsque m et n ne sont plus des nombres entiers, mais désignent des *constantes quelconques.*

On en conclut que, quels que soient m et n, entiers ou non, les intégrales définies

$$\int_0^1 \frac{z^\nu\, dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}, \qquad \int_0^1 z^\nu dz\, e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

se ramènent aux trois que nous avons appelées

$$\psi(m, n), \ \chi(m, n), \ \varpi(m, n).$$

Ces dernières intégrales sont des fonctions de m et n qui comprennent comme cas limites les fonctions de Bessel.

Par exemple m et n étant quelconques, l'expression

$$2mV(z) + 2nW(z)$$

est de la forme

$$\int_0^z \frac{\alpha + \beta z}{s} dz$$

α et β désignant des constantes arbitraires linéaires et homogènes en m et n. L'intégrale $\psi(m, n)$ devient alors

$$\int_0^1 \frac{z\,dz}{s} e^{\int_0^z \frac{\alpha+\beta z}{s} dz}$$

où

$$s^2 = z(1-z)(1-k^2 z)(1-\lambda^2 z)(1-\mu^2 z).$$

Supposons, comme cas limite,

$$k = \lambda = \mu = 0, \qquad s^2 = z(1-z);$$

l'intégrale ci-dessus où l'on fait

$$z = \sin^2\varphi, \qquad s = \sin\varphi\cos\varphi, \qquad \frac{dz}{s} = 2d\varphi$$

prend la forme

$$2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\,.\,d\varphi\,.\,e^{(2\alpha+\beta)\varphi - \frac{\beta}{2}\sin 2\varphi},$$

intégrale qui dans l'hypothèse

$$2\alpha + \beta = \nu i, \quad (\nu \text{ entier})$$

se ramène immédiatement à des fonctions de Bessel de la variable $\frac{\beta}{2}$. (Voyez, par exemple, le Traité de Todhunter: *On Laplace's, Lamé's and Bessel's Functions* (pages 287 et suivantes).

La méthode employée dans le chapitre précédent s'applique aux fonctions abéliennes les plus générales. Dans un supplément, nous montrons en particulier comment cette méthode s'étend aux fonctions abéliennes qui naissent de l'inversion d'intégrales hyperelliptiques d'un genre quelconque. Puis nous indiquons comment nos recherches sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs peuvent être étendues à l'étude de l'intégrale générale d'une classe importante d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Supplément.

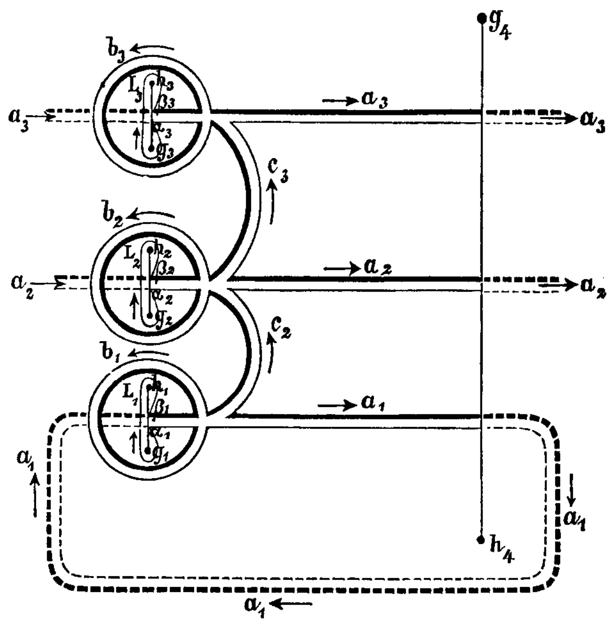
Développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes résultant de l'inversion d'intégrales hyperelliptiques.

La méthode que nous avons suivie dans le premier cahier, pour calculer les coefficients des développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes résultant de l'inversion d'intégrales ultraelliptiques, peut être étendue à des intégrales hyperelliptiques dont le genre p est quelconque.

C'est ce que nous allons montrer en supposant, pour simplifier, $p = 3$ et en partant de la relation algébrique

$$s^2 = (g_1 - z)(h_1 - z)(g_2 - z)(h_2 - z)(g_3 - z)(h_3 - z)(g_4 - z)(h_4 - z)$$

où $g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, g_4, h_4$ désignent des constantes inégales. La surface R_{abc} de Riemann correspondant à cette relation se trouve figurée dans l'Ouvrage de C. NEUMANN (loc. cit. page 179); nous la reproduisons ici en donnant aux coupures c_2 et c_3 la disposition particulière que nous sommes convenus d'adopter:



Soient alors

$$w_1(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_1 + q_1 z + r_1 z^2}{s} dz,$$

$$w_2(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_2 + q_2 z + r_2 z^2}{s} dz,$$

$$w_3(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_3 + q_3 z + r_3 z^2}{s} dz,$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à cette surface de Riemann, $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, p_3, q_3, r_3$ étant des constantes convenables. Les modules de périodicité de ces intégrales sont (C. Neumann, page 246) donnés par le tableau suivant

Coupures →	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
$w_1(z)$	πi	o	o	b_{11}	b_{12}	b_{13}
$w_2(z)$	o	πi	o	b_{21}	b_{22}	b_{23}
$w_3(z)$	o	o	πi	b_{31}	b_{32}	b_{33}

avec

$$b_{jk} = b_{kj}.$$

Considérons les équations de Jacobi

$$(1) \qquad \begin{aligned} u_1 &= w_1(z_1) + w_1(z_2) + w_1(z_3), \\ u_2 &= w_2(z_1) + w_2(z_2) + w_2(z_3), \\ u_3 &= w_3(z_1) + w_3(z_2) + w_3(z_3), \end{aligned}$$

définissant z_1, z_2, z_3 en fonction de u_1, u_2, u_3.

Appelons α_1 et β_1 les points où la droite $g_1 h_1$ rencontre les deux bords de la coupure a_1 (voyez page 145), α_2 et β_2 les points où la droite

g_2h_2 rencontre les deux bords de la coupure a_2, α_3 et β_3 les points où la droite g_3h_3 rencontre les deux bords de la coupure a_3. Alors, d'après les valeurs des modules de périodicité, on a

$$\begin{array}{lll} w_1(\beta_1) - w_1(\alpha_1) = \pi i, & w_2(\beta_1) - w_2(\alpha_1) = 0, & w_3(\beta_1) - w_3(\alpha_1) = 0, \\ w_1(\beta_2) - w_1(\alpha_2) = 0, & w_2(\beta_2) - w_2(\alpha_2) = \pi i, & w_3(\beta_2) - w_3(\alpha_2) = 0, \\ w_1(\beta_3) - w_1(\alpha_3) = 0, & w_2(\beta_3) - w_2(\alpha_3) = 0, & w_3(\beta_3) - w_3(\alpha_3) = \pi i. \end{array}$$

Supposons que les variables z_1, z_2, z_3 partent respectivement des points α_1, α_2, α_3 et décrivent des contours L_1, L_2, L_3 aboutissant aux points β_1, β_2, β_3, ces contours étant choises de telle façon que les différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0$$

varient par valeurs *purement imaginaires* de 0 à πi quand z_1, z_2, z_3 décrivent les contours L_1, L_2, L_3. Par exemple, dans le cas particulier où les constantes g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, g_4, h_4 sont réelles, et rangées par ordre de grandeur, les contours L_1, L_2, L_3 sont infiniment voisins des segments de droites $\alpha_1 g_1$, $\alpha_2 g_2$, $\alpha_3 g_3$ dans le feuillet supérieur, g_1h_1, g_2h_2, g_3h_3 dans le feuillet inférieur, $h_1\beta_1$, $h_2\beta_2$, $h_3\beta_3$ dans le feuillet supérieur (voyez la figure de la page 145). C'est sur ce cas particulier que nous exposerons la méthode qui s'applique immédiatement au cas général, à condition que les contours L_1, L_2, L_3 ne se coupent pas.

Développement de la fonction abélienne $z_1z_2z_3$.

La fonction abélienne

$$z_1z_2z_3$$

est une fonction uniforme de u_1, u_2, u_3 aux périodes πi par rapport à chaque variable. Cette fonction sera pour les valeurs purement imaginaires des différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0$$

développable en une série trigonométrique de la forme:

$$z_1 z_2 z_3 = \sum P_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

où la sommation est étendue aux valeurs entières des indices $\nu_1\nu_2\nu_3$ de $-\infty$ à $+\infty$. Le coefficient $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ est donné par la formule

$$(2) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{1}{(\pi i)^3} \int_{(u_1)_0}^{(u_1)_0+\pi i} du_1 \int_{(u_2)_0}^{(u_2)_0+\pi i} du_2 \int_{(u_3)_0}^{(u_3)_0+\pi i} du_3 \,.\, z_1 z_2 z_3 \,.\, e^{2\nu_1 u_1 + 2\nu_2 u_2 + 2\nu_3 u_3};$$

les différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0$$

prenant, dans l'intégrale triple, des valeurs purement imaginaires.

Suivant la méthode employée dans la troisième partie, faisons dans cette intégrale triple (2) le changement de variables défini par les équations de Jacobi

$$u_1 = w_1(z_1) + w_1(z_2) + w_1(z_3),$$
$$u_2 = w_2(z_1) + w_2(z_2) + w_2(z_3),$$
$$u_3 = w_3(z_1) + w_3(z_2) + w_3(z_3)$$

et prenons pour nouvelles variables z_1, z_2, z_3. Comme ce changement de variables se ramène immédiatement à un changement de variables réelles, puisque le long des contours L_1, L_2, L_3 les variables z_1, z_2, z_3 peuvent être regardées comme dépendant chacune d'une variable réelle, il suffit, d'après les régles élémentaires bien connues, de remplacer $du_1 du_2 du_3$ par

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)} dz_1 dz_2 dz_3,$$

la notation

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)}$$

désignant le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial z_1} & \frac{\partial u_1}{\partial z_2} & \frac{\partial u_1}{\partial z_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial z_1} & \frac{\partial u_2}{\partial z_2} & \frac{\partial u_2}{\partial z_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial z_1} & \frac{\partial u_3}{\partial z_2} & \frac{\partial u_3}{\partial z_3} \end{vmatrix}.$$

Comme nous avons posé

$$w_1(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_1 + q_1 z + r_1 z^2}{s} dz,$$

$$w_2(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_2 + q_2 z + r_2 z^2}{s} dz,$$

$$w_3(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_3 + q_3 z + r_3 z^2}{s} dz,$$

nous avons, en appelant s_1, s_2, s_3 les valeurs que prend s pour $z = z_1$, $z = z_2$, $z = z_3$,

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)} = \frac{1}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} p_1 + q_1 z_1 + r_1 z_1^2 & p_1 + q_1 z_2 + r_1 z_2^2 & p_1 + q_1 z_3 + r_1 z_3^2 \\ p_2 + q_2 z_1 + r_2 z_1^2 & p_2 + q_2 z_2 + r_2 z_2^2 & p_2 + q_2 z_3 + r_2 z_3^2 \\ p_3 + q_3 z_1 + r_3 z_1^2 & p_3 + q_3 z_2 + r_3 z_2^2 & p_3 + q_3 z_3 + r_3 z_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Delta}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{s_1 s_2 s_3} (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1),$$

où Δ désigne une constante

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Posons en outre

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)};$$

alors l'équation (2) qui donne $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ devient

$$P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int_{L_1} dz_1 \int_{L_2} dz_2 \int_{L_3} \frac{z_1 z_2 z_3}{s_1 s_2 s_3} E(z_1) E(z_2) E(z_3) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} dz_3,$$

les indices L_1, L_2, L_3 dont sont affectés les signes d'intégration signifiant que les variables $z_1 z_2 z_3$ doivent prendre la suite des valeurs figurées par les contours L_1, L_2, L_3 définis à la page 147.

L'intégrale triple ainsi obtenue se décompose en intégrales simples. Nous pouvons l'écrire en faisant entrer les facteurs z_1, z_2, z_3 dans le déterminant

$$P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int_{L_1} \int_{L_2} \int_{L_3} \frac{E(z_1) E(z_2) E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ z_3 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1 dz_2 dz_3.$$

Considérons les intégrales simples

$$A_{\nu 1} = \int_{L_1} \frac{z_1^\nu E(z_1)}{s_1} dz_1,$$

$$A_{\nu 2} = \int_{L_2} \frac{z_2^\nu E(z_2)}{s_2} dz_2,$$

$$A_{\nu 3} = \int_{L_3} \frac{z_3^\nu E(z_3)}{s_3} dz_3$$

où ν *est un entier positif ou nul.* L'expression ci-dessus de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ deviendra

(3)
$$P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

et se trouvera ramenée à un déterminant de neuf intégrales simples; ce qui constitue la généralisation immédiate de la formule trouvée à propos des intégrales ultraelliptiques.

L'intégrale

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu E(z)}{s} dz$$

est une intégrale de fonction à multiplicateurs; et les constantes

$$A_{\nu 1}\,,\ A_{\nu 2}\,,\ A_{\nu 3}$$

sont les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures a_1, a_2, a_3.

En effet l'exponentielle

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)}$$

est uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} figurée à la page 145. Les valeurs que prend cette exponentielle aux deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un facteur constant qui se déduit immédiatement du tableau des modules de périodicité de $w_1(z), w_2(z), w_3(z)$. Appelons, comme dans la théorie génerale, m_1, m_2, m_3 les multiplicateurs de $E(z)$ le long des coupures a_1, a_2, a_3, et n_1, n_2, n_3 ses multiplicateurs le long de b_1, b_2, b_3. Nous aurons

$$(4)\quad \begin{cases} \quad m_1 = e^{2\nu_1 \pi i} = 1, \quad m_2 = e^{2\nu_2 \pi i} = 1, \quad m_3 = e^{2\nu_3 \pi i} = 1, \\ n_1 = e^{2\nu_1 b_{11} + 2\nu_2 b_{21} + 2\nu_3 b_{31}}, \quad n_2 = e^{2\nu_1 b_{12} + 2\nu_2 b_{22} + 2\nu_3 b_{32}}, \quad n_3 = e^{2\nu_1 b_{13} + 2\nu_2 b_{23} + 2\nu_3 b_{33}}. \end{cases}$$

La fonction

$$\frac{z^\nu}{s} E(z),$$

ν étant un entier positif ou nul, admet les mêmes multiplicateurs que $E(z)$; cette fonction est, pour des valeurs très grandes de z, développable en une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de z, et le premier terme du développement est de l'ordre de

$$z^{\nu-4}.$$

Donc les intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\psi_0(z)=\int\frac{1}{s}E(z)dz,\qquad \psi_1(z)=\int\frac{z}{s}E(z)dz,\qquad \psi_2(s)=\int\frac{z^2}{s}E(z)dz,$$

sont de *première espèce* comme restant partout finies; tandis que

$$\psi_3(s)=\int\frac{z^3}{s}E(z)dz$$

est de *troisième espèce,* car cette intégrale a pour points critiques logarithmiques les deux points j_0 et j_1 situés à l'infini, le premier dans le feuillet supérieur, le second dans le feuillet inférieur.

Appelons

$$A_{\nu 1}\,,\ A_{\nu 2}\,,\ A_{\nu 3}\,,\ B_{\nu 1}\,,\ B_{\nu 2}\,,\ B_{\nu 3}\,,\ C_{\nu 2}\,,\ C_{\nu 3}$$

les modules de périodicité de l'intégrale

$$\psi_\nu(z)=\int\frac{z^\nu}{s}E(z)dz,$$

le long des coupures $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_2, c_3$. Si ν est égal à 1 ou 2, cette intégrale est de première espèce, et, d'après les relations établies dans la deuxième partie entre les modules de périodicité et les multiplicateurs d'une intégrale de première espèce (page 34), on aura

$$\begin{aligned}
&B_{11}(1-m_1)-A_{11}(1-n_1) &&+n_1C_{12}=0,\\
&B_{12}(1-m_2)-A_{12}(1-n_2)-m_2n_2C_{12}&&+n_2C_{13}=0,\\
&B_{13}(1-m_3)-A_{13}(1-n_3)-m_3n_3C_{13}&&=0.
\end{aligned}$$

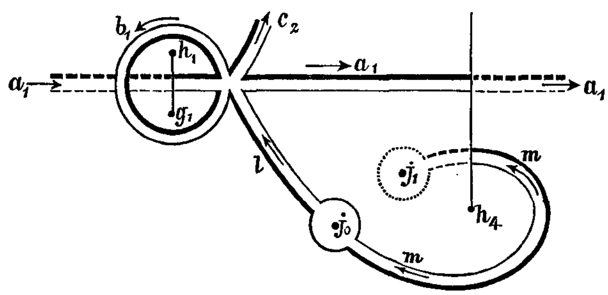
Mais actuellement $m_1=m_2=m_3=1$; donc

$$(5)\qquad\left\{\begin{aligned}
&-A_{11}(1-n_1)+n_1C_{12}&&=0,\\
&-A_{12}(1-n_2)+n_2(C_{13}-C_{12})&&=0,\\
&-A_{13}(1-n_3)-n_3C_{13}&&=0.
\end{aligned}\right.$$

On a de même pour l'intégrale $\psi_2(z)$

$$(6)\qquad \begin{cases} -A_{21}(1-n_1)+n_1C_{22} = 0, \\ -A_{22}(1-n_2)+n_2(C_{23}-C_{22}) = 0, \\ -A_{23}(1-n_3)-n_3C_{23} = 0. \end{cases}$$

L'intégrale $\psi_3(z)$ qui est de troisième espèce n'est plus uniforme sur la surface de Riemann R_{abc}: mais elle devient uniforme sur la surface R_{abclm} obtenue en traçant sur R_{abc} les deux coupures nouvelles l et m que nous figurons ci-dessus conformément à la disposition adoptée dans la théorie générale:



dans cette figure nous avons représenté, comme étant à distance finie, les points critiques logarithmiques j_0 et j_1 qui sont situés à l'infini.

Appelons

$$A_{31}\,,\ A_{32}\,,\ A_{33}\,,\ B_{31}\,,\ B_{32}\,,\ B_{33}\,,\ C_{32}\,,\ C_{33}\,,\ \mathfrak{L}\,,\ \mathfrak{M}$$

les modules de périodicité de l'intégrale $\psi_3(z)$ le long des coupures $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, l$ et m. Les modules de périodicité $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont aisés à calculer, comme nous l'avons montré dans la théorie générale des intégrales de troisième espèce. De plus, les relations entre les modules de périodicité et les multiplicateurs d'une intégrale de troisième espèce deviennent ici, puisque $m_1 = m_2 = m_3 = 1$:

$$(7)\qquad \begin{cases} -A_{31}(1-n_1)+n_1(C_{32}-\mathfrak{L}) = 0, \\ -A_{32}(1-n_2)+n_2(C_{33}-C_{32}) = 0, \\ -A_{33}(1-n_3)-n_3C_{33} = 0. \end{cases}$$

Les relations précédentes (5), (6) et (7) permettent de simplifier l'expression (3) de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ indiquée à la page 150. En effet, si l'on remplace A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33} par leurs valeurs tirées de ces relations (5), (6), (7), on a

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} \begin{vmatrix} C_{12} & C_{13} - C_{12} & -C_{13} \\ C_{22} & C_{23} - C_{22} & -C_{23} \\ C_{32} - \mathfrak{L} & C_{33} - C_{32} & -C_{33} \end{vmatrix}$$

ou, en ajoutant les éléments de la première et de la dernière colonne à ceux de la seconde,

$$\frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} \begin{vmatrix} C_{12} & 0 & -C_{13} \\ C_{22} & 0 & -C_{23} \\ C_{32} - \mathfrak{L} & -\mathfrak{L} & -C_{33} \end{vmatrix},$$

ce qui donne en développant

$$\frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} . \mathfrak{L} . (C_{13} C_{22} - C_{12} C_{23}).$$

On a donc enfin, pour le coefficient $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, l'expression

$$(8) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_2)} . \mathfrak{L} . (C_{13} C_{22} - C_{12} C_{23}),$$

qui, en vertu des relations (5) et (6) des pages 152 et 153, peut aussi s'écrire

$$(9) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1-n_2} . \mathfrak{L} . (A_{11} A_{23} - A_{13} A_{21}).$$

Le calcul de ce coefficient se trouve ainsi ramené à celui d'un déterminant de *quatre* intégrales simples. Ces quatre intégrales simples

$$A_{11} = \int_{L_1} \frac{z_1 dz_1}{s_1} E(z_1), \qquad A_{13} = \int_{L_3} \frac{z_3 dz_3}{s_3} E(z_3),$$

$$A_{21} = \int_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1} E(z_1), \qquad A_{23} = \int_{L_3} \frac{z_3^2 dz_3}{s_3} E(z_3),$$

se ramènent immédiatement à des intégrales rectilignes d'après la définition même des contours L_1 et L_3 (page 147). Il suffit de leur appliquer la méthode dont nous nous sommes servis dans la troisième partie, pour ramener des intégrales analogues à la forme

$$\psi(m\,,n) + \psi(-m\,,-n).$$

Développement de $z_1 + z_2 + z_3$.

Si l'on fait

$$z_1 + z_2 + z_3 = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

on trouvera comme ci-dessus, en prenant garde à l'identité

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}},$$

$$Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \int\limits_{L_3} \frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1\,dz_2\,dz_3\,,$$

ou encore

$$Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{01} & A_{11} & A_{31} \\ A_{02} & A_{12} & A_{32} \\ A_{03} & A_{13} & A_{33} \end{vmatrix},$$

avec les notations de la page 150.

Les constantes

$$A_{01}\,,\ A_{02}\,,\ A_{03}\ ;\ A_{11}\,,\ A_{12}\,,\ A_{13}$$

sont les modules de périodicité des intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\psi_0(z) = \int \frac{dz}{s} E(z), \qquad \psi_1(z) = \int \frac{z\,dz}{s} E(z)$$

le long des coupures a_1, a_2, a_3; ces deux intégrales sont de *première espèce.* Les constantes

$$A_{31}, A_{32}, A_{33}$$

sont les modules de périodicité, le long de ces mêmes coupures, de l'intégrale

$$\psi_3(z) = \int \frac{z^3\,dz}{s} E(z)$$

qui est de *troisième espèce* avec deux points critiques logarithmiques à l'infini. Cette intégrale $\psi_3(z)$ est uniforme sur la surface de Riemann R_{abclm} représentée à la page 153; appelons $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ ses modules de périodicité le long des coupures l et m; nous verrons, comme nous l'avons fait aux pages 153 et 154, que l'on a

(10) $$Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1 - n_2} . \mathfrak{L} . (A_{01}A_{13} - A_{03}A_{11}).$$

Le calcul de ce coefficient peut d'ailleurs se ramener à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$.

En effet on a

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)}$$

ou

$$E(z) = e^{\int \frac{a + bz + cz^2}{s} dz}$$

en faisant pour abréger

$$a = 2\nu_1 p_1 + 2\nu_2 p_2 + 2\nu_3 p_3,$$
$$b = 2\nu_1 q_1 + 2\nu_2 q_2 + 2\nu_3 q_3,$$
$$c = 2\nu_1 r_1 + 2\nu_2 r_2 + 2\nu_3 r_3.$$

Donc

$$dE(z) = a\frac{dz}{s}E(z) + b\frac{z\,dz}{s}E(z) + c\frac{z^2\,dz}{s}E(z)$$

et en intégrant

$$E(z) = a\psi_0(z) + b\psi_1(z) + c\psi_2(z) + C^{te}.$$

Les modules de périodicité du premier membre $E(z)$ étant *nuls*, il en est de même de ceux du second membre et l'on a, entre autres relations,

$$aA_{01} + bA_{11} + cA_{21} = 0,$$

$$aA_{02} + bA_{12} + cA_{22} = 0,$$

$$aA_{03} + bA_{13} + cA_{23} = 0,$$

d'où en éliminant b entre la première et la dernière,

$$(11) \qquad a(A_{01}A_{13} - A_{03}A_{11}) + c(A_{21}A_{13} - A_{11}A_{23}) = 0,$$

formule qui ramène le calcul du coefficient $Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$.

Développement de $z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$.

En faisant

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} R_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1u_1-2\nu_1u_2-2\nu_1u_3}$$

et prenant garde à l'identité bien connue

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}},$$

on trouvera, comme ci-dessus pour les développements de $z_1z_2z_3$ et $z_1 + z_2 + z_3$,

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3} \frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1s_2s_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1dz_2dz_3,$$

ou encore

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{01} & A_{21} & A_{31} \\ A_{02} & A_{22} & A_{32} \\ A_{03} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant sont les modules de périodicité, le long des coupures a_1, a_2, a_3, des intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\psi_0(z) = \int \frac{dz}{s} E(z), \qquad \psi_2(z) = \int \frac{z^2 dz}{s} E(z), \qquad \psi_3(z) = \int \frac{z^3 dz}{s} E(z).$$

En transformant ce déterminant, comme le déterminant analogue (3) de la page 150, nous aurons

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1 - n_2} . \mathfrak{L} . (A_{01} A_{23} - A_{21} A_{03}),$$

formule qui ramène aussi le calcul de ce coefficient à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$. En effet les relations entre les modules de périodicité établies à la page 157

$$aA_{01} + bA_{11} + cA_{21} = 0,$$

$$aA_{03} + bA_{13} + cA_{23} = 0,$$

donnent par l'elimination de c

(12) $$a(A_{01} A_{23} - A_{21} A_{03}) + b(A_{11} A_{23} - A_{21} A_{13}) = 0.$$

D'après cela, on a

$$aR_{\nu_1\nu_2\nu_3} + bP_{\nu_1\nu_2\nu_3} = 0;$$

la formule (11) de la page 157 nous donne de même

$$aQ_{\nu_1\nu_2\nu_3} - cP_{\nu_1\nu_2\nu_3} = 0.$$

Donc enfin

(13) $$\frac{P_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{a} = \frac{Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{c} = \frac{R_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{-b};$$

dans cette formule importante a, b, c ont les valeurs déjà indiquées (page 156)

$$a = 2(\nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 + \nu_3 p_3),$$

$$b = 2(\nu_1 q_1 + \nu_2 q_2 + \nu_3 q_3),$$

$$c = 2(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + \nu_3 r_3);$$

on voit que cette formule (13), qui ramène les trois coefficients $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, $Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, $R_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ à l'un d'entre eux, est l'extension, au cas actuel, d'une formule analogue établie pour les fonctions abéliennes de genre 2 et ramenant les développements de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ l'un à l'autre.

Développements d'autres fonctions abéliennes résultant de l'inversion des mêmes équations.

On pourra appliquer la même méthode au développement en série trigonométrique d'une fonction abélienne des variables u_1, u_2, u_3 exprimée par un polynôme symétrique en z_1, z_2, z_3 et s_1, s_2, s_3.

Si l'on suppose une fonction de cette forme

$$f(z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3)$$

développée en série

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} S_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3},$$

le calcul du coefficient $S_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ se ramènera par les mêmes méthodes au calcul *d'intégrales simples* qui ne sont autre chose que les modules de périodicité d'intégrales de la forme

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu dz}{s} E(z), \qquad \varphi_\nu(z) = \int z^\nu E(z) dz \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

le long des coupures a_1, a_2, a_3.

Comme l'on a

$$E(z) = e^{\int \frac{a + bz + cz^2}{s} dz}$$

la différentiation des expressions

$$z^\nu E(z)\ ,\ sz^\nu E(z)$$

où

$$\nu = 0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\,\infty,$$

fournira des formules de réduction pour ces intégrales ψ_ν et φ_ν, formules entièrement semblables à celles que nous avons établies à la fin de la troisième partie.

Par exemple, on a identiquement

$$dz^\nu E(z) = \nu z^{\nu-1}E(z)dz + \frac{z^\nu(a + bz + cz^2)}{s}E(z)dz,$$

d'où en intégrant

$$z^\nu E(z) = \nu\varphi_{\nu-1}(z) + a\psi_\nu(z) + b\psi_{\nu+1}(z) + c\psi_{\nu+2}(z) + C^{te},$$

formule qui ramène toutes les intégrales $\varphi_\nu(z)$ à des intégrales $\psi_\nu(z)$.

Puis la différentiation de

$$sz^\nu E(z)$$

donnera une formule ramenant, par voie récurrente, toutes les intégrales $\psi_\nu(z)$ aux premières d'entre elles. Il est inutile de donner le détail de ces formules qui est entièrement élémentaire.

On conclut de là que toutes les intégrales définies qui figureront dans les coefficients tels que $S_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ se ramèneront par voie récurrente à un nombre fini d'entre elles.

On ramènerait de même au calcul d'intégrales simples la détermination des coefficients du développement en série d'exponentielles $e^{2\nu_1u_1+2\nu_2u_2+2\nu_3u_4}$ d'une fonction abélienne ayant l'une ou l'autre des formes

$$R(s_1\,,z_1) + R(s_2\,,z_2) + R(s_3\,,z_3),$$

$$R(s_1\,,z_1)R(s_2\,,z_2) + R(s_2\,,z_2)R(s_3\,,z_3) + R(s_1\,,z_1)R(s_3\,,z_3),$$

$$R(s_1\,,z_1)R(s_2\,,z_2)R(s_3\,,z_3),$$

où $R(s\,,z)$ désigne une fonction rationnelle de s et z, à condition, bien entendu, que ce développement soit possible.

Ces nouvelles intégrales définies simples seront encore les modules de périodicité de certaines intégrales de fonctions à multiplicateurs: mais elles ne peuvent plus, par voie récurrente, se ramener à un nombre fini d'entre elles. On leur appliquera les théorèmes généraux indiqués dans la seconde partie.

Développements de certaines fonctions algébriques de fonctions abéliennes.

On peut développer par la même méthode certaines *fonctions rationnelles* mais *non symétriques* de $s_1, z_1; s_2, z_2; s_3, z_3$, c'est à dire certaines fonctions algébriques de fonctions abéliennes.

Prenons par exemple la fonction

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}}$$

qui reste finie et continue quand z_1, z_2, z_3 décrivent les contours appelés L_1, L_2, L_3. Cette fonction, qui est la racine carrée d'une fonction abélienne, sera développable en une série trigonométrique de la forme

$$f(z_1, z_2, z_3) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} T_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

convergente, comme les précédentes, pour des valeurs purement imaginaires des différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0.$$

On trouvera immédiatement, en suivant la même méthode que plus haut,

$$T_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3} \frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} dz_1 dz_2 dz_3,$$

c'est à dire, d'après nos notations de la page 150,

$$T_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} A_{01} A_{02} A_{03}.$$

Le coefficient $T_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ est ainsi exprimé en fonction des trois modules de périodicité

$$A_{01}\,,\ A_{02}\,,\ A_{03}$$

de l'intégrale $\psi_0(z)$. Si l'on appelle

$$C_{02}\,,\ C_{03}$$

les modules de périodicité de cette intégrale $\psi_0(z)$ le long des coupures c_2 et c_3, on a, comme à la page 152,

$$\begin{aligned} -A_{01}(1-n_1)+n_1C_{02} &= 0, \\ -A_{02}(1-n_2)+n_2(C_{03}-C_{02}) &= 0, \\ -A_{03}(1-n_3)-n_3C_{03} &= 0, \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1-n_1}{n_1}A_{01}+\frac{1-n_2}{n_2}A_{02}+\frac{1-n_3}{n_3}A_{03}=0.$$

Il restera donc à calculer A_{02} et A_{03}.

On ramènera au calcul des modules de périodicité de ces mêmes intégrales $\psi_\nu(z)$, le calcul des coefficients des développements en séries trigonométriques de toute fonction égale à un polynôme non symétrique en $s_1\,,z_1\,;\ s_2\,,z_2\,;\ s_3\,,z_3\,;$ ou du produit d'une pareille fonction par $f(z_1\,,z_2\,,z_3)$.

Mais il nous paraît sans intérêt d'insister davantage sur ce sujet, et nous terminerons par quelques remarques, qui nous semblent fondamentales, sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Voyez un Mémoire de RIEMANN intitulé: *Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten*, et les recherches de M. POINCARÉ sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

Soient, comme précédemment, s et z deux variables liées par une relation algébrique de genre p et R la surface de Riemann correspondante. Considérons une équation linéaire d'ordre n

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \varphi_1(s, z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \varphi_2(s, z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \ldots + \varphi_n(s, z)u = 0,$$

les coefficients $\varphi_1(s, z)$, $\varphi_2(s, z)$, ..., $\varphi_n(s, z)$ étant des *fonctions rationnelles* de s et z.

L'intégrale générale u de cette équation peut cesser d'être uniforme dans le voisinage de deux sortes de points: 1° les points de la surface de Riemann où certains des coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis; 2° les points de ramification de cette surface de Riemann.

1° Prenons d'abord un point α de la surface de Riemann où certains coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis, ce point étant distinct des points de ramification. Nous supposons que, dans le voisinage de ce point, l'équation différentielle admette un système fondamental d'intégrales dont tous les éléments restent finis, pour $z = \alpha$, quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de $z - \alpha$; et nous supposons de plus que *l'équation fondamentale déterminante* de M. Fuchs relative au point singulier $z = \alpha$ ne possède que des racines *entières*. (Voyez le Mémoire de M. Fuchs, Journal de Crelle T. 66, ou la Thèse présentée par M. Tannery à la Faculté des Sciences de Paris 1874, pages 41 et suiv.) Nous supposerons ces conditions remplies en tous les points ordinaires de la surface de Riemann où certains coefficients $\varphi_i(s, z)$ deviennent infinis, les points à l'infini compris. Alors, dans le voisinage de chacun de ces points, $z = \alpha$, de la surface de Riemann, l'intégrale générale, ou bien sera uniforme ou bien contiendra dans son expression des puissances de $\log(z - \alpha)$; dans ce dernier cas *nous dirons que le point $z = \alpha$ est un point critique logarithmique de l'intégrale générale.*

2° Prenons maintenant un point de ramification $z=c$ et supposons que ce soit un point de ramification d'ordre m. Alors pour étudier l'intégrale générale dans le voisinage de ce point, nous ferons avec C. Neumann, d'après Riemann,

$$z-c=(\zeta-\gamma)^m$$

(C. Neumann, loc. cit. pages 73—74), ζ étant une nouvelle variable indépendante et γ une constante. Dans le voisinage de $\zeta=\gamma$, les coefficients de l'équation différentielle définissant u en fonction de ζ seront uniformes. Nous supposerons ces coefficients tels que l'équation admette, dans le voisinage de $\zeta=\gamma$, un système fondamental d'intégrales dont les éléments restent finis pour $\zeta=\gamma$ quand on les a préalablement multipliés par une puissance convenable de $\zeta-\gamma$, et *que l'équation fondamentale déterminante* n'admette *que des racines entières*. Alors, dans le voisinage de $\zeta=\gamma$, ou bien l'intégrale générale sera uniforme, ou bien elle contiendra dans son expression des puissances de $\log(\zeta-\gamma)$ et, dans ce dernier cas, nous dirons que le point de ramification $z=c$ est un point *critique logarithmique de l'intégrale.*

Telles sont les conditions que nous supposons remplies et qui caractérisent la classe d'équations différentielles linéaires dont nous nous occupons. D'après les méthodes données par M. Fuchs, on pourra toujours reconnaître si une équation différentielle linéaire à coefficients algébriques donnés rentre dans cette classe spéciale. On pourra de plus, d'après ces mêmes méthodes, reconnaître si dans le voisinage d'un point de la surface de Riemann l'intégrale générale est uniforme ou si elle admet ce point pour point critique logarithmique. Enfin, en supposant l'intégrale générale uniforme dans le voisinage d'un point de la surface de Riemann où certains coefficients deviennent infinis, on pourra, d'après les racines de l'équation fondamentale déterminante, voir si cette intégrale *reste finie* au point considéré, ou si elle y devient infinie auquel cas le point, qu'il soit de ramification ou non, sera dit un pôle de l'intégrale.

Classification des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques qui viennent d'être définies.

En nous plaçant dans le même ordre d'idées que pour la classification des intégrales abéliennes, nous dirons:

1° qu'une de nos équations différentielles est *de première espèce ou encore que son intégrale générale est de première espèce* si cette intégrale générale est partout finie et n'a pas de points critiques logarithmiques;

2° qu'une de nos équations différentielles est *de deuxième espèce* ou encore que *son intégrale générale est de deuxième espèce* si cette intégrale générale a des *pôles mais n'a pas* de points critiques logarithmiques;

3° enfin qu'une de nos équations différentielles est de *troisième espèce* ou encore que son intégrale générale est de *troisième espèce* si cette intégrale générale possède des points critiques logarithmiques.

Les intégrales de fonctions à multiplicateurs, étudiées dans la deuxième partie, fournissent des exemples simples de ces trois espèces d'équations différentielles.

Soit par exemple

$$u = \omega(z)$$

une intégrale de première espèce de fonction à multiplicateurs: sa dérivée

$$\frac{du}{dz} = \omega'(z)$$

sera une fonction à multiplicateurs, et, comme la dérivée logarithmique d'une fonction à multiplicateurs est une fonction algébrique rationnelle en s et z, on aura enfin

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \varphi_1(s, z)\frac{du}{dz} = 0, \tag{14}$$

$\varphi_1(s, z)$ désignant la fonction rationnelle de s et z

$$-\frac{d \log \omega'(z)}{dz}.$$

L'équation différentielle du second ordre en u ainsi obtenue rentre dans la classe que nous considérons ici. Son intégrale générale est

$$u = A\omega(z) + B,$$

A et B étant des constantes arbitraires: elle est donc de *première espèce* comme restant finie et n'ayant pas de points critiques logarithmiques.

De même si l'on fait

$$u = t(z, z_0)$$

où $t(z, z_0)$ désigne une intégrale de seconde espèce d'une fonction à multiplicateurs, u vérifie une équation linéaire de la forme ci-dessus (14), à coefficient algébrique, ayant pour intégrale générale

$$u = At(z, z_0) + B;$$

cette nouvelle équation serait donc de *seconde espèce.*

Enfin une intégrale de troisième espèce d'une fonction à multiplicateurs

$$u = \varpi(z, z_0)$$

vérifie aussi une équation de la forme (14) ayant pour intégrale

$$u = A\varpi(z, z_0) + B;$$

cette équation différentielle serait donc de *troisième espèce.*

On pourrait, plus généralement, former ainsi des équations différentielles linéaires de la classe indiquée admettant pour intégrales des fonctions algébriques entières d'intégrales abéliennes et d'intégrales de fonctions à multiplicateurs. Mais nous laissons de coté ces exemples pour étudier les propriétés de l'intégrale générale d'une de nos équations, en suivant la méthode employée pour les intégrales de fonctions à multiplicateurs.

Equations différentielles de première ou deuxième espèce.

Supposons que l'équation différentielle

$$\frac{d^n u}{dz^n} + \varphi_1(s, z)\frac{d^{n-1}u}{dz^{n-1}} + \varphi_2(s, z)\frac{d^{n-2}u}{dz^{n-2}} + \dots + \varphi_n(s, z)u = 0$$

soit de première ou de deuxième espèce. Alors l'intégrale générale u est une fonction uniforme de z sur la surface de Riemann R_{abc} rendue simplement connexe à l'aide des coupures

$$a_1, a_2, \dots, a_p; \; b_1, b_2, \dots, b_p; \; c_2, c_3, \dots, c_p.$$

Nous supposerons que ces coupures présentent la disposition particulière que nous avons adoptée dans la deuxième partie et qui se trouve reproduite à la page 145; la coupure c_h partant du point de croisement des coupures a_{h-1} et b_{h-1} pour aboutir au point de croisement des coupures a_h et b_h $(h = 2, 3, \ldots, p)$.

Soient $u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z)$ les éléments d'un système fondamental d'intégrales, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face sur le bord droit. On aura *le long de la coupure* a_k

$$\begin{aligned}
u_1(\lambda) &= A_{11}^{(k)} u_1(\rho) + A_{12}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{1n}^{(k)} u_n(\rho),\\
u_2(\lambda) &= A_{21}^{(k)} u_1(\rho) + A_{22}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{2n}^{(k)} u_n(\rho),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u_n(\lambda) &= A_{n1}^{(k)} u_1(\rho) + A_{n2}^{(k)} u_2(\rho) + \ldots + A_{nn}^{(k)} u_n(\rho),
\end{aligned}$$

les quantités $A_{ij}^{(k)}$ étant des constantes. En désignant par S_k la substitution

$$S_k = \begin{pmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & \ldots & A_{1n}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & \ldots & A_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1}^{(k)} & A_{n2}^{(k)} & \ldots & A_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

nous écrirons pour abréger

$$u(\lambda) = S_k u(\rho)$$

pour rappeler que l'on obtient les valeurs $u_1(\lambda), u_2(\lambda), \ldots, u_n(\lambda)$ en faisant, sur $u_1(\rho), u_2(\rho), \ldots, u_n(\rho)$, la substitution S_k.

Ainsi l'on a

$$\textit{le long de } a_k\textit{:}\quad u(\lambda) = S_k u(\rho). \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

On aura de même, en désignant par T_k une certaine substitution

$$T_k = \begin{pmatrix} B_{11}^{(k)} & B_{12}^{(k)} & \ldots & B_{1n}^{(k)} \\ B_{21}^{(k)} & B_{22}^{(k)} & \ldots & B_{2n}^{(k)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n1}^{(k)} & B_{n2}^{(k)} & \ldots & B_{nn}^{(k)} \end{pmatrix},$$

le long de la coupure b_k

$$u(\lambda) = T_k u(\rho). \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

Enfin, en désignant par Σ_h une substitution

$$\Sigma_h = \begin{vmatrix} C_{11}^{(h)} & C_{12}^{(h)} & \ldots & C_{1n}^{(h)} \\ C_{21}^{(h)} & C_{22}^{(h)} & \ldots & C_{2n}^{(h)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n1}^{(h)} & C_{n2}^{(h)} & \ldots & C_{nn}^{(h)} \end{vmatrix},$$

on aura *le long de la coupure* c_h:

$$u(\lambda) = \Sigma_h u(\rho). \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

Ces $(3p - 1)$ substitutions

$$S_k\,,\ T_k\,,\ \Sigma_h, \qquad {\scriptstyle \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}}$$

formeront ce que l'on peut appeler le groupe de l'équation.

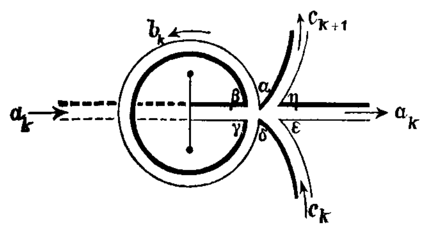
Ces substitutions sont liées par des relations qui se déduisent de la considération des points de concours des coupures

$$a_k\,,\ b_k\,,\ c_k\,,\ c_{k+1}. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,3,\ldots,p)}$$

Voici comment on obtient ces relations.

Relations entre les substitutions $S_k\,,\ T_k\,,\ \Sigma_h$.

Figurons le point de croisement des coupures $a_k\,,\ b_k\,,\ c_k\,,\ c_{k+1}$



et appelons $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ les sommets des six angles formés par les bords des coupures, les bords gauches étant marqués d'un trait plus fort. On aura successivement

$$(15) \qquad \begin{cases} u(\beta) = T_k u(\alpha), \\ u(\gamma) = S_k^{-1} u(\beta), \\ u(\delta) = T_k^{-1} u(\gamma), \\ u(\varepsilon) = \Sigma_k^{-1} u(\delta), \\ u(\eta) = S_k u(\varepsilon), \\ u(\alpha) = \Sigma_{k+1} u(\eta). \end{cases}$$

Dans ces relations qui résultent immédiatement de la définition même des substitutions S_k, T_k, Σ_k, nous désignons, conformément à l'usage, par

$$S_k^{-1}, \; T_k^{-1}, \; \Sigma_k^{-1}$$

les substitutions inverses de S_k, T_k, Σ_k. Par exemple, le point β étant sur le bord gauche de la coupure a_k et le point γ en face sur le bord droit, on aura

$$u(\beta) = S_k u(\gamma)$$

d'où, comme nous l'avons écrit,

$$u(\gamma) = S_k^{-1} u(\beta).$$

On tire des relations (15) la relation suivante entre les substitutions considérées

$$(16) \qquad T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} = 1,$$

qui signifie que ces substitutions faites successivement dans l'ordre indiqué conduisent à la substitution *unité*. On peut écrire cette relation (16) de façon que l'une quelconque des six substitutions soit la première, l'ordre dans lequel elles se suivent restant d'ailleurs le même. Ainsi

$$S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} = 1,$$
$$T_k^{-1} S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k \Sigma_k^{-1} = 1,$$
$$\Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} T_k \Sigma_{k+1} S_k = 1,$$

etc.

En faisant $k = 1, 2, \ldots, p$ on aura ainsi p relations analogues à (16). Comme les coupures c_1 et c_{p+1} n'existent pas, il faudra supposer

$$\Sigma_1 = 1, \qquad \Sigma_{p+1} = 1.$$

Conséquence de ces relations.

On conclut de là que, les $2p$ substitutions S_k, T_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ une fois connues, les $(p - 1)$ substitutions

$$\Sigma_h, \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

s'en déduisent immédiatement.

En effet on peut aussi écrire,

$$\Sigma_{k+1}^{-1} = S_k \Sigma_k^{-1} T_k^{-1} S_k^{-1} T_k \tag{17}$$

comme il résulte directement des relations (15). Faisant alors $k = 1$ et $\Sigma_1^{-1} = 1$, comme nous venons de le dire, nous aurons

$$\Sigma_2^{-1} = S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1,$$

ce qui donne Σ_2.

Faisant ensuite, dans la relation (17), $k = 2$, nous aurons

$$\Sigma_3^{-1} = S_2 \Sigma_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{-1} T_2$$

et Σ_3^{-1} se trouve déterminée. En faisant de même successivement, dans (17), $k = 3, \ldots, p - 1$ on calculera de proche en proche les substitutions $\Sigma_4, \Sigma_5, \ldots, \Sigma_p$.

Relation entre les $2p$ substitutions S_k, T_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$.

Après avoir calculé les substitutions $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots, \Sigma_p$, comme nous venons de le voir, en fonction des substitutions S_k et T_k, on aura, en faisant $k = p$ dans la relation (17) et se rappelant que $\Sigma_{p+1} = 1$, la relation

$$1 = S_p \Sigma_p^{-1} T_p^{-1} S_p^{-1} T_p, \tag{18}$$

qui donne une relation entre les substitutions S_k et T_k, puisque Σ_p^{-1} est connu en fonction de ces substitutions.

Cas particuliers.

Si nous supposons le genre $p = 1$ nos équations de première et de deuxième espèce se ramènent immédiatement aux équations linéaires à coefficients doublement périodiques et à intégrale générale uniforme que M. PICARD a intégrées à l'aide de fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Dans ce cas il y a une coupure a_1, une coupure b_1 et deux substitutions S_1 et T_1. La relation (18) entre les $2p$ substitutions S_k, T_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ se réduit à

$$1 = S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1$$

ou

$$T_1^{-1} S_1 = S_1 T_1^{-1},$$

qui montre que les substitutions S_1 et T_1^{-1} sont *permutables;* ce qui est le fondement du théorème de M. PICARD.

Supposons maintenant $p = 2$. Il y aura alors 5 substitutions

$$S_1, S_2, T_1, T_2, \Sigma_2,$$

et l'on aura, d'après la relation (17) de la page précédente où l'on fait successivement $k = 1$, $k = 2$,

$$(19)\qquad \begin{aligned} \Sigma_2^{-1} &= S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1, \\ 1 &= S_2 \Sigma_2^{-1} T_2^{-1} S_2^{-1} T_2 \end{aligned}$$

d'où, par l'élimination de Σ_2^{-1},

$$(20)\qquad 1 = S_2 S_1 T_1^{-1} S_1^{-1} T_1 T_2^{-1} S_2^{-1} T_2.$$

Par exemple, si $S_1 = 1$, on a aussi $\Sigma_2 = 1$, puis d'après (20)

$$1 = S_2 T_2^{-1} S_2^{-1} T_2,$$

ce qui montre qu'alors les substitutions S_2 et T_2^{-1} seraient permutables.

Formation des équations les plus générales de première et deuxième espèce d'un degré donné.

Première espèce. En appliquant les théorèmes de M. Fuchs, on arrivera sans peine à former toutes les équations d'ordre n dont l'intégrale générale est de première espèce. Il existe de ces équations dans chaque ordre n. Nous en avons formé une du second ordre à la page 165. Si l'on appelle $\omega(z)$ une intégrale de première espèce de fonction à multiplicateurs et $E(z)$ une exponentielle de la forme $e^{-2[\lambda_1 w_1(z)+\lambda_2 w_2(z)+\dots+\lambda_p w_p(z)]}$, le produit

$$u = E(z)\omega(z)$$

satisfait de même à une équation linéaire du second ordre ayant pour intégrale générale

$$u = E(z)[A\omega(z) + B],$$

A et B étant des constantes arbitraires. (Cette exponentielle $E(z)$ a, comme dans tout ce qui précède, pour exposant une expression linéaire à coefficients constants d'intégrales abéliennes de première espèce).

Le produit

$$u = E(z)\omega^{n-1}(z),$$

n étant un entier positif, vérifiera une équation linéaire d'ordre n, qui sera par suite un exemple d'équation de première espèce. Cette équation aura pour intégrale générale

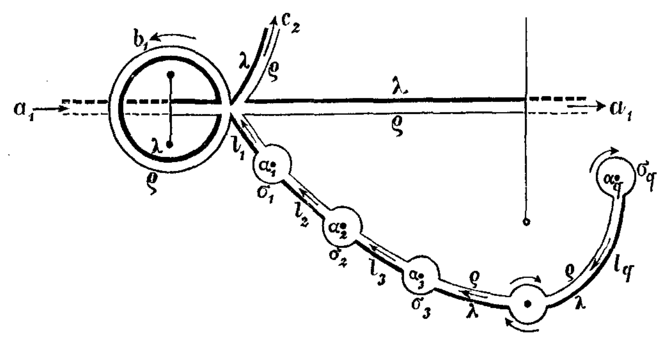
$$u = E(z)[A_1\omega^{n-1}(z) + A_2\omega^{n-2}(z) + A_3\omega^{n-3}(z) + \dots + A_{n-1}\omega(z) + A_n],$$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ étant des constantes arbitraires.

Equations de deuxième espèce. On pourra de même former les équations d'ordre n de deuxième espèce dont l'intégrale générale admette des pôles donnés d'avance. Il est facile d'en donner des exemples analogues aux précédents, composés avec des intégrales de seconde espèce de fonctions à multiplicateurs ou les dérivées de ces intégrales par rapport au paramètre.

Equations différentielles linéaires de troisième espèce.

L'intégrale générale d'une équation différentielle de troisième espèce admet des points critiques logarithmiques $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Elle n'est donc plus uniforme sur la surface R_{abc} de Riemann: mais elle devient uniforme sur la surface R_{abcl} obtenue par l'adjonction d'une coupure $l_1 l_2 \ldots l_q$ partant du point de croisement des coupures $a_1 b_1 c_2$ et réunissant les unes aux autres des circonférences infiniment petits $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_q$ de centres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$. Nous avons figuré ci-dessous cette coupure $l_1, l_2, \ldots, l_q$.



Si, comme plus haut, on appelle

$$u_1(z)\ ,\ u_2(z)\ ,\ \ldots\ ,\ u_n(z)$$

un système fondamental d'intégrales, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face sur le bord droit, on aura, comme précédemment,

$$\left.\begin{array}{l}\text{le long de la coupure } a_k\text{:} \quad u(\lambda) = S_k u(\rho), \\ \text{le long de la coupure } b_k\text{:} \quad u(\lambda) = T_k u(\rho),\end{array}\right. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

$$\text{le long de la coupure } c_h\text{:} \quad u(\lambda) = \Sigma_h u(\rho), \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

S_k, T_k, Σ_h désignant certaines substitutions linéaires.

Enfin on aura ici le long des nouvelles coupures $l_1, l_2, \ldots, l_q$,

$$\text{le long de la coupure } l_j\text{:} \quad u(\lambda) = L_j u(\rho), \qquad {\scriptstyle (j=1,2,\ldots,q)}$$

L_j désignant aussi une substitution linéaire à coefficients constants.

La substitution L_q est *connue* car on connaît la forme d'un système fondamental d'intégrales dans le voisinage du point critique logarithmique α_q où toutes les racines de l'équation fondamentale déterminante sont entières.

Les substitutions

$$S_k\,,\; T_k\,,\; \Sigma_h$$

sont liées entre elles par des relations identiques à celles que nous avons établies aux pages 169 et 170, avec cette seule différence que la substitution Σ_1 n'est plus, dans le cas actuel, égale à 1 mais bien à L_1, ainsi qu'il résulte de la figure de la page précédente.

Ces indications sommaires nous paraissent suffisantes pour montrer comment la méthode de Riemann que nous avons employée avec succès pour l'étude des intégrales de fonctions à multiplicateurs, peut, de la même façon, servir à l'étude des intégrales d'une classe étendue d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.