Première partie.

Sur les fonctions à multiplicateurs.

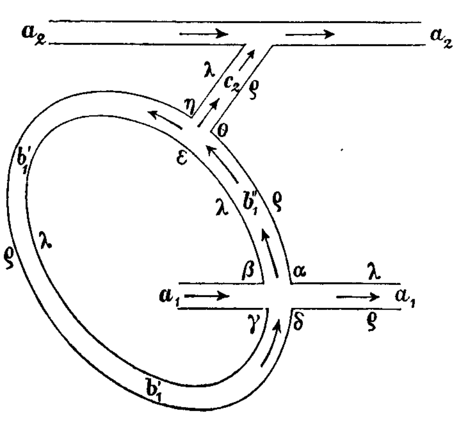
Soit une équation algébrique

$$F(s, z) = 0$$

du genre p et R la surface de Riemann correspondante. Désignons, avec C. Neumann (loc. cit. pages 175—185), par R_{abc} cette surface de Riemann rendue *simplement connexe* par les coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p; \; c_2, c_3, \ldots, c_p.$$

Nous appellerons *fonction à multiplicateurs* une fonction uniforme et régulière (c'est à dire, d'après Neumann, n'admettant que des pôles) sur la surface R_{abc}, cette fonction étant telle que ses valeurs sur les deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un *facteur* ou *multiplicateur* constant tout le long de la coupure.



Il est aisé de voir que, *le long de chacune des coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$, ce multiplicateur est égal à l'unité.* En effet, reprenons la figure de C. Neumann (loc. cit. page 216) avec quelques additions, et supposons qu'une fonction à multiplicateurs $\Phi(z)$ admette le long de la coupure a_1 le multiplicateur m_1, sur la portion b_1' de la coupure b_1 le multiplicateur

n_1', sur la portion b_1'' de cette même coupure le multiplicateur n_1'', enfin le long de la coupure c_2 le multiplicateur k_2. Cela veut dire que, si l'on appelle, avec NEUMANN, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, l'on a les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
&\text{le long de } a_1: \ \Phi(\lambda) = m_1 \Phi(\rho),\\
&\text{le long de } b_1': \ \Phi(\lambda) = n_1' \Phi(\rho),\\
&\text{le long de } b_1'': \ \Phi(\lambda) = n_1'' \Phi(\rho),\\
&\text{le long de } c_2: \ \Phi(\lambda) = k_2 \Phi(\rho).
\end{aligned}$$

Nous allons démontrer que

$$k_2 = 1, \qquad n_1' = n_1''.$$

Au point de croisement $\alpha\beta\gamma\delta$ des coupures a_1 et b_1 on a (voyez la figure page 8)

$$\Phi(\alpha) = m_1 \Phi(\delta), \qquad \Phi(\beta) = m_1 \Phi(\gamma),$$
$$\Phi(\gamma) = n_1' \Phi(\delta), \qquad \Phi(\beta) = n_1'' \Phi(\alpha),$$

d'où l'on tire immédiatement en éliminant $\Phi(\alpha)$, $\Phi(\beta)$, $\Phi(\gamma)$, $\Phi(\delta)$

$$m_1(n_1' - n_1'') = 0$$

donc

$$n_1' = n_1'',$$

car aucun multiplicateur ne peut être nul. De même au point de croisement $\varepsilon\eta\theta$ des coupures b_1 et c_2, on a, en appelant maintenant n_1 la valeur commune de n_1' et n_1'',

$$\Phi(\varepsilon) = n_1 \Phi(\eta), \qquad \Phi(\varepsilon) = n_1 \Phi(\theta), \qquad \Phi(\eta) = k_2 \Phi(\theta),$$

d'où il résulte

$$k_2 = 1.$$

Ainsi, comme nous l'avons annoncé, le multiplicateur le long de la coupure c_2 est l'unité; la fonction $\Phi(z)$ prend les mêmes valeurs sur les deux bords de c_2. Il en est de même pour les coupures $c_3, c_4, \ldots, c_p$.

On pourra donc supprimer toutes ces coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$ sans que la fonction $\Phi(z)$ cesse d'être uniforme.

En résumé, une fonction à multiplicateurs $\Phi(z)$ est uniforme sur la surface que C. Neumann appelle R_{ab} et que l'on obtient en traçant sur la surface R de Riemann les seules coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p.$$

Le long de chacune de ces coupures la fonction $\Phi(z)$ admettra un certain multiplicateur:

$$\left.\begin{array}{l}\text{le long de } a_k, \text{ le multiplicateur } m_k, \\ \text{le long de } b_k, \text{ le multiplicateur } n_k.\end{array}\right\} \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

Cela veut dire que, en appelant λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, l'on a:

$$\begin{array}{ll}\text{le long de } a_k, & \Phi(\lambda) = m_k\Phi(\rho), \\ \text{le long de } b_k, & \Phi(\lambda) = n_k\Phi(\rho).\end{array} \quad (k=1,2,\ldots,p)$$

Il y a ainsi en tout $2p$ multiplicateurs

$$m_1, m_2, \ldots, m_p; \; n_1, n_2, \ldots, n_p.$$

Le problème que nous avons maintenant à résoudre est celui-ci:

Former toutes les fonctions à multiplicateurs m_k, n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ *donnés d'avance.*

Pour cela, désignons avec Neumann par

$$w_1(z), w_2(z), \ldots, w_p(z)$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à la relation algébrique $F(s, z) = 0$, et appelons (loc. cit. page 246)

$$a_{\iota 1}, a_{\iota 2}, \ldots, a_{\iota p}; \; b_{\iota 1}, b_{\iota 2}, \ldots, b_{\iota p}$$

les modules de périodicité de l'intégrale w_ι le long des coupures

$$a_1, a_2, \ldots, a_p; \; b_1, b_2, \ldots, b_p.$$

Nous aurons alors le tableau suivant pour les modules de périodicité

Coupures	a_1, a_2, ..., a_p	b_1, b_2, ..., b_p
w_1	$a_{11} = \pi i$, $a_{12} = 0$, ..., $a_{1p} = 0$	b_{11}, b_{12}, ..., b_{1p}
w_2	$a_{21} = 0$, $a_{22} = \pi i$, ..., $a_{2p} = 0$	b_{21}, b_{22}, ..., b_{2p}
.	. . . .	. . . .
w_p	$a_{p1} = 0$, $a_{p2} = 0$, ..., $a_{pp} = \pi i$	b_{p1}, b_{p2}, ..., b_{pp}

avec

$$b_{kj} = b_{jk}.$$

Les intégrales normales que BRIOT désigne, dans sa *Théorie des fonctions abéliennes,* par

$$u^{(1)}, u^{(2)}, \ldots, u^{(p)}$$

sont respectivement égales à

$$2w_1, 2w_2, \ldots, 2w_p.$$

En continuant à suivre les notations de M. C. NEUMANN (loc. cit. page 271) désignons par

$$\varpi_{\alpha\beta}(z)$$

l'intégrale abélienne normale de *troisième espèce* qui devient infinie aux deux points α et β comme

$$\log(z - \beta) - \log(z - \alpha).$$

Les modules de périodicité de cette intégrale sont

le long de a_k: $\varpi_{\alpha\beta}(\lambda) - \varpi_{\alpha\beta}(\rho) = 0,$

le long de b_k: $\varpi_{\alpha\beta}(\lambda) - \varpi_{\alpha\beta}(\rho) = 2[w_k(\beta) - w_k(\alpha)].$

Donc la fonction

$$\Phi_{\alpha\beta}(z) = e^{\varpi_{\alpha\beta}(z)}$$

est régulière sur la surface R_{ab}: elle possède sur cette surface un pôle du *premier ordre α et un zéro du premier ordre β; de plus elle vérifie les relations suivantes*

$$\textit{le long de la coupure } a_k\text{:}\quad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = \Phi_{\alpha\beta}(\rho),$$

$$\textit{le long de la coupure } b_k\text{:}\quad \Phi_{\alpha\beta}(\lambda) = e^{2[w_k(\beta)-w_k(\alpha)]}\Phi_{\alpha\beta}(\rho).$$

Cela posé, désignons par $\Phi(z)$ une fonction régulière sur la surface R_{ab} de Riemann et admettant le long des coupures a_k, b_k des multiplicateurs donnés m_k, n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$. La dérivée logarithmique de cette fonction

$$\frac{d \log \Phi(z)}{dz}$$

est une fonction de z uniforme et régulière sur la surface R de Riemann, c'est à dire une fonction algébrique de z rationnelle en s et z; cette fonction admet pour pôles du premier ordre les zéros et les infinis de $\Phi(z)$, les premiers avec les résidus $+1$, les seconds avec les résidus -1; cette fonction peut d'ailleurs avoir d'autres pôles placés aux points de ramification, mais les résidus correspondants sont nuls, car l'intégrale

$$\int d \log \Phi(z)$$

est finie en tous les points distincts des zéros et des infinis de $\Phi(z)$. Cette intégrale est donc une intégrale abélienne n'ayant que des infinis logarithmiques: en la décomposant en intégrales normales de première et troisième espèce, on la mettra sous la forme

$$\int d \log \Phi(z) = \varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z)$$
$$- 2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)],$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignant des constantes. On tire de là en intégrant

$$(1)\qquad \Phi(z) = Ce^{\varpi_{\alpha_1\beta_1}(z) + \varpi_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \varpi_{\alpha_q\beta_q}(z) - 2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

C étant une constante. Cette fonction $\Phi(z)$ admet q infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et q zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$. Il reste à exprimer que cette fonction $\Phi(z)$ admet les *multiplicateurs donnés* m_k et n_k. D'après les expressions précédemment rappelées des modules de périodicité des intégrales abéliennes de première et troisième espèce (page 11), on a:

le long de la coupure a_k

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\rho)} = e^{-2\lambda_k \pi i},$$

et le long de la coupure b_k

$$\frac{\Phi(\lambda)}{\Phi(\rho)} = e^{\sum_j [2w_k(\beta_j) - 2w_k(\alpha_j)] - 2(\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk})}.$$

En écrivant que le long de a_k le multiplicateur est m_k et que le long de b_k il est n_k, on aura

$$(2) \qquad e^{-2\lambda_k \pi i} = m_k, \qquad \lambda_k = -\frac{1}{2\pi i}\log m_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)$$

puis

$$e^{\sum_j [2w_k(\beta_j) - 2w_k(\alpha_j)] - 2(\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk})} = n_k,$$

d'où l'on tire en prenant les logarithmes des deux membres et remplaçant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ par les valeurs (2) $-\frac{1}{2\pi i}\log m_1$, $-\frac{1}{2\pi i}\log m_2, \ldots$

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=q} [w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

On a ainsi le théorème suivant:

Toute fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs donnés m_k, n_k admet autant d'infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ que de zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$; ces zéros et ces infinis sont liés par les p relations (3) *et la fonction elle-même est donnée par l'expression*

$$(4) \qquad \Phi(z) = Ce^{\tilde{\omega}_{\alpha_1\beta_1}(z) + \tilde{\omega}_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\alpha_q\beta_q}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]},$$

les logarithmes ayant les mêmes déterminations que dans les équations (3).

Réciproquement, étant marqués sur la surface R de Riemann deux systèmes de points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ qui vérifient les p relations (3), *il existe une fonction $\Phi(z)$ régulière sur R_{ab}, devenant infinie aux points $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, nulle aux points $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ et admettant les multiplicateurs m_k et n_k; cette fonction est donnée par l'expression* (4).

Les relations (3) constituent, pour les fonctions à multiplicateurs, un théorème analogue au théorème d'Abel pour les fonctions algébriques rationnelles en s et z. On obtient le théorème d'Abel en supposant que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité.

Remarque. Le quotient de deux fonctions aux mêmes multiplicateurs est évidemment une fonction uniforme et régulière sur toute la surface R de Riemann, c'est à dire une fonction algébrique de z rationnelle en s et z. On en conclut que:

Si $\Phi(z)$ est une fonction déterminée aux multiplicateurs m_k et n_k, l'expression générale de toutes les fonctions aux mêmes multiplicateurs est

$$\Phi(z) R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction rationnelle de s et z.

Cas spécial. Supposons que les multiplicateurs m_k et n_k puissent être identifiés avec les multiplicateurs d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignent des constantes: en d'autres termes, supposons qu'il existe p constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ telles que l'on ait

$$(5) \qquad m_k = e^{-2\lambda_k \pi i}, \qquad n_k = e^{-2[\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk}]}. \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

Alors l'exponentielle $E(z)$ est une fonction *partout finie* possédant les multiplicateurs m_k et n_k; toute autre fonction régulière possédant les mêmes multiplicateurs sera égale au produit de cette exponentielle par une fonction rationnelle de s et z.

Ce cas spécial se présentera lorsque les multiplicateurs m_k et n_k vérifieront les p relations que nous allons former en éliminant $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$

entre les équations (5). Désignons par $N_1, N_2, \ldots, N_p$ des nombres entiers: nous aurons

$$\log m_k = -2\lambda_k\pi i - 2N_k\pi i;$$

puis, si nous désignons par $M_1, M_2, \ldots, M_p$ des nombres entiers, nous aurons de même

$$\log n_k = 2M_k\pi i - 2[\lambda_1 b_{1k} + \lambda_2 b_{2k} + \ldots + \lambda_p b_{pk}].$$

L'élimination de $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ donne donc

$$(6) \qquad \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$
$$= M_k\pi i + N_1 b_{1k} + N_2 b_{2k} + \ldots + N_p b_{pk}$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Telles sont les p relations, entre les multiplicateurs, qui caractérisent le cas spécial dont nous nous occupons. Dans ce cas, les relations (3) entre les zéros et les infinis d'une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k, se réduisent aux relations bien connues entre les zéros et les infinis d'une fonction algébrique rationnelle en s et z. (Voyez C. NEUMANN, loc. cit. page 275.)

Si l'on suppose le genre p égal à l'unité, on retrouve les fonctions doublement périodiques de seconde espèce d'une forme spéciale, qui ont été signalées par M. MITTAG-LEFFLER. (Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, Tome 90, page 177.)

En revenant maintenant au cas général où les multiplicateurs m_k et n_k sont quelconques, nous allons démontrer quelques propriétés fondamentales des fonctions à multiplicateurs.

Nous avons vu précédemment que les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et les zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_q$ d'une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k sont liés par les p relations (voyez page 13)

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=q}[w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$
$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Si q est supérieur ou égal à p, les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ et $(q - p)$ des zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_q$ peuvent être choisis arbitrairement; les p autres zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ sont déterminés par les équations ci-dessus (3).

La fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs m_k et n_k avec ces zéros et ces infinis est donnée par la formule (4)

$$(4) \qquad \Phi(z) = Ce^{\tilde{\omega}_{\alpha_1\beta_1}(z) + \tilde{\omega}_{\alpha_2\beta_2}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\alpha_q\beta_q}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]};$$

elle contient donc $(2q - p + 1)$ *constantes arbitraires* à savoir

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q;\ \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_q;\ C.$$

On trouve ainsi l'extension, aux fonctions à multiplicateurs, de théorèmes bien connus de la théorie des fonctions algébriques (voyez C. NEUMANN, loc. cit. pages 258 à 265).

Examinons d'abord les cas particuliers de $q = p$ et $q = p + 1$.

Si q est égal à p, on peut choisir arbitrairement les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$: alors les zéros sont déterminés, et la constante C seule reste en outre arbitraire. Une fonction aux multiplicateurs donnés devenant infinie seulement en p points est donc déterminée, à un facteur constant près, par la connaissance de ces p infinis.

Si q est égal à $p + 1$, on peut choisir arbitrairement les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$ et un zéro β_{p+1}: alors les autres zéros sont déterminés, et il reste à prendre arbitrairement la constante C. Une fonction aux multiplicateurs donnés, devenant infinie seulement en $(p + 1)$ points donnés, contient encore deux constantes arbitraires β_{p+1} et C. Il existe *deux fonctions $\Phi_1(z)$* et *$\Phi_2(z)$ linéairement indépendantes* admettant les multiplicateurs donnés et les $(p + 1)$ infinis donnés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$; *toute autre fonction $\Phi(z)$ ayant les mêmes multiplicateurs et les mêmes infinis est une fonction linéaire homogène à coefficients constants de $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$*

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z),$$

où μ_1 et μ_2 désignent des constantes. En effet, supposons que la fonction $\Phi_1(z)$ soit obtenue en donnant au zéro arbitraire β_{p+1} une certaine position et la fonction $\Phi_2(z)$ en donnant au zéro arbitraire β_{p+1} une autre position ne coïncidant avec aucun des zéros de $\Phi_1(z)$. Ces deux fonctions $\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ sont linéairement indépendantes puisqu'elles n'ont pas les mêmes zéros. L'expression

$$\mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

admet, quelles que soient les constantes μ_1 et μ_2, les multiplicateurs m_k, n_k et les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$; on pourra toujours disposer du rapport $\frac{\mu_1}{\mu_2}$ de façon que cette expression admette un des zéros d'une fonction quelconque $\Phi(z)$ aux mêmes multiplicateurs et aux mêmes infinis. Le rapport des constantes μ_1 et μ_2 étant ainsi déterminée, l'expression

$$\mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

aura les mêmes zéros que $\Phi(z)$, puisque les $(p + 1)$ zéros sont déterminés dès que l'un d'eux l'est. Cette expression ayant les mêmes zéros et les mêmes infinis que la fonction $\Phi(z)$ n'en diffère que par un facteur constant, pouvant être supposé égal à l'unité, puisque jusqu'à présent le rapport de μ_1 à μ_2 est seul déterminé. On a donc, comme nous l'avons annoncé,

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)$$

pour l'expression générale d'une fonction admettant les multiplicateurs donnés m_k, n_k et les $(p + 1)$ infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+1}$.

D'une manière générale, si l'on suppose

$$q = p + r,$$

il existe $(r + 1)$ *fonctions linéairement indépendantes*

$$\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots, \Phi_{r+1}(z)$$

admettant les multiplicateurs donnés m_k, n_k *et les infinis* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$. *Toute autre fonction* $\Phi(z)$ *ayant les mêmes multiplicateurs et les mêmes infinis est de la forme*

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z) + \ldots + \mu_{r+1} \Phi_{r+1}(z).$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r+1}$ *désignant des constantes.*

Ce théorème général se démontre comme le cas particulier ($r = 1$) que nous venons de traiter d'une façon détaillée. On peut aussi le rattacher à un théorème connu relatif aux fonctions algébriques rationnelles en s et z.

Soit, en effet, $\varphi(z)$ une fonction *déterminée* ayant les multiplicateurs m_k, n_k et les infinis donnés $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$; soit, comme ci-dessus, $\Phi(z)$ la fonction la plus générale admettant ces mêmes multiplicateurs et ces mêmes infinis. Le quotient

$$\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)}$$

est une fonction algébrique rationnelle en s et z admettant $(p + r)$ infinis à savoir les zéros de $\varphi(z)$. Or on sait que la fonction la plus générale rationnelle en s et z admettant $(p + r)$ infinis donnés est une fonction linéaire homogène à coefficients constants de $(r + 1)$ fonctions particulières rationnelles en s et z et admettant ces mêmes infinis, en convenant de compter parmi ces fonctions particulières une constante comme admettant les infinis donnés et des zéros identiques aux infinis. Nous pouvons toujours appeler

$$\frac{\Phi_1(z)}{\varphi(z)}, \quad \frac{\Phi_2(z)}{\varphi(z)}, \quad \ldots, \quad \frac{\Phi_{r+1}(z)}{\varphi(z)}$$

ces $(r + 1)$ fonctions particulières rationnelles en s et z, et nous avons la formule

$$\frac{\Phi(z)}{\varphi(z)} = \mu_1 \frac{\Phi_1(z)}{\varphi(z)} + \mu_2 \frac{\Phi_2(z)}{\varphi(z)} + \ldots + \mu_{r+1} \frac{\Phi_{r+1}(z)}{\varphi(z)},$$

qui, après suppression du dénominateur $\varphi(z)$, donne la relation à démontrer.

La formule

$$\Phi(z) = \mu_1 \Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z) + \ldots + \mu_{r+1} \Phi_{r+1}(z)$$

que nous venons d'établir, contient comme cas particulier la formule de décomposition en éléments simples indiquée par M. Appell (Journal de mathématiques de M. Resal, 3ième série, Tome 9, page 8, § 5). Nous ne reproduirons pas ici cette formule qui, tout en étant intéressante, est encore imparfaite, car l'élément simple de M. Appell devient infini, non pas en un seul point, mais en p points dont $(p - 1)$ sont étrangers à la question. Nous donnons dans la deuxième partie une formule beaucoup plus satisfaisante destinée à remplacer celle de M. Appell.

Les théorèmes que nous venons d'établir sont (comme les théorèmes analogues sur les fonctions algébriques) sujets à des exceptions, quand les $(p + r)$ infinis donnés sont des groupes particuliers de points. Il arrive alors qu'il existe *plus* de $(r + 1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les infinis et les multiplicateurs donnés. En effet, le raisonnement qui sert à établir ces théorèmes repose sur ce fait que, les $(p + r)$ infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{p+r}$ étant donnés, on peut choisir *arbitrairement* r zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{p+r}$ et *déterminer* les p zéros restants à l'aide des équations

$$(3) \qquad \sum_{j=1}^{j=q}[w_k(\beta_j) - w_k(\alpha_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p], \quad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

ce qui conduit à la résolution du problème d'inversion de Jacobi. Mais il est bien connu que les équations d'inversion présentent une indétermination dans certains cas (voyez Briot, *Fonctions abéliennes*, p. 96); dans ces cas d'indétermination un zéro de plus peut être choisi arbitrairement et il existe plus de $(r + 1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les multiplicateurs et les infinis donnés. Quand, par la suite, nous appliquerons les théorèmes précédents, nous devrons vérifier chaque fois que ce cas d'indétermination ne se présente pas.

Nous venons d'examiner ce qui se passe quand le nombre des infinis simples $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ est supérieur ou égal à p. Si ce nombre q *est inférieur* à p, les infinis $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ ne peuvent plus être pris arbitrairement, ainsi qu'il résulte des p relations (3) rappelées plus haut. Une fonction admettant les multiplicateurs donnés ne pourra alors devenir infinie *qu'en des groupes particuliers* de q points. Nous laissons de côté l'étude de ce cas $(q < p)$ et la recherche de ces groupes particuliers de q points. Cette question est d'ailleurs entièrement semblable à celle que M. Weierstrass traite dans son cours à propos du problème analogue relatif aux fonctions algébriques.

Dans le cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

si l'on cherche une fonction admettant ces multiplicateurs et devenant infinie en p points arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$, on trouve que les zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ de cette fonction sont confondus avec ses infinis et que cette fonction se réduit à l'exponentielle $E(z)$ qui n'a ni zéros ni infinis. Une fonction admettant ces multiplicateurs spéciaux et devenant effectivement infinie en p points ne peut exister que si ces points sont choisis d'une façon particulière. Nous n'insistons pas sur ces théorèmes qui se ramènent immédiatement aux théorèmes analogues relatif aux fonctions algébriques, puisque toute fonction admettant les multiplicateurs de $E(z)$ est égale au produit de cette exponentielle $E(z)$ par une fonction algébrique rationnelle en s et z.

M. Appell a montré que, dans le cas où les multiplicateurs sont quelconques, les pôles et les résidus d'une fonction à multiplicateurs sont liés par $(p - 1)$ relations: et que, dans le cas où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle comme $E(z)$, les pôles et les résidus sont liés par p relations (Journal de mathématiques de M. Resal, 3ième série, Tome 9, page 22, § 11). Nous dirons un mot de ces relations à propos des intégrales de première espèce.