Deuxième partie.

Sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs.

Soit $\Phi(z)$ une fonction uniforme et régulière sur la surface R_{ab} de Riemann, admettant le long des coupures a_k et b_k les multiplicateurs respectifs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$. L'intégrale de cette fonction

$$\int \Phi(z)dz$$

possède des propriétés intéressantes qui la rapprochent des intégrales abéliennes.

Tout d'abord, nous pourrons étendre à ces intégrales la classification des intégrales abéliennes. Nous dirons d'une intégrale de fonction à multiplicateurs:

qu'elle est de *première espèce,* si elle est *partout finie,*
qu'elle est de *deuxième espèce,* si elle n'a que des *infinis algébriques,*
qu'elle est de *troisième espèce,* si elle a des *infinis logarithmiques.*

Intégrales de première espèce.

Pour que l'intégrale

$$\int \Phi(z)dz$$

soit de première espèce, il faut et il suffit: (en supposant comme d'habitude que l'infini n'est pas un point de ramification)

1° que la fonction $\Phi(z)$ devienne à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$, 2° que les infinis de $\Phi(z)$ coïncident avec des points de ramification et que, dans le voisinage d'un de ces points $z = \zeta$, la fonction Φ devienne infinie comme une puissance de $\frac{1}{z-\zeta}$ inférieure à l'unité.

En désignant par $w(z)$ une intégrale *abélienne* de première espèce et par $w'(z)$ la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale, on voit que les conditions précédentes reviennent à celle-ci:

Le rapport $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ *est fini à l'infini et aux points de ramification; il ne devient infini qu'aux zéros de* $w'(z)$ *situés à distance finie.*

Nous allons, d'après cela, former l'expression de ce rapport qui est évidemment, comme son numérateur $\Phi(z)$, une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k.

On sait que la fonction algébrique $w'(z)$ devient nulle à distance finie en $(2p-2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

dont $(p-1)$ sont arbitraires; ces points sont liés par les relations suivantes bien connues

$$w_k(\gamma_1) + w_k(\gamma_2) + \ldots + w_k(\gamma_{2p-2}) \equiv G_k \qquad (k=1,2,\ldots,p) \tag{7}$$

les lettres $G_1, G_2, \ldots, G_p$ désignant des constantes et le signe $\equiv$ indiquant que l'égalité a lieu à des multiples près des modules de périodicité. (Voyez Briot, *Théorie des fonctions abéliennes,* p. 147 et 149, où ces constantes sont désignées par K_k et $2C_k$.)

Pour former le rapport $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$, il faut donc former la fonction la plus générale régulière sur R_{ab}, admettant les multiplicateurs m_k, n_k et devenant infinie aux $(2p-2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}.$$

Cette fonction admettra aussi $(2p-2)$ zéros

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et sera donnée par l'expression

$$\frac{\Phi(z)}{w'(z)} = Ce^{\tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_2\beta_2}(z)+\ldots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+w_2(z)\log m_2+\ldots+w_p(z)\log m_p]},$$

les zéros et les infinis étant liés par les p relations

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} [w_k(\beta_j) - w_k(\gamma_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

En vertu des relations (7) de la page précédente qui lient les infinis $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$, les relations ci-dessus s'écrivent plus simplement

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j) \tag{8}$$

$$\equiv G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Ces relations montrent que, sur les $(2p-2)$ zéros

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}$$

de la fonction $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$, on peut en prendre $(p-2)$ *arbitrairement,* par exemple $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$; les p zéros restants

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$$

seront déterminés par les équations (8) au nombre de p. La fonction la plus générale $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ contiendra donc dans son expression $(p-1)$ constantes arbitraires, à savoir les $(p-2)$ zéros arbitraires $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$ et le facteur constant C. Comme nous l'avons fait remarquer à la page 19, il faut s'assurer que les relations (8) déterminent effectivement p des zéros $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ dès qu'on connaît les $(p-2)$ autres $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$. Pour cela écrivons ces relations sous la forme

$$\sum_{j=1}^{j=p} w_k(\beta_j)$$

$$\equiv G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p] - \sum_{j=p+1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j);$$
$$(k=1,2,\ldots,p)$$

or, l'on sait que des équations de cette forme déterminent $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$ *excepté dans le cas spécial où les quantités*

$$\frac{1}{2}\log n_k - [b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

seraient nulles à des multiples près des modules de périodicité. (Voyez Briot, *Théorie des fonctions abéliennes,* page 96, § 56.) *Ecartons pour le moment ce cas spécial* qui a été examiné aux pages 14 et 15 de ce mémoire et dans lequel les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme $E(z)$; alors, ce cas étant écarté, on peut choisir arbitrairement $(p-2)$ zéros $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$ et déterminer les p zéros restants à l'aide des équations (8) de la page précédente. En donnant aux $(p-2)$ zéros arbitraires différentes positions, on obtient une infinité de fonctions ayant les infinis et les multiplicateurs donnés. Soient

$$\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots, \varphi_{p-1}(z)$$

$(p-1)$ de ces fonctions supposées *linéairement indépendantes:* l'expression la plus générale de la fonction $\frac{\Phi(z)}{w'(z)}$ ayant les mêmes infinis et les mêmes multiplicateurs sera

$$\frac{\Phi(z)}{w'(z)} = \mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z),$$

où $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ désignent des constantes arbitraires. En effet, cette fonction

$$\mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z)$$

possède les infinis et les multiplicateurs donnés et l'on pourra disposer des constantes $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ de façon qu'elle s'annule en $(p-2)$ points donnés. Il est d'ailleurs évident qu'il existe au moins $(p - 1)$ fonctions linéairement indépendantes admettant les infinis et les multiplicateurs donnés, puisque $(p - 2)$ zéros peuvent être pris arbitrairement. (Voyez à ce sujet les théorèmes des pages 16 et 17.)

En résumé:

Pour que l'intégrale $\int \Phi(z)dz$ *reste finie il faut et il suffit que la fonction* $\Phi(z)$ *soit de la forme*

$$\Phi(z) = w'(z)[\mu_1\varphi_1(z) + \mu_2\varphi_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\varphi_{p-1}(z)]$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ *étant des constantes arbitraires.*

Théorème. *En dehors du cas spécial où les multiplicateurs* m_k, n_k *sont ceux d'une exponentielle* $E(z)$ (page 14), *il existe* $(p - 1)$ *intégrales de première espèce linéairement indépendantes*

$$\omega_1(z) = \int w'(z)\varphi_1(z)dz, \qquad \omega_2(z) = \int w'(z)\varphi_2(z)dz,$$

$$\ldots, \quad \omega_{p-1}(z) = \int w'(z)\varphi_{p-1}(z)dz;$$

toute autre intégrale de première espèce $\omega(z)$ *est de la forme*

$$\omega(z) = \mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \ldots + \mu_{p-1}\omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ *étant des constantes.*

Cas spécial. Plaçons-nous maintenant dans le cas spécial examiné précédemment (page 14) où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ désignant des constantes. Alors toute fonction, régulière sur la surface de Riemann R_{ab} et admettant ces multiplicateurs spéciaux, est de la forme

$$E(z)R(s, z)$$

où $R(s, z)$ désigne une fonction algébrique rationnelle en s et z. Pour obtenir les intégrales de première espèce, il faudra déterminer cette fonction $R(s, z)$ de façon que l'intégrale

$$\int E(z) R(s, z) dz$$

soit partout finie. Comme l'exponentielle $E(z)$ n'a ni zéros ni infinis, pour que l'intégrale ci-dessus soit finie, il faut et il suffit que l'intégrale

$$\int R(s, z) dz$$

le soit, c'est à dire que cette dernière intégrale soit une intégrale abélienne de première espèce

$$\int R(s, z) dz = \mu_1 w_1(z) + \mu_2 w_2(z) + \ldots + \mu_p w_p(z) + C^{te};$$

d'où en différentiant et appelant $w_k'(z)$ la dérivée de $w_k(z)$

$$R(s, z) = \mu_1 w_1'(z) + \mu_2 w_2'(z) + \ldots + \mu_p w_p'(z).$$

Si l'intégrale

$$\int E(z) R(s, z) dz$$

est de première espèce, elle est donc de la forme

$$\mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_p \omega_p(z) + C^{te},$$

à condition de poser

$$\omega_1(z) = \int E(z) w_1'(z) dz, \qquad \omega_2(z) = \int E(z) w_2'(z) dz,$$
$$\ldots, \quad \omega_p(z) = \int E(z) w_p'(z) dz.$$

Dans ce cas spécial il y a donc p intégrales de première espèce linéairement indépendantes et non $(p - 1)$ comme dans le cas géneral.

Mais, dans ce cas spécial, *il y a entre ces p intégrales de première espèce une relation* fort simple qui permet d'exprimer l'une d'entre elles au moyen des $(p - 1)$ autres et de l'exponentielle $E(z)$. En effet, en différentiant l'équation

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

on a

$$dE(z) = -2E(z)[\lambda_1 w_1'(z) + \lambda_2 w_2'(z) + \ldots + \lambda_p w_p'(z)]dz;$$

d'où, en intégrant,

$$E(z) = -2[\lambda_1 \omega_1(z) + \lambda_2 \omega_2(z) + \ldots + \lambda_p \omega_p(z)] + C^{te}; \tag{9}$$

ce qui est la relation annoncée.

Relations entre les pôles et les résidus d'une fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs donnés m_k et n_k.

Soit une fonction $\Phi(z)$ aux multiplicateurs m_k et n_k admettant les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ que nous supposons, pour simplifier, *du premier ordre, distincts des points de ramification* et *situés à distance finie:* appelons $R_1, R_2, \ldots, R_q$ les résidus relatifs à ces pôles. Construisons par la méthode que nous venons d'indiquer, une fonction $\Omega'(z)$ ayant les multiplicateurs *inverses* de m_k, n_k, c'est à dire admettant le long de la coupure a_k le multiplicateur $\frac{1}{m_k}$ et le long de la coupure b_k le multiplicateur $\frac{1}{n_k}$; formons en outre cette fonction $\Omega'(z)$ de telle façon que l'intégrale

$$\Omega(z) = \int \Omega'(z)dz$$

soit finie partout, c'est à dire soit de *première espèce.* Cette fonction $\Omega'(z)$ devient alors à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$; elle devient infinie aux points de ramification, mais de telle façon que son intégrale reste finie. Dans ces conditions le produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

est une fonction régulière et uniforme sur la surface R de Riemann, par suite une fonction algébrique rationnelle en s et z; en effet le long d'une coupure, a_k par exemple, on a, en appelant comme toujours λ un point du bord gauche de la coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit:

$$\Phi(\lambda) = m_k\Phi(\rho), \qquad \Omega'(\lambda) = \frac{1}{m_k}\Omega'(\rho),$$

d'où l'on conclut

$$\Phi(\lambda)\Omega'(\lambda) = \Phi(\rho)\Omega'(\rho).$$

On pourra donc supprimer la coupure a_k sans que le produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

cesse d'être uniforme; on pourra répéter la même chose pour la coupure b_k. Donc ce produit est uniforme sur la surface primitive R de Riemann; il est une *fonction rationnelle* de s et z. Cette fonction rationnelle de s et z devenant à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$, la somme de ses résidus est *nulle* d'après un théorème bien connu. Or les pôles de ce produit

$$\Phi(z)\Omega'(z)$$

sont:

1° les pôles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$ du premier facteur $\Phi(z)$; en ces pôles le produit a pour résidus respectifs $R_1\Omega'(\alpha_1), R_2\Omega'(\alpha_2), \ldots, R_q\Omega'(\alpha_q)$;

2° les pôles du second facteur $\Omega'(z)$ qui sont tous situés aux points de ramification; en ces pôles tout les résidus sont *nuls* puisque l'intégrale $\Omega(z)$ est partout finie.

La somme des résidus du produit devant être *nulle*, on a la relation

$$(10) \qquad R_1\Omega'(\alpha_1) + R_2\Omega'(\alpha_2) + \ldots + R_q\Omega'(\alpha_q) = 0.$$

Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas de la forme spéciale (page 14) qui permet de les identifier avec ceux d'une exponentielle $E(z)$, leurs inverses ne sont pas non plus de cette forme spéciale. La fonction $\Omega'(z)$ est alors une fonction linéaire à coefficients constants arbitraires de $(p-1)$ fonctions particulières $\Omega_1'(z), \Omega_2'(z), \ldots, \Omega_{p-1}'(z)$, et l'on a

$$\Omega'(z) = \mu_1\Omega_1'(z) + \mu_2\Omega_2'(z) + \ldots + \mu_{p-1}\Omega_{p-1}'(z),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ désignant des constantes arbitraires. La relation (10) donne donc, entre les pôles et les résidus, $(p-1)$ relations distinctes

$$\begin{aligned}
R_1\Omega_1'(\alpha_1) &+ R_2\Omega_1'(\alpha_2) + \ldots + R_q\Omega_1'(\alpha_q) = 0,\\
R_1\Omega_2'(\alpha_1) &+ R_2\Omega_2'(\alpha_2) + \ldots + R_q\Omega_2'(\alpha_q) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
R_1\Omega_{p-1}'(\alpha_1) &+ R_2\Omega_{p-1}'(\alpha_2) + \ldots + R_q\Omega_{p-1}'(\alpha_q) = 0.
\end{aligned}$$

Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k de $\Phi(z)$ sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

les multiplicateurs inverses $\frac{1}{m_k}$ et $\frac{1}{n_k}$ sont ceux d'une exponentielle $\frac{1}{E(z)}$ de la même forme. La fonction $\Omega'(z)$ est alors une fonction linéaire à coefficients constants de p fonctions particulières

$$\Omega'(z) = \mu_1 \Omega_1'(z) + \mu_2 \Omega_2'(z) + \ldots + \mu_p \Omega_p'(z),$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ étant des constantes arbitraires. La relation (10) se décompose donc, dans ce cas, en p relations distinctes que l'on peut écrire

$$R_1 \Omega_k'(\alpha_1) + R_2 \Omega_k'(\alpha_2) + \ldots + R_q \Omega_k'(\alpha_q) = 0$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Dans ce cas spécial, on pourrait aussi obtenir ces p relations en remarquant que le quotient

$$\frac{\Phi(z)}{E(z)}$$

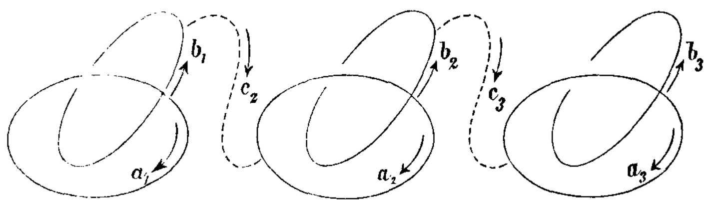
est une fonction algébrique et écrivant les p relations bien connues qui lient les pôles et les résidus d'une fonction algébrique.

Nous n'examinerons pas ici comment il faut modifier ces relations quand certains pôles deviennent multiples ou viennent coïncider avec des points de ramification. Ces modifications sont les mêmes que dans les questions analogues relatives aux fonctions algébriques. (Voyez le Mémoire de M. APPELL, *Sur les fonctions uniformes d'un point analytique*, Acta mathematica, Tome 1, et une Note de M. GOURSAT, *Sur la théorie des intégrales abéliennes*, Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Tome 97, page 1281.)

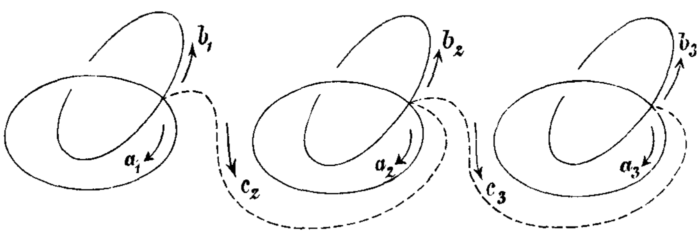
Pour avoir un exemple très particulier des théorèmes précédents, prenons le cas de $p = 1$. Nous verrons alors qu'il n'y a *aucune relation* entre les résidus d'une fonction doublement périodique *générale* de seconde espèce, mais qu'il y a *une* relation entre les pôles et les résidus d'une fonction doublement périodique de seconde espèce de la forme spéciale $e^{\lambda u} f(u)$, $f(u)$ étant doublement périodique et λ constant.

Modules de périodicité des intégrales de première espèce.

Pour simplifier l'étude des modules de périodicité, nous allons particulariser le système des coupures $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p, c_2, c_3, \ldots, c_p$ de RIEMANN reproduit par C. NEUMANN. En nous reportant à la figure schématique donnée par C. NEUMANN (*Riemann's Theorie der Abelschen Integrale,* zweite Auflage, Leipzig 1884, page 184), figure que nous reproduisons ci-dessous,



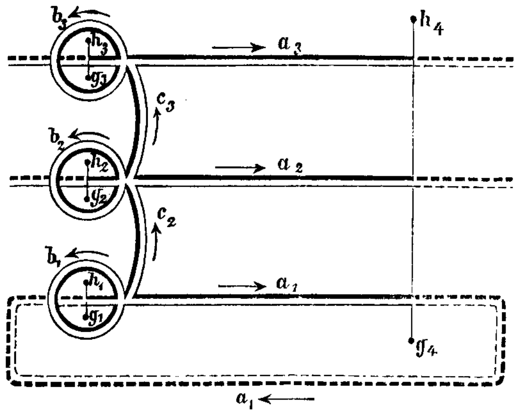
nous voyons que nous pouvons faire partir la coupure c_2 d'un point quelconque de b_1 pour la faire aboutir en un point quelconque de a_2; nous conviendrons, dans tout ce qui suit, de faire partir la coupure c_2 du point de croisement des coupures b_1 et a_1 pour la faire aboutir au point de croisement de b_2 et a_2; puis nous ferons partir la coupure c_3 de ce dernier point pour la faire aboutir au point de croisement de b_3 et a_3; et ainsi de suite, comme le montre cette nouvelle figure



Pour achever de préciser la disposition que nous adoptons pour les coupures $c_2, c_3, \ldots, c_p$, reprenons l'exemple traité par C. NEUMANN (loc. cit. page 178) dans lequel l'équation entre s et z est

$$s^2 = (z-g_1)(z-h_1)(z-g_2)(z-h_2)(z-g_3)(z-h_3)(z-g_4)(z-h_4).$$

L'on modifiera alors la figure donnée par NEUMANN (loc. cit. page 179) comme il est indiqué ci-dessous:



Pour ne pas surcharger la figure, nous n'avons pas tracé en entier les coupures a_2 et a_3 sur le feuillet inférieur de la surface; nous avons, comme NEUMANN, marqué d'un trait plus épais le bord gauche des coupures et ponctué les coupures situées sur le feuillet inférieur.

Cela posé, soit

$$\omega(z) = \int \omega'(z)\,dz$$

une intégrale de première espèce formée comme nous l'avons vu plus haut, la fonction $\omega'(z)$ admettant les multiplicateurs m_k et n_k. Comme cette fonction $\omega'(z)$ est uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} rendue simplement connexe à l'aide des coupures

$$\begin{array}{r} a_1\,,\ a_2\,,\ \ldots\,,\ a_p\,, \\ b_1\,,\ b_2\,,\ \ldots\,,\ b_p\,, \\ c_2\,,\ \ldots\,,\ c_p\,, \end{array}$$

et comme les résidus de cette fonction sont tous nuls, *l'intégrale $\omega(z)$ est aussi uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} et d'après sa formation même elle reste finie partout.*

Considérons la coupure a_k et appelons λ un point situé sur le bord gauche de cette coupure, ρ le point situé en face de λ sur le bord droit.

La fonction $\omega'(z)$ admettant le long de cette coupure a_k le multiplicateur m_k, on a

$$\omega'(\lambda) = m_k \omega'(\rho).$$

Pour un déplacement effectué le long de la coupure on a

$$d\lambda = d\rho,$$

puisque les points λ et ρ sont en face l'un de l'autre. On a donc aussi

$$\omega'(\lambda) d\lambda - m_k \omega'(\rho) d\rho = 0$$

et, en intégrant, on a tout le long de la coupure,

$$\omega(\lambda) - m_k \omega(\rho) = A_k,$$

la lettre A_k désignant une *constante*. Nous appellerons cette constante le *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure a_k.

De même, les deux valeurs de l'intégrale $\omega(z)$ en deux points λ et ρ, situés en face l'un de l'autre sur les bords gauche et droit de la coupure b_k, sont liées par la relation

$$\omega(\lambda) - n_k \omega(\rho) = B_k,$$

où B_k désigne une *constante* que nous appellerons *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure b_k.

Enfin, sur les deux bords d'une coupure c_h, on a comme nous l'avons vu à la page 9 pour toute fonction à multiplicateurs

$$\omega'(\lambda) = \omega'(\rho), \qquad \omega'(\lambda) d\lambda - \omega'(\rho) d\rho = 0,$$

d'où

$$\omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_h,$$

C_h étant constant tout le long de la coupure c_h. Cette constante C_h sera appelée *module de périodicité* de l'intégrale $\omega(z)$ le long de la coupure c_h.

Donc:

L'intégrale de première espèce $\omega(z)$ possède $(3p - 1)$ modules de périodicité, à savoir les modules

$$\begin{array}{rlr}
A_1, A_2, \ldots, A_p & \text{le long des coupures} & a_1, a_2, \ldots, a_p, \\
B_1, B_2, \ldots, B_p & \text{le long des coupures} & b_1, b_2, \ldots, b_p, \\
C_2, \ldots, C_p & \text{le long des coupures} & c_2, \ldots, c_p;
\end{array}$$

c'est à dire que l'on a

$$\text{le long de } a_k\text{:} \quad \omega(\lambda) - m_k\omega(\rho) = A_k, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

$$\text{le long de } b_k\text{:} \quad \omega(\lambda) - n_k\omega(\rho) = B_k, \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

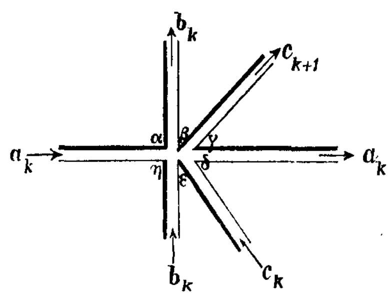
$$\text{le long de } c_h\text{:} \quad \omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_h. \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

Mais ces $(3p - 1)$ modules de périodicité sont liés par p relations linéaires et homogènes permettant d'exprimer p d'entre eux à l'aide des $(2p - 1)$ autres. Voici comment on obtient ces relations.

Figurons le point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} et appelons

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta,$$

les sommets des six angles formés par les bords de ces coupures, comme le montre la figure suivante:



Nous aurons, d'après la définition des modules de périodicité, et puisque l'épaisseur des coupures est infiniment petite, les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\omega(\alpha) - n_k\omega(\beta) &= B_k,\\
\omega(\beta) - \omega(\gamma) &= C_{k+1},\\
\omega(\gamma) - m_k\omega(\delta) &= A_k,\\
\omega(\varepsilon) - \omega(\delta) &= C_k,\\
\omega(\eta) - n_k\omega(\varepsilon) &= B_k,\\
\omega(\alpha) - m_k\omega(\eta) &= A_k.
\end{aligned}$$

Multiplions ces équations respectivement par $+1$, n_k, n_k, $-m_kn_k$, $-m_k$,

-1, puis ajoutons-les membre à membre. La somme des premiers membres est nulle et l'on obtient la relation

$$B_k(1-m_k)-A_k(1-n_k)-m_k n_k C_k+n_k C_{k+1}=0. \tag{11}$$

En supposant, successivement, $k=1, 2, \ldots, p$, on aura ainsi p relations. Comme il n'existe ni coupure c_1 ni coupure c_{p+1}, il faudra dans ces relations considérer les constantes C_1 et C_{p+1} comme étant *nulles*. En écrivant ces p relations en détail, nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} B_1(1-m_1)-A_1(1-n_1)\qquad\qquad +n_1 C_2=0, \\ B_2(1-m_2)-A_2(1-n_2)-m_2 n_2 C_2+n_2 C_3=0, \\ B_3(1-m_3)-A_3(1-n_3)-m_3 n_3 C_3+n_3 C_4=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ B_{p-1}(1-m_{p-1})-A_{p-1}(1-n_{p-1})-m_{p-1} n_{p-1} C_{p-1}+n_{p-1} C_p=0, \\ B_p(1-m_p)-A_p(1-n_p)-m_p n_p C_p=0. \end{array}\right. \tag{12}$$

Ces relations permettent d'exprimer $C_2, C_3, \ldots, C_p$ en fonction des modules de périodicité A_k, B_k et des multiplicateurs m_k, n_k. Dans le cas particulier où tous ces multiplicateurs m_k, n_k seraient égaux à *l'unité*, l'intégrale $\omega(z)$ deviendrait une *intégrale abélienne* de première espèce, et les relations ci-dessus montreraient que les constantes $C_2, C_3, \ldots, C_p$ seraient toutes *nulles* dans ce cas.

En éliminant les $(p-1)$ constantes $C_2, C_3, \ldots, C_p$ entre les p relations (12), on obtiendra une relation entre les modules de périodicité $A_1, A_2, \ldots, A_p, B_1, B_2, \ldots, B_p$. Pour cela, multiplions la première des équations (12) par $\frac{1}{m_1}\cdot\frac{1}{n_1}$, la seconde par $\frac{1}{m_1 m_2}\cdot\frac{1}{n_2}$, la troisième par $\frac{1}{m_1 m_2 m_3}\cdot\frac{1}{n_3}, \ldots$ la $k^{\text{ième}}$ par $\frac{1}{m_1 m_2 \ldots m_k}\cdot\frac{1}{n_k}, \ldots$, et ajoutons-les: nous obtiendrons l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{B_k(1-m_k)-A_k(1-n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k}\cdot\frac{1}{n_k}=0, \tag{13}$$

équation qui est une identité dans le cas particulier des intégrales abéliennes, puisque dans ce cas tous les multiplicateurs sont égaux à l'unité.

L'intégrale

$$\omega(z) = \int \omega'(z)dz$$

prise sur tout le contour de la surface de Riemann R_{abc} est évidemment *nulle.* Or la valeur de cette intégrale est facile à calculer en fonction des modules de périodicité et des multiplicateurs. Si l'on égale cette valeur à zéro, on obtient une relation qui n'est pas nouvelle mais qui est une conséquence des relations précédentes (12).

Cas spécial. Lorsque les multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]},$$

il existe, comme nous l'avons vu, p intégrales de première espèce

$$\omega_k(z) = \int E(z) w'_k(z) dz. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

Une quelconque d'entre elles, $\omega(z)$, aura $(3p - 1)$ modules de périodicité liés par les relations que nous venons d'indiquer. Les modules de périodicité de l'intégrale $\lambda_p \omega_p(z)$ sont égaux et de signes contraires aux sommes des modules de périodicité correspondants des $(p - 1)$ autres intégrales $\lambda_1 \omega_1(z), \lambda_2 \omega_2(z), \ldots, \lambda_{p-1} \omega_{p-1}(z)$. C'est ce qui résulte immédiatement de l'identité (p. 27)

$$(9) \qquad 2[\lambda_1 \omega_1(z) + \lambda_2 \omega_2(z) + \ldots + \lambda_p \omega_p(z)] = -E(z) + C^{te}$$

dans laquelle les modules de périodicité du second membre sont tous *nuls.*

Relation entre les modules de périodicité de deux intégrales de première espèce aux multiplicateurs inverses.

La relation que nous allons établir est l'extension, à nos intégrales, de la célèbre relation qui lie les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce. Nous la démontrerons en suivant la méthode que Riemann a donnée pour les intégrales abéliennes.

Soit, comme précédemment, $\omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m_k, n_k, et soient

$$A_k, B_k, C_h \qquad \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale. D'autre part, désignons par $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k *inverses* de m_k et n_k:

$$m'_k = \frac{1}{m_k}, \qquad n'_k = \frac{1}{n_k}; \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

et soient

$$A'_k, B'_k, C'_h \qquad \left(\begin{smallmatrix} k=1,2,\ldots,p \\ h=2,3,\ldots,p \end{smallmatrix}\right)$$

les modules de périodicité de cette seconde intégrale $\Omega(z)$.

L'intégrale

$$(14) \qquad I = \int \Omega(z)\,d\omega(z)$$

prise sur le contour de la surface de Riemann R_{abc} est *nulle*, car la fonction

$$\Omega(z)\,\omega'(z)$$

est sur cette surface uniforme et régulière et a tous ses résidus nuls.

Pour calculer cette intégrale I, appelons avec C. Neumann, λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit. Lorsque la variable d'intégration z parcourt le contour de la surface R_{abc} dans le sens positif, elle parcourt les deux bords d'une même coupure en sens contraire. Les parties de l'intégrale relatives aux deux bords d'une même coupure seront

$$\int [\Omega(\lambda)\,d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)\,d\omega(\rho)],$$

l'intégration étant faite dans le sens positif le long du bord gauche. L'intégrale I sera donc

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} \left[\int_{a_k} [\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho)] + \int_{b_k} [\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho)] \right]$$
$$+ \sum_{h=2}^{h=p} \int_{c_h} [\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho)],$$

les indices a_k, b_k, c_h signifiant que les intégrales qui en sont affectées sont prises le long des coupures a_k, b_k, c_h. Or, sur la coupure a_k, on a

$$\Omega(\lambda) = m'_k \Omega(\rho) + A'_k, \qquad \omega(\lambda) = m_k \omega(\rho) + A_k,$$

d'où l'on déduit

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = A'_k d\omega(\lambda) + (m_k m'_k - 1)\Omega(\rho)d\omega(\rho);$$

mais, comme les multiplicateurs m_k et m'_k ont été supposés *inverses* l'un de l'autre, on a

$$m_k m'_k - 1 = 0$$

et l'équation ci-dessus prend la forme plus simple

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = A'_k d\omega(\lambda).$$

On a de même le long de la coupure b_k

$$\Omega(\lambda) = n'_k \Omega(\rho) + B'_k, \qquad \omega(\lambda) = n_k \omega(\rho) + B_k,$$

d'où l'on déduit, puisque $n_k n'_k - 1 = 0$,

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = B'_k d\omega(\lambda).$$

Enfin le long de la coupure c_h, on a

$$\Omega(\lambda) = \Omega(\rho) + C'_h, \qquad \omega(\lambda) = \omega(\rho) + C_h,$$

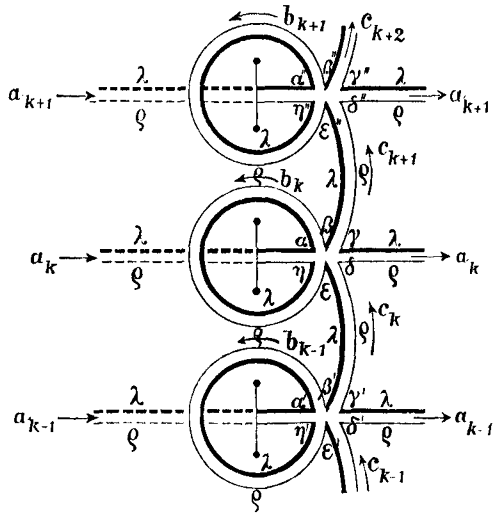
d'où l'on déduit

$$\Omega(\lambda)d\omega(\lambda) - \Omega(\rho)d\omega(\rho) = C'_h d\omega(\lambda).$$

D'après cela, l'intégrale I devient

$$(15) \qquad I = \sum_{k=1}^{k=p} \left[A'_k \int_{a_k} d\omega(\lambda) + B'_k \int_{b_k} d\omega(\lambda) \right] + \sum_{h=2}^{h=p} C'_h \int_{c_h} d\omega(\lambda).$$

Nous allons transformer cette expression et l'amener à ne contenir que les modules de périodicité des deux intégrales $\Omega(z)$ et $\omega(z)$. Pour faire cette transformation, figurons les coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} et les points de croisement des coupures a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, c_k, a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, c_{k+2}. Appelons (voyez la figure de la page suivante) α, β, γ, δ, ε, η les sommets des six angles formés par les bords des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1} en leur point de croisement; α', β', γ', δ', ε', η' et α'', β'', γ'', δ'', ε'', η'' les sommets des angles analogues aux points de croisement des coupures a_{k-1}, b_{k-1}, c_{k-1}, c_k et a_{k+1}, b_{k+1}, c_{k+1}, c_{k+2}.



Nous aurons

$$\int_{a_k} d\omega(\lambda) = \omega(\alpha) - \omega(\gamma), \qquad \int_{b_k} d\omega(\lambda) = \omega(\eta) - \omega(\alpha),$$

$$\int_{c_k} d\omega(\lambda) = \omega(\varepsilon) - \omega(\beta'), \qquad \int_{c_{k+1}} d\omega(\lambda) = \omega(\varepsilon'') - \omega(\beta),$$

car toutes ces intégrales sont prises sur les bords gauches des coupures dans le sens indiqué par les flèches. (Les bords gauches sont marqués d'un trait plus gros.)

En calculant ainsi tous les termes de l'intégrale I

$$(15) \qquad I = \sum_{k=1}^{k=p} \left[A'_k \int_{a_k} d\omega(\lambda) + B'_k \int_{b_k} d\omega(\lambda) \right] + \sum_{h=2}^{h=p} C''_h \int_{c_h} d\omega(\lambda),$$

on aura l'intégrale I exprimée par une somme de termes où figureront les valeurs de l'intégrale $\omega(z)$ aux sommets des angles tels que $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$, formés par les bords des coupures en leurs points de croisement. Evaluons, dans cette somme I, les termes qui contiennent les valeurs de l'intégrale $\omega(z)$ en l'un des six points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$ situés au point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1}: nous désignerons ces termes par I_k. L'intégrale I sera la somme des quantités analogues à I_k évaluées successivement pour tous les points de croisement des coupures, et l'on aura

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} I_k.$$

D'après les intégrales évaluées à la page précédente, les termes de l'intégrale I qui contiennent les valeurs de $\omega(z)$ en l'un des six points $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \eta$, sont

$$I_k = A'_k[\omega(\alpha) - \omega(\gamma)] + B'_k[\omega(\eta) - \omega(\alpha)] + C'_k\omega(\varepsilon) - C'_{k+1}\omega(\beta).$$

Mais la figure de la page précédente donne d'après la définition même des modules de périodicité

$$\omega(\alpha) = n_k\omega(\beta) + B_k, \qquad \omega(\beta) = \omega(\gamma) + C_{k+1},$$
$$\omega(\alpha) = m_k\omega(\eta) + A_k, \qquad \omega(\eta) = n_k\omega(\varepsilon) + B_k;$$

l'on tire de ces relations, en exprimant

$$\omega(\beta), \omega(\gamma), \omega(\varepsilon), \omega(\eta)$$

en fonction de $\omega(\alpha)$ et faisant comme plus haut

$$\frac{1}{m_k} = m'_k, \qquad \frac{1}{n_k} = n'_k,$$

$$\omega(\beta) = n'_k\omega(\alpha) - n'_kB_k, \qquad \omega(\gamma) = n'_k\omega(\alpha) - n'_kB_k - C_{k+1},$$
$$\omega(\eta) = m'_k\omega(\alpha) - m'_kA_k, \qquad \omega(\varepsilon) = m'_kn'_k\omega(\alpha) - n'_k(m'_kA_k + B_k).$$

D'après cela, la quantité I_k devient:

$$I_k = \omega(\alpha)[A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_kn'_kC'_k - n'_kC'_{k+1}]$$
$$+ A'_k(n'_kB_k + C_{k+1}) - m'_kB'_kA_k - n'_kC'_k(m'_kA_k + B_k) + n'_kC'_{k+1}B_k.$$

Le coefficient de $\omega(\alpha)$

$$A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_kn'_kC'_k - n'_kC'_{k+1}$$

est *nul*, en vertu des relations (12) (page 34) appliquées aux modules de périodicité de l'intégrale $\Omega(z)$ dont les multiplicateurs sont m'_k et n'_k. Il reste alors

$$I_k = A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C'_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C'_{k+1} B_k.$$

Tels sont, dans l'intégrale I, les termes provenant du point de croisement des coupures a_k, b_k, c_k, c_{k+1}: l'intégrale I sera, comme nous l'avons déjà dit,

$$I = \sum_{k=1}^{k=p} I_k.$$

Puisque cette intégrale I est *nulle*, on a donc la relation cherchée

$$(16) \qquad \sum_{k=1}^{k=p} [A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C'_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C'_{k+1} B_k] = 0$$

entre les modules de périodicité A_k, B_k, C_h et A'_k, B'_k, C'_h des deux intégrales $\omega(z)$ et $\Omega(z)$ aux multiplicateurs inverses. Comme les coupures c_1 et c_{p+1} *n'existent pas*, il faudra, suivant des conventions déjà faites, supposer

$$C_1 = C'_1 = C_{p+1} = C'_{p+1} = 0.$$

Comme vérification, supposons que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité, alors leurs inverses m'_k et n'_k deviennent aussi égaux à l'unité, et les deux intégrales $\omega(z)$, $\Omega(z)$ deviennent deux intégrales abéliennes de première espèce. Dans ce cas limite, les constantes C_k et C'_k sont toutes *nulles*, et la relation (16) que nous venons d'établir devient

$$\sum_{k=1}^{k=p} (A'_k B_k - A_k B'_k) = 0,$$

ce qui est la relation bien connue liant les modules de périodicité de deux intégrales abéliennes de première espèce.

Remarque. La relation (16) établie plus haut peut être transformée à l'aide des relations (12) de la page (34):

$$\left.\begin{aligned} A_k(1 - n_k) - B_k(1 - m_k) + m_k n_k C_k - n_k C_{k+1} &= 0, \\ A'_k(1 - n'_k) - B'_k(1 - m'_k) + m'_k n'_k C'_k - n'_k C'_{k+1} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (k = 1, 2, \ldots, p$$

C'est en se servant de ces relations que l'on pourrait montrer que la relation (16) est symétrique par rapport aux deux intégrales $\omega(z)$ et $\Omega(z)$, c'est à dire que cette relation ne change pas quand on y remplace A_k, B_k, C_k, m_k, n_k par $A'_k, B'_k, C'_k, m'_k, n'_k$ et inversement.

Supposons, par exemple, les multiplicateurs n_k et n'_k différents de l'unité ($k = 1, 2, \ldots, p$). Alors on pourra écrire les relations que nous venons de rappeler

$$A_k = \frac{n_k C_{k+1} - m_k n_k C_k + B_k(1 - m_k)}{1 - n_k},$$

$$A'_k = \frac{n'_k C'_{k+1} - m'_k n'_k C'_k + B'_k(1 - m'_k)}{1 - n'_k}$$

ou, en remplaçant dans la première n_k et m_k par $\frac{1}{n'_k}$ et $\frac{1}{m'_k}$

$$A_k = -\frac{m'_k C_{k+1} - C_k - n'_k B_k(1 - m'_k)}{m'_k(1 - n'_k)}.$$

L'on aura donc, en remplaçant dans I_k, A_k et A'_k par ces valeurs et réduisant

$$\begin{aligned} I_k &= A'_k(n'_k B_k + C_{k+1}) - m'_k B'_k A_k - n'_k C'_k(m'_k A_k + B_k) + n'_k C'_{k+1} B_k \\ &= \frac{n'_k B_k(C'_{k+1} - C'_k) + B'_k(C_{k+1} - C_k) + n'_k(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k)}{1 - n'_k}. \end{aligned}$$

La relation (16)

$$\sum_{k=1}^{k=p} I_k = 0,$$

peut donc s'écrire

$$(17) \quad \sum_{k=1}^{k=p} \frac{n'_k B_k(C'_{k+1} - C'_k) + B'_k(C_{k+1} - C_k)}{1 - n'_k} + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{n'_k}{1 - n'_k}(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k) = 0$$

où la symétrie se met aisément en évidence. En effet remarquons que la somme

$$\sum_{k=1}^{k=p}(C_{k+1}C'_{k+1} - C_k C'_k)$$

se réduit à

$$C_{p+1}C'_{p+1} - C_1 C'_1$$

c'est à dire à *zéro*, puisque

$$C_1 = C'_1 = C_{p+1} = C'_{p+1} = 0.$$

Ajoutons alors la moitié de cette somme nulle à la relation (17), nous aurons

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{n'_k B_k (C'_{k+1} - C'_k) + B'_k (C_{k+1} - C_k)}{1 - n'_k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=p} \frac{1 + n'_k}{1 - n'_k} (C_{k+1} C'_{k+1} - C_k C'_k) = 0,$$

relation dont le premier membre ne fait que changer de signe quand on remplace B'_k, C'_h, m'_k, n'_k par B_k, C_h, m_k, n_k et inversement B_k, C_h, m_k, n_k par B'_k, C'_h, m'_k, n'_k.

Ainsi, en supposant le genre p égal à 2 on a la relation suivante, puisqu'alors

$$C_1 = C'_1 = C_3 = C'_3 = 0:$$

$$(18) \qquad \frac{n'_1 B_1 C'_2 + B'_1 C_2}{1 - n'_1} - \frac{n'_2 B_2 C'_2 + B'_2 C_2}{1 - n'_2} + \frac{C_2 C'_2}{2} \left(\frac{1 + n'_1}{1 - n'_1} - \frac{1 + n'_2}{1 - n'_2} \right) = 0.$$

Intégrales de troisième espece.

Soit $\Phi(z)$ une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k, l'intégrale de cette fonction

$$\int \Phi(z) dz$$

est de *troisième espèce,* lorsqu'en certains points $z_1, z_2, \ldots$ de la surface de Riemann elle devient infinie comme

$$K_1 \log(z - z_1), \qquad K_2 \log(z - z_2), \quad \ldots$$

$K_1, K_2, \ldots$ désignant des constantes.

L'intégrale la plus simple de troisième espèce sera celle qui reste *finie* sur toute la surface de Riemann, *sauf en un seul point* z_0 où elle devient infinie comme

$$\log(z - z_0).$$

Une telle intégrale *existe toujours, excepté dans le cas spécial* où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas spécial, toute intégrale de troisième espèce a *au moins deux infinis logarithmiques* z_0 et z_1, comme nous le verrons plus loin.

En laissant de côté ce cas spécial, nous allons former l'intégrale annoncée qui devient infinie en un seul point z_0 et cela comme

$$\log(z - z_0).$$

Soit

$$\varpi(z, z_0) = \int \varphi(z, z_0) dz$$

cette intégrale. La fonction $\varphi(z, z_0)$ devra être uniforme et régulière sur la surface de Riemann R_{ab}, admettre les multiplicateurs donnés m_k et n_k et devenir en chaque point à l'infini infiniment petite comme $\frac{1}{z^2}$; cette fonction pourra devenir infinie en certains points de ramification ζ comme une puissance de $\frac{1}{z - \zeta}$ inférieure à l'unité; enfin elle devra devenir infinie au point z_0 comme $\frac{1}{z - z_0}$. Pour former cette fonction $\varphi(z, z_0)$, désignons comme précédemment par

$$w(z) = \int w'(z) dz$$

une intégrale abélienne de première espèce, et par

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

les $(2p - 2)$ zéros de la fonction algébrique $w(z)$ qui sont situés à distance finie, zéros qui vérifient les p relations connues (page 22)

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k. \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

Le rapport

$$\frac{\varphi(z, z_0)}{w'(z)}$$

sera une fonction régulière sur la surface de Riemann R_{ab}, admettant les multiplicateurs m_k et n_k, et devenant infinie aux $(2p - 1)$ points

$$z_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}.$$

D'après ce que nous avons vu dans la première partie, cette fonction aura aussi $(2p - 1)$ zéros

$$\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2},$$

et son expression sera

$$\frac{\varphi(z\,,\,z_0)}{w'(z)} = Ce^{\tilde{\omega}_{z_0\beta_0}(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z)+\ldots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+w_2(z)\log m_2+\ldots+w_p(z)\log m_p]},$$

les infinis et les zéros étant liés par les p relations

$$w_k(\beta_0) - w_k(z_0) + \sum_{j=1}^{j=2p-2}[w_k(\beta_j) - w_k(\gamma_j)]$$

$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p.$$

Comme l'on a

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k,$$

ces relations peuvent s'écrire

$$\sum_{j=0}^{j=2p-2} w_k(\beta_j) \tag{19}$$

$$\equiv w_k(z_0) + G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p]$$

où

$$k = 1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,p.$$

On conclut de là que l'on peut choisir arbitrairement $(p - 1)$ zéros, $\beta_p\,,\,\beta_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,\beta_{2p-2}$ par exemple, et déterminer les p zéros restants β_0, $\beta_1\,,\,\ldots\,,\,\beta_{p-1}$ en fonction des premiers et de z_0.

Il est essentiel de montrer que la fonction

$$\frac{\varphi(z\,,\,z_0)}{w'(z)}$$

ainsi déterminée devient *effectivement infinie* au point donné z_0; pour cela il faut montrer que, les zéros $\beta_p\,,\,\beta_{p+1}\,,\,\ldots\,,\,\beta_{2p-2}$ étant choisis arbitrairement d'une manière convenable, aucun des p zéros restants $\beta_0\,,\beta_1\,,\ldots,\beta_{p-1}$ déterminés par les équations (19) *ne coïncide avec* z_0. Si l'un de ces zéros, β_0 par exemple, coïncidait avec z_0, les équations (19) deviendraient

$$(20)\qquad \sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j)$$

$$\equiv G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p] \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

et elles détermineraient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p$ en fonction de $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$; elles établiraient donc une relation entre β_p et $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$, ce qui est *impossible* puisque nous choisissons arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$. Il est donc absurde de supposer que β_0 coïncide avec z_0 quand on choisit arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{2p-2}$.

Il est cependant un cas spécial où les relations (20) ne détermineraient pas $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p-1}, \beta_p$ en fonction de $\beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$: c'est le cas où les seconds membres des relations (20) se réduiraient aux constantes G_k, à des multiples près des modules de périodicité des intégrales abéliennes $w_1(z), w_2(z), \ldots, w_p(z)$, c'est à dire où l'on aurait

$$(21)\qquad \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p] \equiv 0. \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

Les équations (20) présenteraient alors le cas d'indétermination déjà signalé (Briot, *Théorie des fonctions abéliennes,* page 96, n° 56), et elles permettraient de prendre arbitrairement $\beta_p, \beta_{p+1}, \ldots, \beta_{2p-2}$; il n'y aurait donc plus une absurdité à supposer que β_0 coïncide avec z_0. Mais, lorsque les multiplicateurs m_k et n_k satisfont aux relations (21), ils sont identiques aux multiplicateurs d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

comme nous l'avons vu dans la première partie (page 15). Donc, *en écartant ce cas spécial* qui sera examiné à part, on pourra former une fonction

$$\frac{\varphi(z, z_0)}{w'(z)} = Ce^{\tilde{\omega}_{z_0\beta_0}(z) + \tilde{\omega}_{\gamma_1\beta_1}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}\beta_{2p-2}}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1 + w_2(z)\log m_2 + \ldots + w_p(z)\log m_p]}$$

régulière sur R_{ab}, admettant les multiplicateurs donnés, devenant infinie du premier ordre au point z_0 et aux points $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{2p-2}$ qui sont les zéros de $w'(z)$ situés à distance finie. La fonction

$$\varphi(z, z_0) = Cw'(z)e^{\tilde{\omega}_{z_0}\beta_0(z)+\tilde{\omega}_{\gamma_1}\beta_1(z)+\dots+\tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2}}\beta_{2p-2}(z)+\frac{1}{\pi i}[w_1(z)\log m_1+\dots+w_p(z)\log m_p]}$$

a donc, comme seuls infinis, le point z_0 et les infinis de $w'(z)$; de plus elle devient à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. Déterminons le facteur constant C de telle façon que le résidu de $\varphi(z, z_0)$ relatif au point z_0 soit égal à l'unité, c'est à dire que la différence

$$\varphi(z, z_0) - \frac{1}{z - z_0}$$

reste finie pour $z = z_0$. Alors l'intégrale

$$\varpi(z, z_0) = \int \varphi(z, z_0)dz$$

sera une intégrale de troisième espèce devenant infinie au seul point z_0 de telle façon que la différence

$$\varpi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie pour $z = z_0$. Nous employons, pour désigner cette intégrale, la lettre ϖ que l'on emploie aussi pour les intégrales abéliennes de troisième espèce: mais il ne pourra pas y avoir de confusion, car l'intégrale abélienne de troisième espèce est désignée par $\varpi_{z_0 z_1}(z)$ et la nôtre par $\varpi(z, z_0)$.

Si nous appelons $\Pi(z, z_0)$ l'intégrale la plus générale d'une fonction aux multiplicateurs donnés, admettant un seul infini z_0 de telle façon que la différence

$$\Pi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie au point z_0, cette intégrale sera de la forme

$$\Pi(z, z_0) = \varpi(z, z_0) + \mu_1\omega_1(z) + \mu_2\omega_2(z) + \dots + \mu_{p-1}\omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

où $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{p-1}$ sont des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \dots, \omega_{p-1}(z)$ les intégrales de première espèce de fonctions aux multiplicateurs donnés. En effet la différence

$$\Pi(z, z_0) - \varpi(z, z_0)$$

est une intégrale *partout finie,* c'est à dire une intégrale de première espèce.

Cas spécial. Examinons maintenant le cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Alors une fonction régulière sur la surface de Riemann R_{ab} et admettant les multiplicateurs m_k et n_k est de la forme

$$E(z) R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction algébrique rationnelle en s et z. Comme le facteur $E(z)$ est partout fini et différent de zéro, les infinis du produit $E(z)R(s, z)$ sont ceux de $R(s, z)$. L'on sait que, si la fonction algébrique $R(s, z)$ est en chaque point à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$, la somme des résidus de cette fonction $R(s, z)$ sur toute la surface de Riemann est *nulle;* cette fonction admet donc *au moins deux* résidus différents de zéro, si tous ses résidus ne sont pas nuls. *Par conséquent, si le produit $E(z)R(s, z)$ n'a que des infinis d'ordre inférieur au second, il a au moins deux infinis du premier ordre, ou bien il n'en a aucun.* Si donc l'intégrale

$$\int E(z) R(s, z) dz$$

ne doit avoir que des infinis logarithmiques, elle en a au moins deux, ou bien elle n'en a aucun et est de première espèce.

Voici comment on obtiendra une intégrale de cette forme avec deux infinis logarithmiques. Soit, comme précédemment

$$\varpi_{z_0 z_1}(z)$$

l'intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme $\log \frac{z - z_1}{z - z_0}$ et

$$\varpi'_{z_0 z_1}(z)$$

la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale: cette fonction devient infinie aux points de ramification d'un ordre inférieur à l'unité, elle devient infinie du premier ordre aux points z_0 et z_1 avec les résidus -1 et $+1$. L'intégrale

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z) \varpi'_{z_0 z_1}(z) dz$$

sera l'intégrale de troisième espèce la plus simple formée avec une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k. Cette intégrale est finie partout, sauf aux deux points z_0 et z_1 où elle devient infinie de telle façon que la différence

$$\varpi(z, z_0, z_1) + E(z_0) \log(z - z_0) - E(z_1) \log(z - z_1)$$

reste finie.

L'intégrale la plus générale possédant cette propriété est

$$\varpi(z, z_0, z_1) + \mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \dots + \mu_p \omega_p(z) + \text{const.},$$

$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ désignant des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \dots, \omega_p(z)$ les intégrales de première espèce aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k, intégrales qui sont au nombre de p. (Page 26.)

Modules de périodicité des intégrales de troisième espèce.

Prenons d'abord le cas où les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$; soit, comme précédemment, $\varpi(z, z_0)$ l'intégrale de troisième espèce qui devient infinie au seul point z_0 de la surface de Riemann R_{ab} de telle façon que la différence

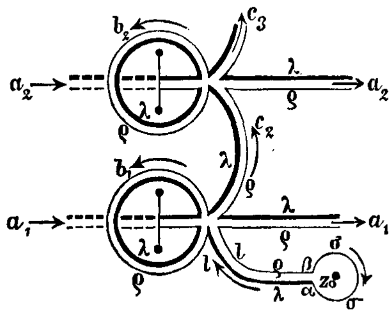
$$\varpi(z, z_0) - \log(z - z_0)$$

reste finie pour $z = z_0$. Si l'on suppose tracées les coupures

$$a_1, a_2, \dots, a_p; \; b_1, b_2, \dots, b_p; \; c_2, c_3, \dots, c_p,$$

de la même façon que plus haut (page 31), on voit que l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ n'est pas uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} ainsi obtenue; car, si le point z tourne autour de z_0, cette intégrale augmente de $2\pi i$.

En suivant la méthode exposée par C. Neumann (loc. cit. pages 220 et suivantes) nous ajouterons aux coupures a_k, b_k, c_h un lacet l entourant le point z_0 et nous supposerons, pour simplifier, que ce lacet l aboutisse au point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2, comme le montre la figure. Sur cette figure le bord gauche du lacet l est marqué d'un trait plus gros; λ désigne, comme précédemment, un point du bord gauche de ce lacet ou d'une coupure quelconque et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit; enfin α et β désignent les deux points où la circonférence σ de rayon infiniment petit entourant le point z_0 se raccorde avec les deux bords de l.



L'intégrale $\varpi(z, z_0)$ est alors uniforme sur la surface de Riemann ainsi découpée que nous désignerons par R_{abcl}. On voit, comme on l'a fait pour l'intégrale de première espèce (page 32), que l'on a:

$$\text{le long de la coupure } a_k: \quad \varpi(\lambda, z_0) - m_k\varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{A}_k, \quad (k=1,2,\dots,p)$$

$$\text{le long de la coupure } b_k: \quad \varpi(\lambda, z_0) - n_k\varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{B}_k, \quad (k=1,2,\dots,p)$$

$$\text{le long de la coupure } c_h: \quad \varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0) = \mathfrak{C}_h, \quad (h=2,3,\dots,p)$$

les lettres $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_h$ désignant des constantes que nous appellerons *modules de périodicité de l'intégrale* $\varpi(z, z_0)$ le long des coupures a_k, b_k. c_h.

Reste le lacet l. La différence

$$\varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0)$$

des valeurs que prend l'intégrale sur les deux bords de ce lacet l est aussi constante, car sa différentielle est nulle. Cette différence constante le long du lacet l est égale en particulier à

$$\varpi(\alpha, z_0) - \varpi(\beta, z_0)$$

(voyez la figure de la page précédente), c'est à dire à l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ prise dans le sens négatif sur la petite circonférence σ entourant le point z_0: elle est donc

$$-2\pi i,$$

car la dérivée de $\varpi(z, z_0)$ admet le point z_0 comme pôle de résidu $+1$.

Ainsi, l'on a, le long de la coupure l,

$$\varpi(\lambda, z_0) - \varpi(\rho, z_0) = -2\pi i.$$

En résumé, l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ admet $3p$ modules de périodicité, à savoir

$$\begin{array}{lll} \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_p & \text{sur les coupures} & a_1, a_2, \ldots, a_p, \\ \mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_p & \text{sur les coupures} & b_1, b_2, \ldots, b_p, \\ \mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_p & \text{sur les coupures} & c_2, \ldots, c_p, \\ -2\pi i & \text{sur la coupure} & l. \end{array}$$

Relations entre ces modules de périodicité.

En appliquant à l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ les raisonnements appliqués aux pages 33 et 34 à l'intégrale de première espèce $\omega(z)$, nous déduirons, de la considération de chacun des points de croisement des coupures, une relation entre les modules de périodicité et les multiplicateurs correspondants.

Le point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2 et l, (voyez la figure de la page précédente) donne ainsi la relation

$$\mathfrak{B}_1(1 - m_1) - \mathfrak{A}_1(1 - n_1) + 2m_1n_1\pi i + n_1\mathfrak{C}_2 = 0;$$

le point de croisement des coupures a_2, b_2, c_2, c_3 donne de même la relation

$$\mathfrak{B}_2(1 - m_2) - \mathfrak{A}_2(1 - n_2) - m_2n_2\mathfrak{C}_2 + n_2\mathfrak{C}_3 = 0;$$

et ainsi de suite.

On obtiendra en tout, comme aux pages 33 et 34, le système des p relations suivantes

$$\mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k) - m_kn_k\mathfrak{C}_k + n_k\mathfrak{C}_{k+1} = 0, \tag{22}$$

où l'on fait

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

en convenant que

$$\mathcal{C}_1 = -2\pi i, \qquad \mathcal{C}_{p+1} = 0.$$

L'élimination de $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \ldots, \mathcal{C}_p$ entre ces p relations fournira facilement l'équation

$$(23) \qquad 2\pi i + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathcal{B}_k(1-m_k) - \mathcal{A}_k(1-n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0,$$

qu'il est intéressant de rapprocher de l'équation analogue relative aux intégrales de première espèce (voyez page 34, équation 13).

Remarque. Il serait *absurde* de supposer ici les multiplicateurs m_k et n_k tous égaux à l'unité, car, dans cette hypothèse, l'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$ avec *un seul* infini logarithmique *n'existerait plus,* comme il est bien connu par la théorie des intégrales abéliennes.

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0)$ et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses.

Désignons, comme plus haut, par $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, et appelons

$$A'_k, \ B'_k, \ C'_h \qquad \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale relatifs aux coupures a_k, b_k, c_h.

L'intégrale

$$J = \int \Omega(z)\, d\varpi(z, z_0)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface de Riemann R_{abcl} (voyez page 49) est *nulle;* car, sur cette surface R_{abcl}, la fonction

$$\Omega(z)\frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$$

est régulière et a tous ses résidus nuls.

Si l'on appelle λ un point du bord gauche d'une coupure et ρ le point situé en face de λ sur le bord droit, les éléments de l'intégrale J correspondant à ces deux points seront:

$$\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0),$$

car les deux bords de la coupure sont parcourus en sens contraire par la variable d'intégration. Comme, outre les deux bords des coupures a_k, b_k, c_h et l, le contour de la surface R_{abcl} comprend encore la circonférence infiniment petite σ entourant le point z_0 et raccordant les deux bords de la coupure l, il faudra avoir soin de prendre l'intégrale J sur les deux bords de toutes les coupures et sur la circonférence σ. On a donc

$$J = \sum_{k=1}^{k=p}\Big[\int_{a_k}[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0)]$$

$$+\int_{b_k}[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0)]\Big]$$

$$+\sum_{h=2}^{h=p}\int_{c_h}[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0]$$

$$+\int_{l}[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0)] + \int_{\sigma}\Omega(z)d\varpi(z, z_0);$$

les indices dont sont affectés les signes d'intégration signifiant que les premières intégrales sont prises le long des coupures marquées par l'indice et la dernière le long de la petite circonférence σ dans le sens de la flèche. Cette dernière intégrale est facile à calculer. En effet, dans l'intérieur de cette circonférence σ la fonction soumise à l'intégration

$$\Omega(z)\frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$$

admet le pôle simple z_0 avec le résidu $\Omega(z_0)$, car le facteur $\frac{d\varpi(z, z_0)}{dz}$ admet ce pôle avec le résidu $+ 1$. On a donc, puisque la circonférence σ est parcourue dans le sens négatif autour de z_0,

$$\int_{\sigma}\Omega(z)d\varpi(z, z_0) = - 2\pi i\Omega(z_0).$$

Quant à l'intégrale affectée de l'indice l

$$\int_{l}[\Omega(\lambda)d\varpi(\lambda, z_0) - \Omega(\rho)d\varpi(\rho, z_0)],$$

elle est *nulle;* car le long de la coupure l on a

$$\Omega(\lambda) = \Omega(\rho), \qquad d\varpi(\lambda, z_0) = d\varpi(\rho, z_0).$$

Enfin, la somme des $(3p-1)$ premières intégrales relatives aux coupures a_k, b_k, c_h, qui figurent dans l'intégrale J de la page précédente, peut être déduite de la somme des intégrales analogues qui constituent l'intégrale I envisagée à la page 36, en remplaçant dans cette dernière somme $\omega(z)$ par $\varpi(z, z_0)$. On en conclut, en répétant la suite des transformations que l'on a fait subir à l'intégrale I aux pages 37 et suivantes, que l'intégrale J a pour valeur

$$J = -2\pi i \Omega(z_0)$$
$$+\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}_k + \mathfrak{C}_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}_k - n'_k C''_k(m'_k\mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k) + n'_k C''_{k+1}\mathfrak{B}_k].$$

Cette intégrale J étant nulle, on a la relation

$$(24)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}_k + \mathfrak{C}_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}_k - n'_k C''_k(m'_k\mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k) + n'_k C''_{k+1}\mathfrak{B}_k]$$
$$= 2\pi i \Omega(z_0),$$

dont le premier membre se déduit du premier membre de la relation 16 (page 40) en remplaçant dans cette relation les modules de périodicité A_k, B_k, C_h de l'intégrale de première espèce $\omega(z)$ par les modules de périodicité $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{C}_h$ de l'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$. Il faudra bien entendu faire

$$C''_1 = C''_{p+1} = \mathfrak{C}_{p+1} = 0.$$

Quant à la constante $\mathfrak{C}_1$ elle doit être considérée comme égale à $-2\pi i$ qui est le module de périodicité de $\varpi(z, z_0)$ sur la coupure l, comme nous l'avons déjà dit à la page 51.

Cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas, comme nous l'avons vu plus haut (page 48), l'intégrale la plus simple de troisième espèce d'une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k est donnée par la formule

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z)\varpi'_{z_0 z_1}(z)dz,$$

$\varpi_{z_0 z_1}(z)$ désignant l'intégrale abélienne de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme

$$\log \frac{z - z_1}{z - z_0}$$

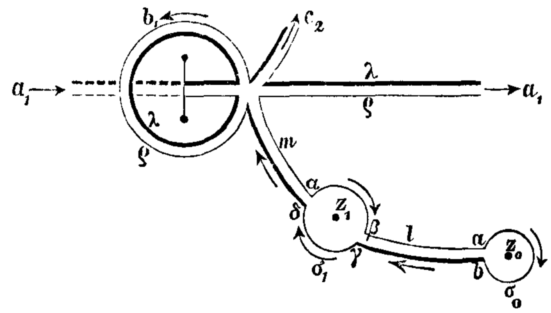
et $\varpi'_{z_0 z_1}(z)$ étant la dérivée de cette intégrale. L'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ est partout finie sauf aux points z_0, z_1 où elle devient infinie comme

$$E(z_1) \log (z - z_1) - E(z_0) \log (z - z_0).$$

Pour obtenir une surface sur laquelle l'intégrale

$$\varpi(z, z_0, z_1)$$

reste uniforme, nous suivrons encore la méthode exposée par C. NEUMANN (loc. cit. pages 220 et suivantes) et nous ajouterons aux coupures a_k, b_k, c_h



un lacet $l + m$ dont les deux bords sont infiniment rapprochés et qui renferme deux petites ouvertures circulaires σ_0 et σ_1 entourant les points z_0 et z_1. Nous supposerons de plus que ce lacet parte du point de croisement des coupures a_1, b_1, c_2, comme le montre la figure; nous désignerons, avec C. NEUMANN, par R_{abclm} la surface de Riemann ainsi délimitée.

L'intégrale de troisième espèce

$$\varpi(z, z_0, z_1) = \int E(z) \varpi'_{z_0 z_1}(z) dz$$

est régulière sur cette surface R_{abclm}: elle possède $(3p + 1)$ modules de périodicité à savoir:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_p & \text{le long des coupures} & a_1, a_1, \dots, a_p, \\ \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_p & \text{le long des coupures} & b_1, b_2, \dots, b_p, \\ \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_p & \text{le long des coupures} & c_2, \dots, c_p, \\ \mathcal{L}, \mathcal{M} & \text{le long des coupures} & l, m. \end{array}$$

Les constantes $\mathcal{L}$ et $\mathcal{M}$ sont faciles à calculer. En appelant a et b les deux points où la circonférence σ_0 entourant z_0 se raccorde avec les bords de la coupure l, on aura

$$\mathcal{L} = \varpi(b, z_0, z_1) - \varpi(a, z_0, z_1) = \int_a^b E(z)\varpi'_{z_0 z_1}(z)dz,$$

l'intégration étant faite sur la circonférence σ_0 dans le sens marqué par une flèche. Comme, à l'intérieur du cercle σ_0, la fonction intégrée possède le pôle $z = z_0$ avec le résidu $-E(z_0)$, l'intégrale qui est prise autour de ce pôle dans le sens négatif a pour valeur

$$\mathcal{L} = 2\pi i E(z_0).$$

Quant à la constante $\mathcal{M}$ elle est égale à la différence des valeurs de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ aux deux points δ et α où les deux bords de la coupure m se raccordent avec la circonférence σ_0. (Voyez la figure de la page précédente.)

$$\mathcal{M} = \varpi(\delta, z_0, z_1) - \varpi(\alpha, z_0, z_1).$$

D'autre part on a aussi, en considérant les deux points β et γ où les deux bords de la coupure l rencontrent cette circonférence σ_1,

$$\mathcal{L} = \varpi(\gamma, z_0, z_1) - \varpi(\beta, z_0, z_1);$$

d'où en retranchant

$$\mathcal{M} - \mathcal{L} = \varpi(\delta, z_0, z_1) - \varpi(\gamma, z_0, z_1) + \varpi(\beta, z_0, z_1) - \varpi(\alpha, z_0, z_1).$$

Or le second membre de cette relation n'est autre chose que l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ prise sur la circonférence σ_1 dans le sens de la flèche. Comme la fonction

$$E(z)\varpi'_{z_0 z_1}(z)$$

a, dans le cercle σ_1, le seul pôle z_1 avec le résidu $E(z_1)$, l'intégrale de cette fonction prise dans le sens négatif sur la circonférence σ_1 est

$$-2\pi i E(z_1).$$

On obtient donc la relation

$$\mathfrak{M} - \mathfrak{L} = -2\pi i E(z_1),$$

d'où, d'après la valeur trouvée auparavant pour $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{M} = 2\pi i[E(z_0) - E(z_1)].$$

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$.

La considération des p points de croisement des coupures donnera, comme pour l'intégrale de première espèce (page 34), les p relations

$$\mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k) - m_k n_k \mathfrak{C}_k + n_k \mathfrak{C}_{k+1} = 0$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

avec la convention que

$$\mathfrak{C}_1 = 2\pi i[E(z_0) - E(z_1)], \qquad \mathfrak{C}_{p+1} = 0.$$

L'élimination de $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_p$ entre ces p relations fournira l'équation

$$(25) \qquad 2\pi i[E(z_1) - E(z_0)] + \sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathfrak{B}_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}_k(1 - n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0$$

analogue à la relation (23) de la page 51.

Relation entre les modules de périodicité de l'intégrale $\varpi(z, z_0, z_1)$ *et ceux d'une intégrale de première espèce* $\Omega(z)$ *aux multiplicateurs inverses.*

En écrivant que l'intégrale

$$\int \Omega(z) d\varpi(z, z_0, z_1),$$

prise sur le contour de la surface de Riemann R_{abclm}, est *nulle*, et transformant cette intégrale comme on l'a fait pour une intégrale du même genre à propos des intégrales de première (pages 36 à 40) ou de troisième espèce (pages 51 à 53), on obtiendra la relation

$$(26) \quad \sum_{k=1}^{k=p} [A'_k(n'_k \mathfrak{B}_k + \mathfrak{C}_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}_k - n'_k C''_k(m'_k \mathfrak{A}_k + \mathfrak{B}_k) + n'_k C''_{k+1} \mathfrak{B}_k]$$
$$= 2\pi i [\Omega(z_1) E(z_1) - \Omega(z_0) E(z_0)].$$

Comme vérification, supposons que les multiplicateurs m_k et n_k deviennent tous égaux à l'unité, leurs inverses m'_k et n'_k deviendront aussi l'unité, l'exponentielle $E(z)$ se réduira également à l'unité, enfin $\Omega(z)$ et $\varpi(z, z_0, z_1)$ deviendront des *intégrales abéliennes* l'une de première l'autre de troisième espèce. Comme, dans cette hypothèse, les constantes $\mathfrak{C}_1$, $\mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3, \ldots, \mathfrak{C}_p$ et $C''_1, C''_2, \ldots, C''_p$ deviennent nulles, les constantes $\mathfrak{C}_{p+1}$ et C''_{p+1} étant nulles par convention, la relation (26) que nous venons de trouver se réduit à la relation bien connue

$$\sum_{k=1}^{k=p} (A'_k \mathfrak{B}_k - B'_k \mathfrak{A}_k) = 2\pi i [\Omega(z_1) - \Omega(z_0)]$$

qui lie les modules de périodicité $\mathfrak{A}_k, \mathfrak{B}_k$, d'une intégrale abélienne de troisième espèce, aux modules de périodicité A'_k et B'_k d'une intégrale abélienne de première espèce $\Omega(z)$.

Intégrales de seconde espèce.

Soit $\Phi(z)$ une fonction aux multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$, l'intégrale

$$\int \Phi(z) dz$$

sera de *deuxième espèce* si elle n'admet que des infinis *algébriques*. D'après cela, l'intégrale de *seconde espèce* la plus simple qu'on puisse imaginer est celle qui ne devient infinie qu'en un point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z - z_0}.$$

Une telle intégrale existe toujours, quelle que soit la position du point

z_0, *à condition que les multiplicateurs ne soient pas ceux d'une exponentielle de la forme*

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

non réduite à une constante.

Supposons d'abord que les multiplicateurs ne soient pas ceux d'une exponentielle telle que $E(z)$. Nous formerons alors, comme il suit, l'intégrale de *seconde espèce* avec un seul pôle du premier ordre de résidu $+1$.

Appelons, comme plus haut, $w(z)$ une intégrale abélienne de première espèce et $w'(z)$ la fonction algébrique qui est la dérivée de cette intégrale. Cette fonction algébrique $w'(z)$ devient nulle à distance finie en $(2p - 2)$ points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

liés par les p relations bien connues

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j) \equiv G_k. \qquad (k=1, 2, \ldots, p)$$

Formons une fonction $\psi(z)$ admettant les multiplicateurs m_k et n_k, devenant infinie du premier ordre aux points

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

et *infinie du second ordre* en un point z_0 donné arbitrairement. Cette fonction $\psi(z)$ ayant $2p$ infinis, puisque z_0 compte pour deux, aura aussi $2p$ zéros que nous nommerons

$$u, v, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}.$$

D'après ce que nous avons vu dans la première partie, cette fonction $\psi(z)$ sera

$$\psi(z) = Ce^{\tilde{\omega}_{z_0 u}(z) + \tilde{\omega}_{z_0 v}(z) + \tilde{\omega}_{\gamma_1 \beta_1}(z) + \ldots + \tilde{\omega}_{\gamma_{2p-2} \beta_{2p-2}}(z) + \frac{1}{\pi i}[w_1(z) \log m_1 + w_2(z) \log m_2 + \ldots + w_p(z) \log m_p]},$$

les zéros

$$u, v, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et les infinis

$$z_0, z_0, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$$

étant liés par les p relations

$$w_k(u) - w_k(z_0) + w_k(v) - w_k(z_0) + \sum_{j=1}^{j=2p-2} [w_k(\beta_j) - w_k(\gamma_j)]$$
$$= \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + b_{2k}\log m_2 + \ldots + b_{pk}\log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Comme la somme

$$\sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\gamma_j)$$

est égale à la constante G_k, les relations ci-dessus s'écrivent plus simplement

$$w_k(u) + w_k(v) + \sum_{j=1}^{j=2p-2} w_k(\beta_j)$$
$$\equiv 2w_k(z_0) + G_k + \frac{1}{2}\log n_k - \frac{1}{2\pi i}[b_{1k}\log m_1 + \ldots + b_{pk}\log m_p],$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p.$$

Ces relations montrent que, z_0 étant donné, on pourra choisir arbitrairement p zéros

$$u, v, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$$

et déterminer par ces relations les p zéros restants:

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p.$$

On pourra toujours choisir les zéros arbitraires

$$u, v, \beta_{p+1}, \beta_{p+2}, \ldots, \beta_{2p-2}$$

de telle façon qu'aucun des zéros restants

$$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p$$

ne coïncide avec le point z_0. Alors la fonction $\phi(z)$ deviendra effectivement infinie du second ordre au point z_0. Si l'on considère le produit

$$\phi(z)w'(z),$$

on voit qu'il ne devient plus infini en aucun des points $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{2p-2}$ qui sont les *zéros* de $w'(z)$; ce produit devient infini du second ordre au point z_0; il devient aussi infini aux infinis de $w'(z)$ et cela comme $w'(z)$; enfin ce produit est, en chaque point à l'infini, infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. On pourra disposer du facteur constant C qui figure dans l'expression de $\psi(z)$, de manière que le produit

$$(z - z_0)^2\psi(z)w'(z)$$

tende vers -1 quand z tend vers z_0. Alors, dans le voisinage de $z = z_0$, on aura pour $\psi(z)w'(z)$ un développement de la forme

$$\psi(z)w'(z) = -\frac{1}{(z-z_0)^2} + \frac{P_0}{z-z_0} + B_0 + C_0(z - z_0) + \ldots,$$

$P_0, B_0, C_0, \ldots$ étant des constantes dont la première est le résidu de $\psi(z)w'(z)$ au pôle z_0. D'après toutes ces propriétés du produit $\psi(z)w'(z)$, l'intégrale

$$\int\psi(z)w'(z)dz$$

reste partout finie excepté au point z_0 où elle devient infinie comme

$$\frac{1}{z-z_0} + P_0 \log(z - z_0).$$

Puisque, par hypothèse, les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$, il existe une intégrale de troisième espèce

$$\varpi(z, z_0)$$

dont la dérivée admet les multiplicateurs m_k et n_k et qui devient infinie au point z_0 comme

$$\log(z - z_0).$$

Donc la différence

$$t(z, z_0) = \int\psi(z)w'(z)dz - P_0\varpi(z, z_0)$$

deviendra infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z-z_0}.$$

Nous avons ainsi formé l'intégrale de seconde espèce

$$t(z, z_0)$$

partout finie excepté au pôle $z = z_0$ de résidu $+ 1$. Nous désignons cette intégrale par la lettre t que RIEMANN et NEUMANN emploient pour désigner l'intégrale abélienne de seconde espèce. Cela ne pourra pas amener de confusion car notre intégrale est appelée $t(z, z_0)$ et l'intégrale abélienne avec le pôle simple z_0 est appelée par NEUMANN $t_{z_0}(z)$.

Cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle $E(z)$.

Dans ce cas on pourra toujours former comme précédemment l'intégrale

$$\int \psi(z) w'(z) dz$$

qui devient infinie au seul point z_0 comme

$$\frac{1}{z - z_0} + P_0 \log(z - z_0);$$

mais alors il n'existe plus d'intégrale de troisième espèce $\varpi(z, z_0)$ devenant infinie en un seul point z_0 comme $\log(z - z_0)$. On ne peut donc plus former l'intégrale $t(z, z_0)$ comme dans le cas général qui précède. Dans le cas actuel cette intégrale n'existe plus: la constante P_0 ne peut être nulle que pour des positions particulières du point z_0. En effet, dans le cas présent, la fonction

$$\frac{\psi(z) w'(z)}{E(z)}$$

est une fonction *algébrique* devenant à l'infini infiniment petite de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$; et l'on sait que la somme de tous les résidus d'une pareille fonction algébrique est *nulle*. Or le seul pôle de cette fonction, ayant un résidu différent de zéro, est le point z_0: dans le voisinage de ce point on a

$$\psi(z) w'(z) = -\frac{1}{(z - z_0)^2} + \frac{P_0}{z - z_0} + B_0 + \dots,$$

$$\frac{1}{E(z)} = e^{2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \dots + \lambda_p w_p(z)]}$$

$$= \frac{1}{E(z_0)} + \frac{2(z - z_0)}{E(z_0)} [\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \dots + \lambda_p w_p'(z_0)] + \dots,$$

Si l'on forme le produit

$$\phi(z)w'(z)\cdot\frac{1}{E(z)}$$

et si l'on écrit que dans ce produit, le résidu, c'est à dire le coefficient de $\frac{1}{z-z_0}$, est nul, on a la relation

$$P_0 = 2[\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_0)] \tag{27}$$

qui montre que P_0 n'est nul que pour des *positions exceptionnelles* du point z_0.

Ainsi, dans le cas spécial dont nous nous occupons ici, il n'existe pas d'intégrale de deuxième espèce devenant infinie en un point arbitraire z_0 et cela comme $\frac{1}{z-z_0}$. Une telle intégrale ne peut exister que pour des positions *exceptionnelles* du point z_0 vérifiant l'équation

$$\lambda_1 w_1'(z_0) + \lambda_2 w_2'(z_0) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_0) = 0.$$

Mais, quel que soit z_0, il existe alors une intégrale

$$\tau(z, z_0) = \int \phi(z)w'(z)dz$$

devenant infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z-z_0} + P_0 \log(z-z_0),$$

P_0 ayant la valeur (27) ci-dessus. Cette intégrale $\tau(z, z_0)$ est, d'après notre classification, de troisième espèce; elle peut aussi être formée de la façon suivante. Si l'on appelle, avec NEUMANN,

$$t_{z_0}(z)$$

l'intégrale abélienne de seconde espèce admettant le seul pôle z_0 au premier degré et avec le résidu $+1$, on aura

$$\tau(z, z_0) = \frac{1}{E(z_0)}\int E(z)dt_{z_0}(z).$$

En effet la fonction sous le signe $\int$

$$E(z)\frac{dt_{z_0}(z)}{dz}$$

est une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k: dans le voisinage du point z_0 on a, en appelant $E'(z)$ la dérivée de $E(z)$,

$$E(z) = E(z_0) + (z - z_0)E'(z_0) + \dots,$$

$$\frac{dt_{z_0}(z)}{dz} = -\frac{1}{(z-z_0)^2} + \alpha_0 + \alpha_1(z - z_0) + \dots;$$

d'où, en multipliant membre à membre, puis divisant par $E(z_0)$,

$$\frac{E(z)}{E(z_0)}\frac{dt_{z_0}(z)}{dz} = -\frac{1}{(z-z_0)^2} - \frac{E'(z_0)}{E(z_0)}\frac{1}{(z-z_0)} + \dots.$$

L'intégrale

$$\frac{1}{E(z_0)}\int E(z)\,dt_{z_0}(z)$$

devient donc infinie au seul point z_0 et cela comme

$$\frac{1}{z-z_0} + P_0 \log(z - z_0),$$

car la constante appelée P_0 est précisément

$$-\frac{E'(z_0)}{E(z_0)}.$$

Cette intégrale est, par suite, égale à $\tau(z\,,\,z_0)$, ou n'en diffère que par une somme d'intégrales de première espèce.

Puisque, dans ce cas spécial où les multiplicateurs sont ceux de l'exponentielle $E(z)$, il n'existe pas d'intégrale de deuxième espèce avec un seul pôle du premier ordre, l'intégrale de deuxième espèce la plus simple aura au moins *deux pôles* du premier ordre z_0 et z_1. Pour la former, appelons $\tau(z\,,\,z_1)$ l'intégrale qui devient infinie au seul point z_1 comme

$$\frac{1}{z-z_1} + P_1 \log(z - z_1), \qquad P_1 = 2[\lambda_1 w_1'(z_1) + \lambda_2 w_2'(z_1) + \dots + \lambda_p w_p'(z_1)],$$

et considérons l'expression

$$t(z\,,\,z_0\,,\,z_1) = P_1 E(z_0)\tau(z\,,\,z_0) - P_0 E(z_1)\tau(z\,,\,z_1) + P_0 P_1 \varpi(z\,,\,z_0\,,\,z_1)$$

où $\varpi(z, z_0, z_1)$ est l'intégrale de troisième espèce devenant infinie aux points z_0 et z_1 comme

$$E(z_1)\log(z-z_1) - E(z_0)\log(z-z_0).$$

Cette intégrale $t(z, z_0, z_1)$ *n'a plus d'infinis logarithmiques:* en effet au point z_0 elle devient infinie comme

$$P_1 E(z_0)\left[\frac{1}{z-z_0} + P_0 \log(z-z_0)\right] - P_0 P_1 E(z_0)\log(z-z_0)$$

c'est à dire, en réduisant, comme

$$\frac{P_1 E(z_0)}{z-z_0};$$

de même au point z_1 elle devient infinie comme

$$-P_0 E(z_1)\left[\frac{1}{z-z_1} + P_1 \log(z-z_1)\right] + P_0 P_1 E(z_1)\log(z-z_1)$$

c'est à dire comme

$$-\frac{P_0 E(z_1)}{z-z_1}.$$

Remarque. Si l'on suppose que, dans l'exponentielle

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}$$

toutes les constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont nulles, cette exponentielle se réduit à l'unité et tous les multiplicateurs m_k et n_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$ deviennent aussi égaux à l'unité. Alors la constante P_0 est nulle quel que soit z_0 et l'intégrale $\tau(z, z_0)$ se réduit à l'intégrale abélienne de seconde espèce $t_{z_0}(z)$.

Modules de périodicité d'une intégrale de deuxième espèce.

Nous venons de voir que, dans le cas général où les multiplicateurs m_k et n_k ne sont pas ceux d'une exponentielle $E(z)$, il existe une intégrale de deuxième espèce

$$t(z, z_0)$$

partout finie excepté au point z_0 qui est un pôle simple de résidu $+ 1$. Cette intégrale est régulière sur la surface R_{abc} de RIEMANN: elle possède, comme une intégrale de première espèce, $(3p - 1)$ modules de périodicité à savoir:

$$\begin{aligned} &\text{le long de la coupure } a_k \text{ le module de périodicité } \mathfrak{A}'_k, \\ &\text{le long de la coupure } b_k \text{ le module de périodicité } \mathfrak{B}'_k, \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

$$\text{le long de la coupure } c_h \text{ le module de périodicité } \mathfrak{C}'_h. \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

Cela signifie que l'on a:

$$\begin{aligned} &\text{le long de } a_k\colon \quad t(\lambda, z_0) - m_k t(\rho, z_0) = \mathfrak{A}'_k, \\ &\text{le long de } b_k\colon \quad t(\lambda, z_0) - n_k t(\rho, z_0) = \mathfrak{B}'_k, \end{aligned} \qquad {\scriptstyle (k=1,2,\ldots,p)}$$

$$\text{le long de } c_h\colon \quad t(\lambda, z_0) - t(\rho, z_0) = \mathfrak{C}'_h. \qquad {\scriptstyle (h=2,3,\ldots,p)}$$

Relations entre ces modules.

La considération des points de croisement des coupures fournira entre ces modules de périodicité des relations identiques à celles qui ont été établies pour les modules de périodicité des intégrales de première espèce. (Pages 33 et 34.)

L'on obtient ainsi les p relations

$$(28) \qquad \mathfrak{B}'_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}'_k(1 - n_k) - m_k n_k \mathfrak{C}'_k + n_k \mathfrak{C}'_{k+1} = 0$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p$$

et où l'on convient de remplacer $\mathfrak{C}'_1$ et $\mathfrak{C}'_{p+1}$ par zéro.

De ces relations l'on déduit par l'élimination de $\mathfrak{C}'_2, \mathfrak{C}'_3, \ldots, \mathfrak{C}'_p$ l'équation

$$\sum_{k=1}^{k=p} \frac{\mathfrak{B}'_k(1 - m_k) - \mathfrak{A}'_k(1 - n_k)}{m_1 m_2 \ldots m_k} \cdot \frac{1}{n_k} = 0.$$

Relations entre les modules de périodicité de l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ et ceux d'une intégrale de première espèce aux multiplicateurs inverses.

Soit, comme plus haut, $\Omega(z)$, une intégrale de première espèce aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, admettant les modules de périodicité A'_k, B'_k, C'_k.

L'intégrale

$$I' = \int_{R_{abc}} \Omega(z)\, dt(z, z_0)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface de Riemann R_{abc} est égale à

$$-2\pi i \Omega'(z_0),$$

en désignant par $\Omega'(z)$ la dérivée de $\Omega(z)$ par rapport à z. En effet, sur la surface R_{abc} la fonction

$$\Omega(z)\frac{dt(z, z_0)}{dz}$$

est uniforme et régulière: elle admet le pôle z_0 et, dans le voisinage de ce point, on a

$$\Omega(z) = \Omega(z_0) + (z - z_0)\Omega'(z_0) + \dots,$$

$$\frac{dt(z, z_0)}{dz} = -\frac{1}{(z - z_0)^2} + a + b(z - z_0) + \dots;$$

donc, dans le produit $\Omega(z)\frac{dt(z, z_0)}{dz}$, le résidu relatif au pôle z_0 est

$$-\Omega'(z_0).$$

Ce produit a d'autres pôles aux points de ramification mais leurs résidus sont tous nuls; de plus il est à l'infini infiniment petit de l'ordre de $\frac{1}{z^2}$. Donc l'intégrale I' prise dans le sens positif sur le contour de la surface R_{abc} est égale à la valeur de cette même intégrale prise dans le même sens sur une petite circonférence entourant le point z_0, c'est à dire à

$$-2\pi i\Omega'(z_0),$$

comme nous l'avions annoncé.

D'autre part l'intégrale I' se transformera exactement comme l'intégrale I que nous avons traitée aux pages 36 et suivantes; et l'on trouvera que cette intégrale est égale à

$$\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}'_k + \mathfrak{C}'_{k+1}) - m'_k B'_k\mathfrak{A}'_k - n'_k C'_k(m'_k\mathfrak{A}'_k + \mathfrak{B}'_k) + n'_k C'_{k+1}\mathfrak{B}'_k].$$

On a donc la relation

$$(29)\quad \sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}'_k + \mathfrak{C}'_{k+1}) - m'_k B'_k\mathfrak{A}'_k - n'_k C'_k(m'_k\mathfrak{A}'_k + \mathfrak{B}'_k) + n'_k C'_{k+1}\mathfrak{B}'_k] = -2\pi i\Omega'(z_0)$$

avec la convention

$$C'_1 = C'_{p+1} = \mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}'_{p+1} = 0.$$

Cas spécial où les multiplicateurs m_k et n_k sont ceux d'une exponentielle $E(z)$.

Dans ce cas l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ avec un seul pôle simple z_0 n'existe plus. Il faut la remplacer par l'intégrale appelée $t(z, z_0, z_1)$ définie par l'équation (page 63)

$$t(z, z_0, z_1) = P_1 E(z_0)\tau(z, z_0) - P_0 E(z_1)\tau(z, z_1) + P_0 P_1\varpi(z, z_0, z_1),$$

ou encore, d'après les expressions des intégrales

$$\tau(z, z_0),\ \tau(z, z_1),\ \varpi(z, z_0, z_1),$$

$$t(z, z_0, z_1) = P_1\int E(z)dt_{z_0}(z) - P_0\int E(z)dt_{z_1}(z) + P_0P_1\int E(z)d\varpi_{z_0z_1}(z).$$

Les constantes P_0 et P_1 ont les valeurs

$$P_0 = 2[\lambda_1 w'_1(z_0) + \lambda_2 w'_2(z_0) + \ldots + \lambda_p w'_p(z_0)],$$

$$P_1 = 2[\lambda_1 w'_1(z_1) + \lambda_2 w'_2(z_1) + \ldots + \lambda_p w'_p(z_1)].$$

Cette intégrale de seconde espèce est, comme toute intégrale de seconde espèce, uniforme et régulière sur la surface R_{abc} de Riemann; elle admet les deux pôles simples z_0 et z_1 avec les résidus respectifs

$$P_1 E(z_0)\,, \quad -P_0 E(z_1).$$

Appelons encore $\mathfrak{A}'_k\,, \mathfrak{B}'_k\,, \mathfrak{C}'_h$ les modules de périodicité de cette intégrale $t(z\,, z_0\,, z_1)$ le long des coupures $a_k\,, b_k\,, c_h$ $\binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$. Ces modules sont liés entre eux par les p relations

$$\mathfrak{B}'_k(1-m_k) - \mathfrak{A}'_k(1-n_k) - m_k n_k \mathfrak{C}'_k + n_k \mathfrak{C}'_{k+1} = 0$$

où

$$k = 1\,, 2\,, \ldots, p,$$

et

$$\mathfrak{C}'_1 = \mathfrak{C}'_{p+1} = 0.$$

Enfin, ces modules de périodicité $\mathfrak{A}'_k\,, \mathfrak{B}'_k\,, \mathfrak{C}'_h$ sont liés aux modules de périodicité $A'_k\,, B'_k\,, C'_h$ d'une intégrale de première espèce $\Omega(z)$, aux multiplicateurs inverses, par la relation

$$\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k\mathfrak{B}'_k + \mathfrak{C}'_{k+1}) - m'_k B'_k \mathfrak{A}'_k - n'_k C'_k(m'_k\mathfrak{A}'_k + \mathfrak{B}'_k) + n'_k C'_{k+1}\mathfrak{B}'_k]$$
$$= 2\pi i[P_0 E(z_1)\,\Omega'(z_1) - P_1 E(z_0)\,\Omega'(z_0)],$$

que l'on obtient par la considération de l'intégrale

$$\int_{R_{abc}} \Omega(z)\,dt(z\,, z_0\,, z_1)$$

prise dans le sens positif sur le contour de la surface R_{abc} de Riemann.

Formule de décomposition d'une fonction à multiplicateurs en éléments simples.

De même que, par la formule de Riemann-Roch (Journal de Crelle, t. 84, pag. 294, et C. Neumann loc. cit. page 258), toute fonction rationnelle de s et z, c'est à dire toute fonction régulière sur la surface R de Riemann, peut s'écrire sous la forme d'une somme d'intégrales abéliennes de seconde espèce, de façon que les pôles et les parties principales correspondantes se trouvent en évidence; de même toute fonction à multiplicateurs peut s'écrire sous la forme d'une somme d'intégrales de fonctions à multiplicateurs de première et seconde espèce, de façon à mettre en évidence les pôles et les parties principales correspondantes. Cette formule que nous allons établir remplace avantageusement la formule donnée par M. APPELL (Journal de mathématiques pures et appliquées, publié par M. RESAL, t. 9 (1883), page 11). La formule de M. APPELL présente cet inconvénient que l'élément simple devient infini en $(p-1)$ points étrangers à la question, tandis que notre élément ne devient infini qu'en un point.

Soit $\Phi(z)$ une fonction admettant les multiplicateurs m_k et n_k $(k=1, 2, \ldots, p)$ *non spéciaux* c'est à dire ne pouvant pas être identifiés avec ceux d'une exponentielle $E(z)$; cette fonction est régulière sur la surface R_{ab} de Riemann et admet sur cette surface un certain nombre q de pôles

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

que nous supposons d'abord *simples* et *distincts des points de ramification:* soient

$$R_1, R_2, \ldots, R_q$$

les résidus relatifs à ces pôles. Considérons la différence

$$\Delta = \Phi(z) - R_1 t(z, z_1) - R_2 t(z, z_2) - \ldots - R_q t(z, z_q),$$

où $t(z, z_\nu)$ désigne, comme plus haut, l'intégrale de seconde espèce, d'une fonction aux multiplicateurs donnés, qui devient infinie au seul point z_ν et cela comme $\frac{1}{z-z_\nu}$. Cette différence Δ est uniforme sur la surface R_{abc} de Riemann, car chacun de ses termes l'est; elle demeure sur cette surface partout finie, car dans le voisinage du point $z=z_1$ par exemple on a par hypothèse

$$\Phi(z) = \frac{R_1}{z-z_1} + \alpha_0 + \alpha_1(z-z_1) + \ldots$$

et

$$R_1 t(z, z_1) = \frac{R_1}{z-z_1} + \beta_0 + \beta_1(z-z_1) + \ldots,$$

ce qui montre que la différence Δ reste finie pour $z = z_1$; enfin la dérivée de Δ par rapport à z est régulière sur R_{ab} et admet les multiplicateurs m_k et n_k, puisqu'il en est ainsi de la dérivée de chacun des termes de Δ. Cette différence Δ est donc l'intégrale d'une fonction à multiplicateurs et, comme elle est *partout finie*, c'est une intégrale de *première espèce:* elle peut, par conséquent, se mettre sous la forme

$$\mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_{p-1} \omega_{p-1}(z) + C^{te},$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{p-1}$ étant des constantes, $\omega_1(z), \omega_2(z), \ldots, \omega_{p-1}(z)$ les $(p-1)$ intégrales de première espèce linéairement indépendantes. En égalant Δ à cette dernière expression, on obtient la formule cherchée

$$(30) \qquad \begin{aligned} \Phi(z) = {} & R_1 t(z, z_1) + R_2 t(z, z_2) + \ldots + R_q t(z, z_q) \\ & + \mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_{p-1} \omega_{p-1}(z) + C^{te}, \end{aligned}$$

entièrement analogue à la formule de Riemann-Roch. (Voyez C. Neumann, loc. cit. page 258.)

Pour établir cette formule, nous avons supposé les pôles $z_1, z_2, \ldots, z_q$ du premier ordre: si l'un de ces pôles, par exemple z_1, était d'ordre n, il faudrait remplacer l'élément

$$R_1 t(z, z_1)$$

par une expression de la forme

$$R_1(z, z_1) + R_1' \frac{\partial t(z, z_1)}{\partial z_1} + R_1'' \frac{\partial^2 t(z, z_1)}{\partial z_1^2} + \ldots + R_1^{(n-1)} \frac{\partial^{n-1} t(z, z_1)}{\partial z_1^{n-1}},$$

comme il arrive dans toutes les formules de ce genre. Nous avons aussi supposé les points $z_1, z_2, \ldots, z_q$ distincts des points de ramification. Il serait trop long d'indiquer les modifications bien simples que devrait subir la formule, si certains des pôles $z_1, z_2, \ldots, z_q$ coïncidaient avec des points de ramification; ces modifications sont identiques à celles qui se présentent dans des conditions analogues pour les fonctions algébriques et les intégrales abéliennes de seconde espèce. (Voyez une Note de M. Goursat *Sur la théorie des intégrales abéliennes*, Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, t. 97, page 1281.)

On peut, comme vérification, déduire de cette formule de décomposition, les $(p-1)$ relations qui lient les résidus $R_1, R_2, \ldots, R_q$ et les pôles correspondants $z_1, z_2, \ldots, z_q$, relations que nous avons établies directement (page 28). Pour cela, désignons par

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}'_{1r}, \mathfrak{A}'_{2r}, \ldots\ldots, \mathfrak{A}'_{pr}, \\ \mathfrak{B}'_{1r}, \mathfrak{B}'_{2r}, \ldots\ldots, \mathfrak{B}'_{pr}, \\ \qquad \mathfrak{C}'_{2r}, \mathfrak{C}'_{3r}, \ldots, \mathfrak{C}'_{pr}, \end{array}$$

les modules de périodicité de l'intégrale $t(z, z_r)$,

$$r = 1, 2, \ldots, q;$$

et par

$$\begin{array}{l} A_{1j}, A_{2j}, \ldots\ldots, A_{pj}, \\ B_{1j}, B_{2j}, \ldots\ldots, B_{pj}, \\ \qquad C_{2j}, C_{3j}, \ldots, C_{pj}, \end{array}$$

les modules de périodicité de l'intégrale de première espèce $\omega_j(z)$,

$$j = 1, 2, \ldots, (p-1).$$

Comme les modules de périodicité de la fonction $\Phi(z)$ sont *nuls*, puisque $\Phi(z)$ est une fonction à multiplicateurs, la formule de décomposition établie précédemment (page 70) donnera immédiatement les $(3p-1)$ relations

$$(31)\begin{cases} R_1\mathfrak{A}'_{k1} + R_2\mathfrak{A}'_{k2} + \ldots + R_q\mathfrak{A}'_{kq} + \mu_1 A_{k1} + \mu_2 A_{k2} + \ldots + \mu_{p-1}A_{k,p-1} = 0, \\ R_1\mathfrak{B}'_{k1} + R_2\mathfrak{B}'_{k2} + \ldots + R_q\mathfrak{B}'_{kq} + \mu_1 B_{k1} + \mu_2 B_{k2} + \ldots + \mu_{p-1}B_{k,p-1} = 0, \\ R_1\mathfrak{C}'_{h1} + R_2\mathfrak{C}'_{h2} + \ldots + R_q\mathfrak{C}'_{hq} + \mu_1 C_{h1} + \mu_2 C_{h2} + \ldots + \mu_{p-1}C_{h,p-1} = 0, \end{cases}$$

où

$$k = 1, 2, \ldots, p, \qquad h = 2, 3, \ldots, p.$$

Soit, comme dans tout le cours de ce travail, $\Omega(z)$ une intégrale de première espèce d'une fonction aux multiplicateurs m'_k et n'_k inverses de m_k et n_k, et soient

$$A'_k, B'_k, C'_h \qquad \binom{k=1,2,\ldots,p}{h=2,3,\ldots,p}$$

les modules de périodicité de cette intégrale. La relation qui lie les modules de périodicité des deux intégrales de première espèce

$$\omega_j(z)\ ,\ \Omega(z)$$

aux multiplicateurs inverses est, comme nous l'avons vu (page 40)

$$\sum_{k=1}^{k=p}[A'_k(n'_k B_{kj} + C_{k+1,j}) - m'_k B'_k A_{kj} - n'_k C'_k(m'_k A_{kj} + B_{kj}) + n'_k C'_{k+1} B_{kj}] = 0,$$

ou, en ordonnant cette relation par rapport à $A_{kj}, B_{kj}, C_{k+1,j}$ et changeant les signes

$$(32)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}[A_{kj}(m'_k B'_k + m'_k n'_k C'_k) + B_{kj}(n'_k C'_k - n'_k A'_k - n'_k C'_{k+1}) - C_{k+1,j} A'_k] = 0,$$

où

$$C_{1,j} = C_{p+1,j} = C'_1 = C'_{p+1} = 0.$$

En faisant successivement

$$j = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ (p-1)$$

on obtiendra $(p-1)$ relations de cette forme. De même la relation qui lie les modules de pérodicité de l'intégrale de deuxième espèce $t(z\ ,\ z_r)$ et de l'intégrale de première espèce $\Omega(z)$ aux multiplicateurs inverses (page 67) peut s'écrire, si on l'ordonne par rapport aux modules de périodicité de $t(z\ ,\ z_r)$ et si on change les signes

$$(33)\qquad \sum_{k=1}^{k=p}[\mathcal{A}'_{kr}(m'_k B'_k + m'_k n'_k C'_k) + \mathcal{B}'_{kr}(n'_k C'_k - n'_k A'_k - n'_k C'_{k+1}) - \mathcal{C}'_{k+1,r} A'_k] = 2\pi i \Omega'(z_r)$$

où

$$\mathcal{C}'_{1,r} = \mathcal{C}'_{p+1,r} = C'_1 = C'_{p+1} = 0.$$

En faisant successivement

$$r = 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ ,\ q,$$

on obtiendra q relations de cette forme. Cela posé, multiplions cette dernière relation (33) par R_r et la relation précédente (32) par μ_j et faisons la somme des $q + p - 1$ relations ainsi obtenues

$$(r = 1, 2, \ldots, q; j = 1, 2, \ldots, p - 1).$$

Dans cette somme, le premier membre est nul, en vertu des relations qui expriment que les modules de périodicité de $\Phi(z)$ sont nuls (eq. 31, page 71), et il reste

$$R_1 \Omega'(z_1) + R_2 \Omega'(z_2) + \ldots + R_q \Omega'(z_q) = 0,$$

ce qui est la relation établie directement (page 28) entre les pôles et les résidus d'une fonction à multiplicateurs. Cette relation, comme nous l'avons vu, se décompose en $(p - 1)$ relations distinctes.

Cas spécial où les multiplicateurs sont ceux d'une exponentielle de la forme

$$E(z) = e^{-2[\lambda_1 w_1(z) + \lambda_2 w_2(z) + \ldots + \lambda_p w_p(z)]}.$$

Dans ce cas, la formule de décomposition que nous avons établie ci-dessus n'est plus applicable, car l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0)$ avec un seul infini simple n'existe plus. On pourrait alors établir une autre formule de décomposition en éléments simples, en prenant pour élément l'intégrale de seconde espèce $t(z, z_0, z_1)$ avec deux infinis simples qui devient infinie en ces deux points comme

$$\frac{P_1 E(z_0)}{z - z_0} - \frac{P_0 E(z_1)}{z - z_1}.$$ [1]

On aurait ainsi la formule

$$\Phi(z) = \sum_{r=1}^{r=q-1} \frac{R_r}{P_q E(z_r)} t(z, z_r, z_q) + \mu_1 \omega_1(z) + \mu_2 \omega_2(z) + \ldots + \mu_p \omega_p(z) + C^{te},$$

P_q désignant la constante $2[\lambda_1 w_1'(z_q) + \lambda_2 w_2'(z_q) + \ldots + \lambda_p w_p'(z_q)]$, $\omega_1(z)$, $\omega_2(z), \ldots, \omega_p(z)$ les intégrales de première espèce qui sont actuellement au nombre de p.

---

[1] Voir page 63.

Mais il est bien plus simple de remarquer qu'une fonction aux multiplicateurs spéciaux m_k et n_k est de la forme

$$\Phi(z) = E(z)R(s, z),$$

$R(s, z)$ désignant une fonction rationnelle de s et z, et d'appliquer ensuite à cette fonction rationnelle $R(s, z)$ la formule de Riemann-Roch, comme le fait M. Appell. (Journal de mathématiques, publié par M. Resal, année 1883, page 13, N° 7.)

Expression la plus générale d'une intégrale de fonctions à multiplicateurs.

On démontre sans peine, comme on le fait pour les intégrales abéliennes, que toute intégrale de fonction à multiplicateurs est une somme d'intégrales de première espèce, d'intégrales de troisième espèce, d'intégrales de seconde espèce et de dérivées de ces dernières par rapport au paramètre. C'est ce qui résulte de ce fait, qu'en retranchant, d'une intégrale de fonction à multiplicateurs, des intégrales convenables de troisième espèce et de seconde espèce et des dérivées de ces dernières par rapport au paramètre, on amènera la différence à rester *partout finie.*