

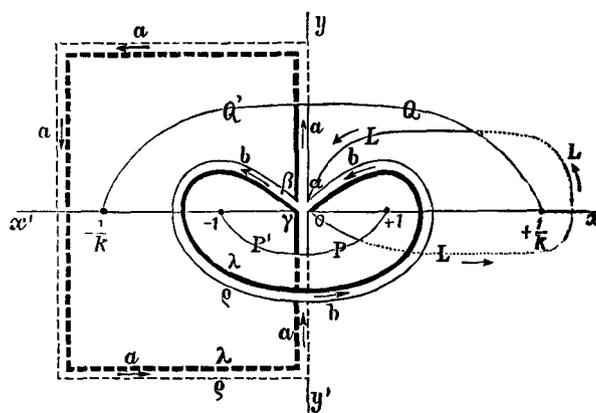
### Troisième partie.

#### Développements des fonctions abéliennes en séries trigonométriques.

Pour montrer, par un exemple simple, comment les intégrales de fonctions à multiplicateurs s'introduisent dans le problème du développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques, nous traiterons d'abord un exemple relatif aux fonctions elliptiques qui fera bien saisir l'esprit de la méthode.

Considérons le relation algébrique

$$s^2 = (1 - z^2)(1 - k^2 z^2)$$



où nous supposons  $k$  réel et plus petit que l'unité. La surface de Riemann correspondante possède deux feuilletts et quatre points de ramification  $+1, -1, +\frac{1}{k}, -\frac{1}{k}$  situés sur l'axe des quantités réelles  $Ox$ . On passe

d'un des feuillets à l'autre en traversant l'une ou l'autre des lignes de passage (*Übergangslinien*)

$$+ 1, P, P', - 1; \quad + \frac{1}{k}, Q, Q', - \frac{1}{k}.$$

On transformera cette surface de Riemann en une surface  $R_{ab}$  simplement connexe à l'aide des coupures  $a$  et  $b$ , comme le montre la figure. Le point de croisement des deux coupures est à l'origine  $O$  qui appartient au bord droit de la coupure  $a$  et au bord gauche de la coupure  $b$ . Enfin nous supposerons que, dans le feuillet supérieur, la valeur de  $s$  est positive pour  $z = 0$ .

L'intégrale elliptique de première espèce

$$w(z) = \int_0^z \frac{dz}{s} = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

est uniforme sur la surface de Riemann  $R_{ab}$  figurée à la page précédente.

Le long de la coupure  $a$ , on a

$$w(\lambda) - w(\rho) = 4K$$

et le long de la coupure  $b$

$$w(\lambda) - w(\rho) = 2iK',$$

$K$  et  $K'$  ayant la signification que leur donne JACOBI et les lettres  $\lambda, \rho$  désignant comme toujours deux points situés en face l'un de l'autre sur les deux bords d'une coupure,  $\lambda$  sur le bord gauche et  $\rho$  sur le bord droit. En effet, si l'on désigne par  $\alpha, \beta, \gamma$  les sommets des quatre angles formés par les bords des coupures  $a$  et  $b$  en leur point de croisement, la valeur constante de la différence  $w(\lambda) - w(\rho)$  le long de la coupure  $a$  est égale en particulier à  $w(\gamma) - w(\alpha)$ , c'est à dire à l'intégrale  $w(z)$  prise le long du bord gauche de la coupure  $b$  depuis le point  $\alpha$  jusqu'au point  $\gamma$ , ce qui donne bien  $4K$ ; de même la valeur constante de  $w(\lambda) - w(\rho)$  le long de la coupure  $b$  est égale en particulier à

$$w(\alpha) - w(\beta) = - [w(\beta) - w(\alpha)]$$

et la quantité entre crochets est l'intégrale prise de  $O$  en  $\alpha$  sur le contour  $L$  qui contourne les deux points  $+1$  et  $+\frac{1}{k}$  dans le sens positif, intégrale égale à  $-2iK'$ .

En vue de ce qui suit, calculons les valeurs de l'intégrale  $w(z)$  aux points à l'infini dans les deux feuillets que nous désignerons par  $j_0$  et  $j_1$ , le point  $j_0$  étant à l'infini dans le feuillet supérieur et  $j_1$  dans le feuillet inférieur. Pour cela remarquons que le long de l'axe  $Ox$  des quantités réelles on a, pour  $s$ , la suite des valeurs suivantes:

feuillet supérieur:

entre 0 et  $+1$ ,  $s > 0$ ,

entre 1 et  $+\frac{1}{k}$ ,  $\frac{s}{i} < 0$ ,

entre  $\frac{1}{k}$  et  $+\infty$ ,  $s > 0$ ;

feuillet inférieur:

entre 0 et  $+1$ ,  $s < 0$ ,

entre 1 et  $+\frac{1}{k}$ ,  $\frac{s}{i} > 0$ ,

entre  $\frac{1}{k}$  et  $+\infty$ ,  $s < 0$ .

Les raisonnements qui conduisent à ces signes sont bien connus: ils sont détaillés plus loin à l'occasion d'une question analogue, à la page 88.

D'après cela l'on a pour l'intégrale  $w(z)$  les valeurs suivantes aux points  $+1$  et  $+\frac{1}{k}$ :

$$w(1) = K, \quad w\left(\frac{1}{k}\right) = K - iK',$$

car, pour aller le long de l'axe des  $x$  de l'origine au point  $\frac{1}{k}$ , il faut à partir du point  $+1$  suivre l'axe dans le feuillet inférieur de façon à passer sous la coupure  $b$ . Si maintenant à partir du point  $+\frac{1}{k}$  on

s'éloigne à l'infini le long de l'axe  $Ox$ , on aura si l'on s'éloigne dans le feuillet supérieur

$$w(j_0) = w\left(\frac{1}{k}\right) + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{s},$$

$s$  étant pris *positivement*, et si on s'éloigne dans le feuillet inférieur

$$w(j_1) = w\left(\frac{1}{k}\right) + \int_{\frac{1}{k}}^{\infty} \frac{dz}{s},$$

$s$  étant *négalif*. Or on a

$$\int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}} = K;$$

les formules précédentes donneront donc

$$w(j_0) = 2K - iK', \quad w(j_1) = -iK'.$$

Ces préliminaires étant posés, faisons

$$u = w(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

d'où par l'inversion

$$z = \operatorname{sn} u,$$

la fonction  $\operatorname{sn} u$  admettant les deux périodes  $4K$  et  $2iK'$ . Lorsque  $u$  varie par valeurs réelles de 0 à  $4K$ , la variable  $z$  décrit sur la surface  $R_{ab}$  de Riemann un chemin  $C$  composé de la portion 0, +1 de l'axe des quantités réelles  $Ox$  dans le feuillet supérieur, de la portion +1, -1 de ce même axe dans le feuillet inférieur, enfin de la portion -1, 0 de ce même axe dans le feuillet supérieur. La fonction périodique  $\operatorname{sn} u$  est donc pour ces valeurs de  $u$  développable en une série de Fourier de la forme

$$z = \operatorname{sn} u = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} p_{\nu} e^{\frac{\nu\pi u i}{2K}}$$

avec

$$p_\nu = \frac{1}{4K} \int_0^{4K} z e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} u} du,$$

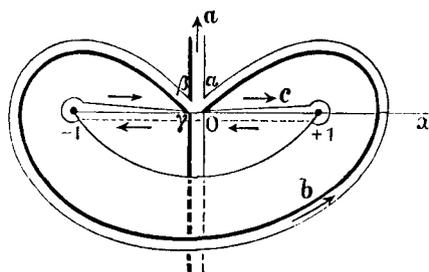
l'intégration étant faite par un chemin réel ou un chemin infiniment voisin. Pour évaluer cette intégrale définie, faisons-y le changement de variable

$$u = w(z), \quad du = \frac{dz}{s};$$

nous aurons

$$(34) \quad p_\nu = \frac{1}{4K} \int_C \frac{z dz}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(z)},$$

l'indice  $C$  rappelant que la variable  $z$  doit parcourir, sur la surface de Riemann  $R_{ab}$ , le chemin appelé  $C$  et défini à la page précédente, ou un chemin infiniment voisin comme celui que nous figurons ici et qui va, du point  $O$  au point  $\gamma$ , après avoir contourné les deux points  $+1$ ,  $-1$  en s'écartant infiniment peu de l'axe  $Ox$ .



Dans l'intégrale (34) qui donne  $p_\nu$ , la fonction sous le signe d'intégration

$$\Phi(z) = \frac{z}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(z)}$$

est une *fonction à multiplicateurs*, régulière sur la surface de Riemann  $R_{ab}$ . Comme l'intégrale  $w(z)$  admet le long des coupures  $a$  et  $b$  les modules de périodicité  $4K$  et  $2iK$ , la fonction  $\Phi(z)$  admet le long de ces mêmes coupures les multiplicateurs

$$m_1 = 1, \quad n_1 = q^{-\nu},$$

c'est à dire que cette fonction vérifie les relations:

$$\text{le long de la coupure } a, \quad \Phi(\lambda) = \Phi(\rho),$$

$$\text{le long de la coupure } b, \quad \Phi(\lambda) = q^{-\nu} \Phi(\rho),$$

en faisant, comme il est d'usage,

$$q = e^{-\pi \frac{K'}{K}}.$$

Cette fonction à multiplicateurs  $\Phi(z)$  rentre dans le cas spécial examiné à la page 14, car ses multiplicateurs sont ceux de l'exponentielle

$$e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(z)}.$$

L'intégrale

$$\bar{\omega}(z) = \int_0^z \frac{z dz}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(z)} = \int_0^z \Phi(z) dz$$

est donc une intégrale de fonction à multiplicateurs. C'est une intégrale de troisième espèce admettant pour points critiques logarithmiques les deux points  $j_0$  et  $j_1$  situés à l'infini dans les deux feuillets. En effet, dans le voisinage du point  $j_0$ , c'est à dire pour des valeurs de  $z$  appartenant au feuillet supérieur et dont le module surpasse un nombre suffisamment grand, on a

$$\frac{z}{s} = \frac{1}{kz} + \frac{a_1}{z^2} + \frac{a_2}{z^3} + \dots,$$

$$e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(z)} = e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(j_0)} + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \dots$$

Comme

$$w(j_0) = 2K - iK',$$

ainsi que nous l'avons montré, on a, en multipliant les développements ci-dessus,

$$\Phi(z) = \frac{z}{s} e^{-\frac{\nu\pi i}{2K} w(z)} = \frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\delta_1}{z^2} + \frac{\delta_2}{z^3} + \dots$$

Donc l'intégrale

$$\bar{\omega}(z) = \int_0^z \Phi(z) dz$$

devient au point  $j_0$  infinie comme

$$\frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{k} \log z.$$

On verra de même que, dans le voisinage du point  $j_1$ , on a

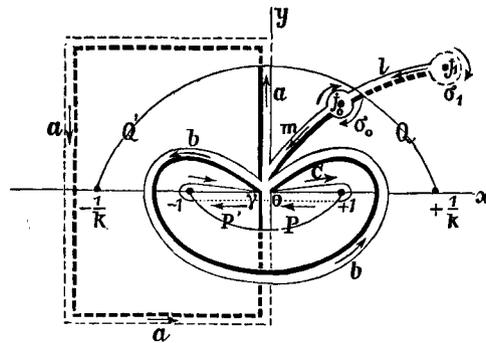
$$\Phi(z) = -\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\varepsilon_1}{z^2} + \frac{\varepsilon_2}{z^3} + \dots,$$

et que l'intégrale  $\bar{\omega}(z)$  devient au point  $j_1$  infinie comme

$$-\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{k} \log z.$$

Nous pourrions appliquer à cette intégrale  $\bar{\omega}(z)$  ce que nous avons dit aux pages 53 et suivantes: il suffira de supposer les points critiques logarithmiques  $z_0$  et  $z_1$  placés à l'infini aux points  $j_0$  et  $j_1$ .

L'intégrale  $\bar{\omega}(z)$  n'est pas uniforme sur la surface de Riemann  $R_{ab}$ :



elle est uniforme sur la surface  $R_{ablm}$  que l'on obtient en entourant les deux points  $j_0$  et  $j_1$  d'un lacet  $l + m$ , commençant et finissant au point de croisement des coupures  $a$  et  $b$ . Ce lacet est représenté dans la figure *schématique* ci-dessus où les points à l'infini  $j_0$  et  $j_1$  sont repré-

sentés comme s'ils étaient à distance finie, l'un  $j_0$  dans le feuillet supérieur, l'autre  $j_1$  dans le feuillet inférieur. Appelons

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{L}, \mathfrak{N}$$

les modules de périodicité de l'intégrale

$$\bar{w}(z) = \int_0^z \frac{z dz}{s} e^{-\frac{\nu \pi i}{2K} w(z)},$$

c'est à dire, supposons que l'on ait

$$\text{le long de la coupure } a: \bar{w}(\lambda) - \bar{w}(\rho) = \mathfrak{A},$$

$$\text{le long de la coupure } b: \bar{w}(\lambda) - q^{-\nu} \bar{w}(\rho) = \mathfrak{B},$$

$$\text{le long de la coupure } l: \bar{w}(\lambda) - \bar{w}(\rho) = \mathfrak{L},$$

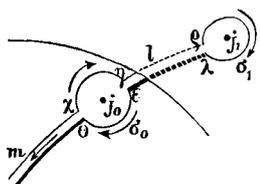
$$\text{le long de la coupure } m: \bar{w}(\lambda) - \bar{w}(\rho) = \mathfrak{N},$$

car les multiplicateurs sont 1 et  $q^{-\nu}$ . La formule qui donne  $p_\nu$  (page 79) est

$$p_\nu = \frac{1}{4K} \int_C \frac{z dz}{s} e^{-\frac{\nu \pi i}{2K} w(z)},$$

l'intégrale étant prise le long du contour  $C$  qui va du point  $O$  au point  $\gamma$  après avoir entouré les deux points  $+1$  et  $-1$  en s'écartant infiniment peu de l'axe  $Ox$ ; on a donc

$$(35) \quad p_\nu = \frac{1}{4K} [\bar{w}(\gamma) - \bar{w}(o)] = \frac{\mathfrak{A}}{4K}.$$



Ainsi le calcul de  $p_\nu$  se ramène au calcul du module de périodicité  $\mathfrak{A}$ . Or ce module est facile à calculer par les relations générales que nous avons établies et que nous allons reprendre pour le cas particulier actuel. Figurons les coupures  $l$  et  $m$  raccordées par deux circonférences infiniment petites  $\sigma_0$  et  $\sigma_1$  entourant les points  $j_0$  et  $j_1$ . On a, pour le module de périodicité le long de  $l$ :

$$\mathfrak{L} = \bar{w}(\lambda) - \bar{w}(\rho).$$

Ce module  $\mathcal{L}$  est donc l'intégrale  $\bar{\omega}(z)$  prise sur la circonférence  $\sigma_1$  dans le sens de la flèche: or, dans le voisinage du point  $j_1$ , on a (page 81)

$$\Phi(z) = -\frac{q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\epsilon_1}{z^2} + \frac{\epsilon_2}{z^3} + \dots,$$

donc l'intégrale

$$\bar{\omega}(z) = \int \Phi(z) dz$$

prise sur la petite circonférence  $\sigma_1$  dans le sens de la flèche est

$$-\frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

On trouve ainsi

$$\mathcal{L} = -\frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

La figure donne aussi

$$\mathfrak{N} = \bar{\omega}(\theta) - \bar{\omega}(\chi), \quad \mathcal{L} = \bar{\omega}(\varepsilon) - \bar{\omega}(\eta),$$

d'où en retranchant

$$\mathfrak{N} - \mathcal{L} = \bar{\omega}(\theta) - \bar{\omega}(\varepsilon) + [\bar{\omega}(\eta) - \bar{\omega}(\chi)],$$

ce qui montre que  $\mathfrak{N} - \mathcal{L}$  est l'intégrale  $\bar{\omega}(z)$  prise dans le sens de la flèche sur la circonférence  $\sigma_0$  entourant le point  $j_0$ . Comme, dans le voisinage de  $j_0$ , on a (page 80)

$$\Phi(z) = \frac{(-1)^\nu q^{\frac{\nu}{2}}}{kz} + \frac{\delta_1}{z^2} + \frac{\delta_2}{z^3} + \dots,$$

l'intégrale

$$\bar{\omega}(z) = \int \Phi(z) dz$$

prise sur la circonférence  $\sigma_0$  dans le sens de la flèche est

$$\mathfrak{N} - \mathcal{L} = (-1)^\nu \frac{2\pi i}{k} q^{\frac{\nu}{2}}.$$

On aura donc, d'après la valeur que nous venons de trouver pour  $\mathcal{L}$ :

$$\mathfrak{N} = \frac{2\pi i}{k} [(-1)^\nu - 1] q^{\frac{\nu}{2}}.$$

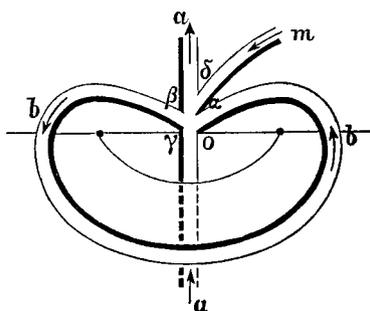
Il va de soi que, comme les points  $j_0$  et  $j_1$  sont à l'infini, la petite circonférence  $\sigma_1$  entourant le point  $j_1$  est en réalité une circonférence très grande de centre  $O$  située dans le feuillet inférieur et parcourue de  $\rho$  jusqu'en  $\lambda$  dans le sens positif autour de  $O$ ; il en est de même pour  $\sigma_0$ .

Le point de croisement des coupures  $a, b, m$  donne la relation

$$\mathfrak{B}(1 - m_1) - \mathfrak{A}(1 - n_1) - m_1 n_1 \mathfrak{N} = 0$$

où

$$m_1 = 1, \quad n_1 = q^{-\nu}.$$



C'est ce qui résulte de la relation générale de la page 56; en voici d'ailleurs la démonstration. On a, d'après la définition même des modules de périodicité, les relations suivantes

$$\bar{w}(\gamma) = \bar{w}(0) + \mathfrak{A},$$

$$\bar{w}(\gamma) = q^{-\nu} \bar{w}(\beta) + \mathfrak{B},$$

$$\bar{w}(\beta) = \bar{w}(\delta) + \mathfrak{A},$$

$$\bar{w}(\alpha) = \bar{w}(\delta) + \mathfrak{N},$$

$$\bar{w}(0) = q^{-\nu} \bar{w}(\alpha) + \mathfrak{B}.$$

Multipliant ces relations respectivement par  $+1, -1, -q^{-\nu}, q^{-\nu}, +1$  et ajoutant, on a la relation cherchée

$$\mathfrak{A}(1 - q^{-\nu}) + \mathfrak{N}q^{-\nu} = 0,$$

d'où

$$\mathfrak{A} = -\frac{q^{-\nu}}{1 - q^{-\nu}} \mathfrak{N},$$

c'est à dire, d'après la valeur trouvée pour  $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{A} = \frac{2\pi i}{k} \frac{q^{-\frac{\nu}{2}}}{1 - q^{-\nu}} [1 - (-1)^\nu].$$

Enfin comme le coefficient  $p_\nu$  est égal à

$$\frac{\mathfrak{A}}{4K},$$

on a

$$p_\nu = \frac{\pi i}{2Kk} \cdot \frac{1 - (-1)^\nu}{q^{\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}}.$$

Ce coefficient est nul quand  $\nu$  est pair, et quand  $\nu$  est impair,

$$\nu = 2n + 1,$$

il a pour valeur

$$p_\nu = \frac{\pi i}{Kk} \frac{1}{q^{+\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}}.$$

On a donc pour le développement cherché

$$z = \operatorname{sn} u = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} p_\nu e^{\frac{\nu\pi u}{2K}} = \frac{\pi i}{Kk} \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} \frac{e^{\frac{\nu\pi u}{2K}}}{q^{+\frac{\nu}{2}} - q^{-\frac{\nu}{2}}},$$

$\nu$  ne prenant que des valeurs impaires  $2n + 1$ . En réunissant les termes qui correspondent à des valeurs de  $\nu$  égales et de signes contraires, on obtient enfin

$$z = \frac{2\pi\sqrt{q}}{Kk} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{q^n}{1 - q^{2n+1}} \sin \frac{(2n + 1)\pi u}{2K},$$

ce qui est le développement bien connu que JACOBI a donné pour  $\sin am u$ . Il nous paraît remarquable que l'on puisse ainsi obtenir ce développement sans se servir des fonctions  $\theta$  ni de la théorie des fonctions elliptiques.

La méthode que nous venons de suivre donnerait, de même, les développements en séries trigonométriques de toute fonction de  $u$  exprimée par une fonction rationnelle  $R(s, z)$  de  $s$  et  $z$ , c'est à dire de toute

fonction elliptique. Le calcul des coefficients se ramènera au calcul des modules de périodicité des intégrales de fonctions à multiplicateurs de la forme spéciale

$$\int R(s, z) dz \cdot e^{-\frac{\nu\pi i}{2K}w(z)}.$$

Ces modules se calculeront par les méthodes générales que nous avons données dans la deuxième partie.

Plus généralement on pourrait, en suivant la même voie, calculer les coefficients du développement en série trigonométrique d'une fonction doublement périodique de *seconde espèce* admettant la période  $4K$  et se reproduisant, multipliée par un facteur constant arbitraire, quand la variable  $u$  augmente de  $2iK'$ .

Mais nous laissons de côté ce cas particulier, où  $p = 1$ , qui ne pourrait nous donner que des développements plus faciles à obtenir par d'autres méthodes, et nous entrons dans un ordre de recherches entièrement nouveau, en abordant les problèmes analogues pour les *intégrales ultraelliptiques* ( $p = 2$ ) et les fonctions abéliennes de deux variables qui naissent de leur inversion.

### *Intégrales ultraelliptiques et fonctions abéliennes de genre 2.*

Employons les notations de ROSENHAIN dans son *Mémoire couronné* (Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des sciences de Paris, Tome 11, 1851, page 361), et considérons l'équation algébrique

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2z)(1 - \lambda^2z)(1 - \mu^2z)$$

ou en abrégéant

$$s^2 = (zk\lambda\mu).$$

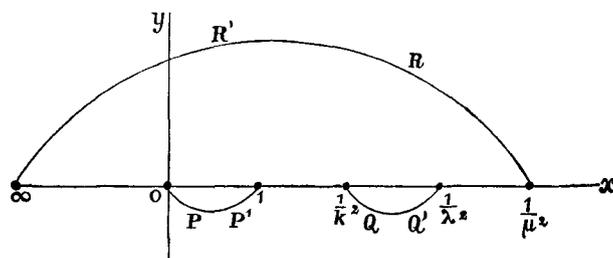
La surface de Riemann correspondante possède deux feuillettes et six points de ramification

$$0, 1, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}, \infty.$$

Figurons ces points en supposant les quantités  $k, \lambda, \mu$  réelles positives et

$$1 > k > \lambda > \mu;$$

de plus figurons le point à l'infini comme s'il était à distance finie sur la partie négative de l'axe des quantités réelles. Il y aura trois lignes



de passage d'un feuillet à l'autre (*Übergangslinien* d'après C. NEUMANN), à savoir les lignes

$$0PP'1, \frac{1}{k^2}QQ' \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}RR'\infty.$$

Nous conviendrons de prendre la *valeur positive* de

$$s = \sqrt{(zk\lambda\mu)}$$

en tous les points du *feuillet supérieur situés sur l'axe des quantités réelles Ox entre 0 et 1*. Alors les valeurs de  $s$  aux différents points de l'axe  $Ox$  des quantités réelles sont de la forme suivante:

Feuillet supérieur. $z$ réel.	}	$0 < z < 1 \quad \dots s > 0,$
		$1 < z < \frac{1}{k^2} \quad \dots \frac{s}{i} < 0,$
		$\frac{1}{k^2} < z < \frac{1}{\lambda^2} \quad \dots s < 0,$
		$\frac{1}{\lambda^2} < z < \frac{1}{\mu^2} \quad \dots \frac{s}{i} > 0,$
		$\frac{1}{\mu^2} < z < +\infty \quad \dots s < 0,$
		$-\infty < z < 0 \quad \dots \frac{s}{i} > 0.$

$$\text{Feuillet inférieur. } \left. \begin{array}{l} z \text{ réel.} \\ 0 < z < 1 \quad \dots s < 0, \\ 1 < z < \frac{1}{k^2} \quad \dots \frac{s}{i} > 0, \\ \frac{1}{k^2} < z < \frac{1}{\lambda^2} \quad \dots s > 0, \\ \frac{1}{\lambda^2} < z < \frac{1}{\mu^2} \quad \dots \frac{s}{i} < 0, \\ \frac{1}{\mu^2} < z < +\infty \quad \dots s > 0, \\ -\infty < z < 0 \quad \dots \frac{s}{i} < 0. \end{array} \right\}$$

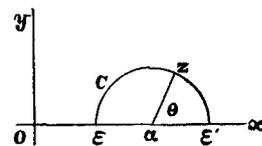
Les valeurs de ce tableau résultent de la proposition élémentaire suivante. Soit un point  $\alpha$  sur  $Ox$  et  $\sigma$  une détermination du radical  $\sqrt{z-a}$  en un point  $\varepsilon$  infiniment voisin de  $\alpha$  situé à gauche de  $\alpha$ ; si la variable  $z$  décrit autour de  $\alpha$  comme centre, avec  $\alpha\varepsilon$  comme rayon, un demi-cercle situé au dessus de  $Ox$ ,  $\varepsilon C\varepsilon'$ , la valeur  $\sigma'$  du radical  $\sqrt{z-a}$  au point  $\varepsilon'$  sera

$$\sigma' = -i\sigma.$$

En effet sur le cercle on a

$$z - \alpha = re^{\theta i},$$

$$\sqrt{z-a} = \sqrt{r}e^{\frac{\theta i}{2}}.$$



Supposons qu'au point  $\varepsilon$  on prenne  $\theta = \pi$ , alors

$$\sigma = \sqrt{r}e^{\frac{\pi i}{2}} = i\sqrt{r};$$

quand  $z$  décrit le demi-cercle  $\varepsilon C\varepsilon'$ ,  $\theta$  décroît de  $\pi$  à 0, et le radical  $\sqrt{z-a}$  prend en  $\varepsilon'$  la valeur

$$\sigma' = \sqrt{r}.$$

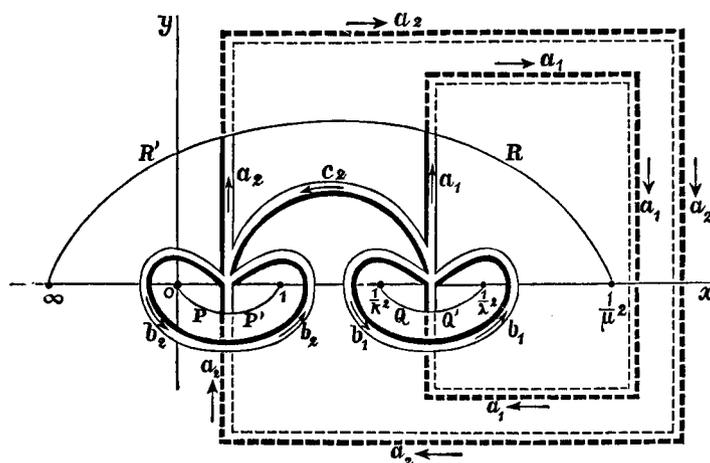
On a donc, comme nous l'avons annoncé,

$$\sigma' = -i\sigma.$$

Si, au lieu de décrire de  $\varepsilon$  en  $\varepsilon'$  un demi-cercle *au dessus* de  $Ox$ , la variable  $z$  décrivait un demi-cercle *au dessous* de  $Ox$ , la valeur de  $\sqrt{z-a}$  au point  $\varepsilon'$  serait  $+i\sigma$ .

Il suffira d'appliquer ce résultat successivement à chacun des points de ramification  $0, 1, \frac{1}{k^2}, \frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}$  pour avoir les valeurs de  $s$  en tous les points de  $Ox$ , telles qu'elles sont indiquées dans le tableau des pages précédentes.

*Surface de Riemann  $R_{abc}$ .* Pour rendre la surface de Riemann considérée simplement connexe, il faudra tracer deux coupures  $a_1$  et  $a_2$ , deux coupures  $b_1$  et  $b_2$ , enfin une coupure  $c_2$ . Figurons ces coupures avec la disposition que nous sommes convenus d'adopter (page 31).



La coupure  $b_1$  entoure les points  $\frac{1}{k^2}, \frac{1}{\lambda^2}$  et se trouve sur le feuillet supérieur; la coupure  $b_2$  entoure les points  $0, 1$  et se trouve sur le feuillet supérieur. Les coupures  $a_1$  et  $a_2$  sont en partie sur un feuillet, en partie sur l'autre: les portions de ces coupures situées sur le feuillet inférieur sont *ponctuées*. Enfin la coupure  $c_2$  va du point de croisement des coupures  $a_1, b_1$  à celui des coupures  $a_2, b_2$ .

Appelons  $V(z)$  et  $W(z)$  les intégrales abéliennes normales de première espèce correspondant à la relation algébrique

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2z)(1 - \lambda^2z)(1 - \mu^2z).$$

Ces intégrales sont, en adoptant les notations de ROSENHAIN (Mémoire couronné loc. cit. pages 432—435)

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \quad W(z) = - \int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

$B, C, B', C'$  désignant des constantes définies par les équations

$$(36) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{i\pi}{2} = B \int_0^1 \frac{dz}{s} - C \int_0^1 \frac{zdz}{s}, & 0 = B' \int_0^1 \frac{dz}{s} - C' \int_0^1 \frac{zdz}{s}, \\ 0 = B \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}, & \frac{i\pi}{2} = B' \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C' \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}, \end{array} \right.$$

où les intégrations sont faites le long de l'axe des quantités réelles et où  $s$  est pris positivement.

Ces relations montrent que  $B$  et  $C$  sont des quantités *purement imaginaires positives*, c'est à dire des quantités de la forme

$$iP,$$

$P$  étant réel positif. En effet la troisième de ces relations écrite sous la forme

$$0 = \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B - Cz}{s} dz$$

montre que  $(B - Cz)$  s'annule pour une valeur réelle de  $z$  comprise entre  $\frac{1}{k^2}$  et  $\frac{1}{\lambda^2}$ : donc le rapport  $\frac{B}{C}$  est réel et supérieur à 1. La première relation (36) montre alors immédiatement que  $B$  et  $C$  sont de la forme  $iP$ , la quantité  $P$  étant réelle positive.

De même l'équation

$$0 = \int_0^1 \frac{B' - C'z}{s} dz$$

montre que le rapport  $\frac{B'}{C'}$  est réel positif et moindre que 1, et alors l'équation

$$\frac{i\pi}{2} = B' \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{dz}{s} - C' \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{zdz}{s}$$

montre que  $B'$  et  $C'$  sont *purement imaginaires négatifs* c'est à dire de la forme

$$-iP,$$

$P$  étant réel et positif.

Les valeurs de ces quatre constantes  $B, C, B', C'$  sont d'ailleurs données par ROSENHAIN (loc. cit. page 433).

On a de plus les quatre équations

$$(37) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{2} \log p = \int_{-\infty}^0 \frac{B - Cz}{s} dz, & A = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz, \\ A = \int_{-\infty}^0 \frac{B' - C'z}{s} dz, & \frac{1}{2} \log q = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz \end{array} \right.$$

avec  $\frac{s}{i} < 0$ . (ROSENHAIN, Mémoire couronné, loc. cit. page 435.) Ces intégrations sont encore faites le long de l'axe  $Ox$  des quantités réelles,  $s$  est alors purement imaginaire et son signe est fixé comme il suit.

Dans la première intégrale qui est égale à  $\frac{1}{2} \log p$ , la quantité  $(B - Cz)$  est purement imaginaire positive d'après ce qui précède; comme la valeur de l'intégrale est *négative*, puisque  $p$  est réel positif et moindre que l'unité, il faut prendre pour  $s$  une valeur imaginaire telle que  $\frac{s}{i}$  soit négatif. Dans la dernière intégrale qui est égale à  $\frac{1}{2} \log q$ , la quantité  $B' - C'z$  est purement imaginaire positive; comme la valeur de l'intégrale est négative puisque  $q$  est réel positif et moindre que l'unité, il faut aussi prendre dans cette intégrale  $\frac{s}{i}$  négatif. Enfin, dans les deux intégrales qui donnent  $A$ , les numérateurs

$$B - Cz, B' - C'z$$

restent purement imaginaires négatifs; nous prendrons, dans l'une et l'autre, le signe de  $s$  de façon que  $\frac{s}{2}$  soit *négatif*; alors  $A$  sera positif.

En résumé *dans les quatre intégrales (37) de la page précédente*, nous prenons  $\frac{s}{2}$  *négatif*.

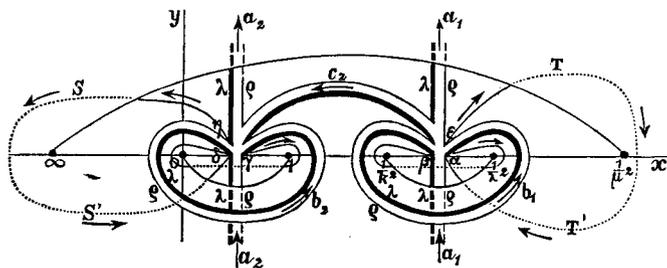
### *Modules de périodicité des intégrales normales.*

Les deux intégrales

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \quad W(z) = - \int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz$$

sont uniformes sur la surface de Riemann  $R_{abc}$  figurée à la page 89. Leurs modules de périodicité le long de la coupure  $c_2$  sont nuls, d'après une propriété générale des intégrales abéliennes. (Voyez C. NEUMANN, loc. cit. p. 216.) Calculons les modules de périodicité de ces intégrales le long des coupures  $a_1, a_2, b_1, b_2$ .

Prenons d'abord l'intégrale  $V(z)$ . Le module de périodicité de  $V(z)$  le long de la coupure  $a_1$  est la différence  $V(\lambda) - V(\rho)$  constante tout



le long de  $a_1$ ; ce module est donc en particulier  $V(\beta) - V(\alpha)$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  étant les points où l'axe  $Ox$  rencontre les bords de la coupure  $a_1$ . Or cette différence

$$V(\beta) - V(\alpha)$$

est l'intégrale

$$\int \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise du point  $\alpha$  jusqu'au point  $\beta$  sur un contour entourant les deux points  $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{k^2}$ , comme celui que nous avons figuré; et cette intégrale est égale à

$$2 \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise le long de l'axe  $Ox$  sur le feuillet supérieur. Mais cette dernière intégrale est *nulle*, en vertu des équations (36) de la page 90. Donc le module de périodicité de  $V(z)$  le long de  $a_1$  est *nul*.

Le long de  $a_2$  le module de périodicité de  $V(z)$  est de même  $V(\delta) - V(\gamma)$ ,  $\gamma$  et  $\delta$  étant les points où l'axe  $Ox$  rencontre les bords de la coupure  $a_2$ . Il est donc égal à l'intégrale

$$2 \int_0^1 \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise le long de l'axe  $Ox$  dans le feuillet supérieur ( $s > 0$ ), c'est à dire à  $\pi i$ .

Pour l'intégrale

$$W(z) = - \int_0^z \frac{(B' - C'z) dz}{s}$$

le module de périodicité le long de  $a_1$  est  $W(\beta) - W(\alpha)$  c'est à dire l'intégrale

$$- \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

prise le long de l'axe  $Ox$  dans le feuillet supérieur ( $s < 0$ ) (d'après le tableau de la page 87); ce module est donc  $\pi i$ , car l'intégrale

$$\int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

où  $s$  est *positif* est égale à  $\frac{\pi i}{2}$ . Enfin le module de périodicité de  $W(z)$  le long de  $a_2$  est *nul*.

Passons maintenant aux coupures  $b_1$  et  $b_2$ . Le long de  $b_1$  le module de périodicité de  $V(z)$  est égal à

$$V(\alpha) - V(\varepsilon)$$

c'est à dire à l'intégrale

$$\int \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise depuis le point  $\varepsilon$  jusqu'au point  $\alpha$  sur le contour  $\varepsilon TT'\alpha$  qui entoure les deux points de ramification  $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{\mu^2}$ .

Cette intégrale se réduit à son tour à

$$2 \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz,$$

l'intégration étant faite le long de l'axe  $Ox$  des quantités réelles sur le feuillet supérieur, c'est à dire  $\frac{s}{i}$  étant pris *positivement* (tableau de la page 87). Or on a

$$A = \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz$$

avec  $\frac{s}{i}$  *néгатif*: donc le module de périodicité de  $V(z)$  le long de  $b_1$  est  $-2A$ .

Le module de périodicité de  $W(z)$  le long de la coupure  $b_1$  est égal à l'intégrale

$$- \int_{\varepsilon}^{\alpha} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

prise sur le même contour  $\varepsilon TT'\alpha$ , c'est à dire à

$$- 2 \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

l'intégration étant faite le long de l'axe des quantités réelles dans le feuillet supérieur ( $\frac{s}{i} > 0$ ). Comme on a (page 91)

$$\int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz = \frac{1}{2} \log q, \quad \left(\frac{s}{i} < 0\right),$$

le module cherché est  $\log q$ .

Il nous reste à calculer les modules de périodicité de  $V(z)$  et  $W(z)$  le long de la coupure  $b_2$ . Le module de périodicité de  $V(z)$  est égal à la différence  $V(\delta) - V(\eta)$ , c'est à dire à l'intégrale

$$\int_{\eta}^{\delta} \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise sur le contour  $\eta SS'\delta$  qui entoure les deux points de ramification 0 et  $-\infty$ . Cette intégrale se réduit, comme il est bien connu, à

$$2 \int_0^{-\infty} \frac{B - Cz}{s} dz$$

prise dans le feuillet supérieur le long de l'axe des quantités réelles ( $\frac{s}{i} > 0$ ). Or on a (page 91)

$$\int_{-\infty}^0 \frac{B - Cz}{s} dz = \frac{1}{2} \log p, \quad \left(\frac{s}{i} < 0\right),$$

le module de périodicité cherché est donc  $\log p$ .

De même le module de périodicité de  $W(z)$  le long de  $b_2$  est

$$-2 \int_0^{-\infty} \frac{B' - C'z}{s} dz, \quad \left(\frac{s}{i} > 0\right),$$

c'est à dire (page 91)  $-2A$ .

En résumé les modules de périodicité des intégrales  $V(z)$  et  $W(z)$  sont donnés par le tableau suivant

	Sur la coupure $a_1$	Sur la coupure $a_2$	Sur la coupure $b_1$	Sur la coupure $b_2$
$V(z)$	0	$\pi i$	$-2A$	$\log p$
$W(z)$	$\pi i$	0	$\log q$	$-2A$

Il importe, en vue de ce qui suit, de calculer les valeurs des intégrales

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \quad W(z) = - \int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz$$

aux points de ramification  $\infty$  et  $\frac{1}{k^2}$ .

Calculons d'abord  $V(\infty)$  et  $W(\infty)$ . Pour aller du point 0 à l'infini sans traverser une coupure, il suffit de suivre l'axe des quantités réelles *négligées* dans le feuillet *inférieur* ( $\frac{s}{i} < 0$ ). On aura donc

$$V(\infty) = \int_0^{-\infty} \frac{B - Cz}{s} dz, \quad W(\infty) = - \int_0^{-\infty} \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

l'intégration étant faite le long de l'axe des quantités réelles et  $\frac{s}{i}$  étant pris *négligement*. On a donc, d'après les formules (37) de la page 91

$$V(\infty) = -\frac{1}{2} \log p, \quad W(\infty) = A.$$

Nous avons de même  $V\left(\frac{1}{k^2}\right)$  et  $W\left(\frac{1}{k^2}\right)$  en allant du point  $O$  au point  $\frac{1}{k^2}$  le long de l'axe des quantités réelles  $Ox$  dans le feuillet inférieur, de façon à passer sous les coupures. Donc

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = \int_0^1 \frac{B - Cz}{s} dz + \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s} dz,$$

$$W\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\int_0^1 \frac{B' - C'z}{s} dz - \int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

les intégrations étant faites sur l'axe  $Ox$  et  $s$  étant pris *négativement* entre 0 et 1,  $\frac{s}{i}$  *positivement* entre 1 et  $\frac{1}{k^2}$ . Dans ces conditions on a

$$\int_0^1 \frac{B - Cz}{s} dz = -\frac{\pi i}{2}, \quad \int_0^1 \frac{B' - C'z}{s} dz = 0.$$

Puis, d'après des formules dues à JACOBI et reproduites par ROSENHAIN (Mémoire couronné, loc. cit. page 381, formules 29), on a

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{B - Cz}{s} dz + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B - Cz}{s} dz,$$

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz = \int_{-\infty}^0 \frac{B' - C'z}{s} dz + \int_{\frac{1}{\lambda^2}}^{\frac{1}{\mu^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz$$

ou on prendra partout  $\frac{s}{i} > 0$ . Donc, en vertu des équations (37) de la page 91 dans lesquels  $\frac{s}{i}$  est *négatif*, on aura actuellement:

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B - Cz}{s} dz = -\frac{1}{2} \log p - A,$$

$$\int_1^{\frac{1}{k^2}} \frac{B' - C'z}{s} dz = -A - \frac{1}{2} \log q.$$

Par conséquent

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2} \log p - A, \quad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2} \log q.$$

Cela posé les équations différentielles de JACOBI sont les suivantes (d'après ROSENHAIN, loc. cit. page 432)

$$dv = dV(z_1) + dV(z_2),$$

$$dw = dW(z_1) + dW(z_2)$$

ou

$$dv = \frac{B - Cz_1}{s_1} dz_1 + \frac{B - Cz_2}{s_2} dz_2,$$

$$dw = -\frac{B' - C'z_1}{s_1} dz_1 - \frac{B' - C'z_2}{s_2} dz_2,$$

en faisant, pour abréger,

$$s_1 = \sqrt{(z_1 k \lambda \mu)}, \quad s_2 = \sqrt{(z_2 k \lambda \mu)}.$$

Dans ces équations on remarquera que le second membre de la seconde a un signe contraire au signe du second membre de la seconde équation de ROSENHAIN: ce petit changement nous est imposé par la disposition des coupures et le choix des intégrales normales  $V(z)$  et  $W(z)$  qui en résulte. La variable que nous appelons  $w$  est donc égale à celle que ROSENHAIN appelle  $w$  changée de signe. Nous n'en pourrions pas moins appliquer toutes les formules de ROSENHAIN à condition d'y changer partout le signe de  $A$ . Ainsi nous écrirons la fonction  $\varphi_{3,3}(v, w)$ , (voyez ROSENHAIN, Mémoire couronné, page 388)

$$\varphi_{3,3}(v, w) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{m^2 \log p + n^2 \log q - 4mnA + 2mv + 2nw},$$

en mettant  $-4mnA$  au lieu de  $4mnA$ ; et de même pour les autres fonctions  $\varphi_{r,s}$ . En effet, changer le signe de  $A$  revient à changer le signe de  $w$ , comme on le voit en changeant  $n$  en  $-n$ .

Intégrons maintenant les équations différentielles de JACOBI écrites à la page précédente, et prenons pour valeur initiale de  $z_2$  la valeur 0 et pour valeur initiale de  $z_1$  la valeur  $\frac{1}{k^2}$ ; nous aurons, puisque

$$V(0) = W(0) = 0,$$

$$(38) \quad \begin{cases} v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right), \\ w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right). \end{cases}$$

L'inversion de ces équations donne, d'après ROSENHAIN (Mémoire couronné, page 422),

$$(39) \quad \begin{cases} 1; \quad \frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = -k\lambda\mu z_1 z_2, \\ 3; \quad \frac{\varphi_{3,1}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = \frac{\lambda\mu}{k_1\lambda_k\mu_k} (1 - k^2 z_1)(1 - k^2 z_2) \end{cases}$$

où nous n'écrivons que la première et la troisième formule de ROSENHAIN. Les fonctions

$$\varphi_{1,0}(v, w), \quad \varphi_{3,1}(v, w)$$

s'annulent pour

$$v = w = 0, \quad (\text{ROSENHAIN, loc. cit. p. 416})$$

de sorte qu'alors on a

$$z_2 = 0, \quad z_1 = \frac{1}{k^2},$$

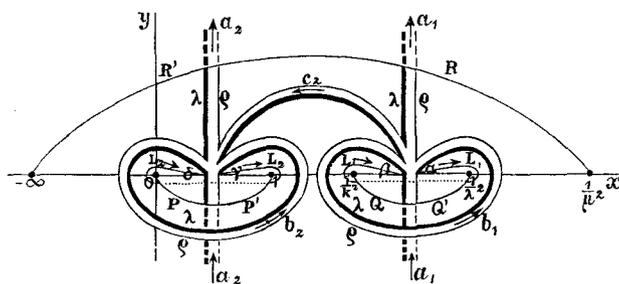
ce qui est bien d'accord avec la façon dont nous avons fixé les valeurs initiales de  $z_1$  et  $z_2$  en écrivant les équations (38).

Reprenons la surface de Riemann de la page 92 et appelons, comme plus haut,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  les points où l'axe  $Ox$  des quantités réelles rencontre les bords des coupures  $a_1$  et  $a_2$ . Si l'on suppose  $z_2 = \gamma, z_1 = \alpha$ ,

les variables  $v$  et  $w$  prennent des valeurs  $v_0$  et  $w_0$  données par les équations

$$v_0 = V(\gamma) + V(\alpha) - V\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad w_0 = W(\gamma) + W(\alpha) - W\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Supposons ensuite que  $z_2$  partie de  $\gamma$ , décrive la portion  $\gamma_1$  de l'axe  $Ox$  dans le feuillet supérieur, la portion  $1, 0$  du même axe dans le feuillet



inférieur, et enfin la portion  $o\delta$  du même axe dans le feuillet supérieur; supposons en même temps que  $z_1$  partie de  $\alpha$ , décrive la portion  $\alpha \frac{1}{\lambda^2}$  de l'axe  $Ox$  dans le feuillet supérieur, la portion  $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{k^2}$  du même axe dans le feuillet inférieur, et enfin la portion  $\frac{1}{k^2}\beta$  du même axe dans le feuillet supérieur. Alors les variables  $v$  et  $w$  définies par les équations de JACOBI

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

partent des valeurs  $v_0$  et  $w_0$  qui sont *purement imaginaires* (c'est à dire *sans partie réelle*) et varient par une suite continue de valeurs purement imaginaires de  $v_0$  et  $w_0$  à  $v_0 + i\pi$  et  $w_0 + i\pi$ . Cela résulte immédiatement de ce que, sur l'axe des quantités réelles, dans l'un et l'autre feuillet, les intégrales

$$\left. \begin{aligned} V(z_2) &= \int_0^{z_2} \frac{B - Cz_2}{s_2} dz_2, \\ V(z_1) - V\left(\frac{1}{k^2}\right) &= \int_{\frac{1}{k^2}}^{z_1} \frac{B - Cz_1}{s_1} dz_1, \\ W(z_2) &= - \int_0^{z_2} \frac{B' - C'z_2}{s_2} dz_2, \\ W(z_1) - W\left(\frac{1}{k^2}\right) &= - \int_{\frac{1}{k^2}}^{z_1} \frac{B' - C'z_1}{s_1} dz_1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 0 &\leq z_2 \leq 1, \\ \frac{1}{k^2} &\leq z_1 \leq \frac{1}{\lambda^2}, \end{aligned}$$

sont purement imaginaires, (pages 90 et suivantes) et de ce que l'on a

$$\begin{aligned} V(\beta) - V(\alpha) &= 0, & V(\delta) - V(\gamma) &= \pi i, \\ W(\beta) - W(\alpha) &= \pi i, & W(\delta) - W(\gamma) &= 0. \end{aligned}$$

Inversement, comme, par l'inversion,  $z_1 z_2$  et  $z_1 + z_2$  deviennent des fonctions uniformes de  $v$  et  $w$ , lorsque  $v$  et  $w$  varient par valeurs purement imaginaires de  $v_0$  et  $w_0$  à  $v_0 + \pi i$ ,  $w_0 + \pi i$ , les points  $z_1$  et  $z_2$  restent sur l'axe  $Ox$  des quantités réelles et décrivent: le point  $z_2$  un chemin  $L_2$  formé de la droite  $\gamma 1$  dans le feuillet supérieur, de la droite  $1, 0$  dans le feuillet inférieur, enfin de la droite  $0\delta$  dans le feuillet supérieur, et le point  $z_1$  un chemin  $L_1$  formé de la droite  $\alpha \frac{1}{\lambda^2}$  dans le feuillet supérieur, de la droite  $\frac{1}{\lambda^2} \frac{1}{k^2}$  dans le feuillet inférieur, enfin de la droite  $\frac{1}{k^2} \beta$  dans le feuillet supérieur. Nous avons, dans la figure de la page précédente, représenté ces chemins  $L_1$  et  $L_2$  par des contours fermés voisins de l'axe des quantités réelles: d'après ce que nous venons de dire, ces contours doivent être supposés infiniment voisins de cet axe.

La fonction abélienne

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = - k\lambda\mu z_1 z_2$$

admet par rapport à chacune des variables la période  $\pi i$  et reste finie quand  $v$  et  $w$  partent des valeurs purement imaginaires  $v_0$  et  $w_0$  et varient par valeurs purement imaginaires de  $v_0$  et  $w_0$  à  $v_0 + \pi i$  et  $w_0 + \pi i$ . On a donc, par la série de Fourier,

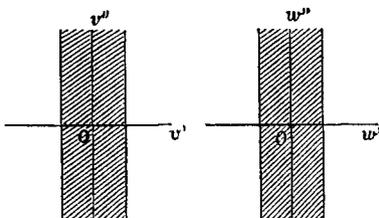
$$(40) \quad \frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} P_{m,n} e^{-2mv-2nw},$$

$m$  et  $n$  étant des *entiers* qui prennent toutes les valeurs de  $-\infty$  à  $+\infty$  et  $P_{m,n}$  un coefficient indépendant de  $v$  et  $w$ .

Ce développement est valable pour toutes les valeurs purement imaginaires de  $v$  et  $w$ : il aura encore lieu pour des valeurs de  $v$  et  $w$  suffisamment voisines de valeurs purement imaginaires. En d'autres termes, si l'on fait

$$v = v' + iv'', \quad w = w' + iw''$$

et si l'on représente les variables imaginaires  $v$  et  $w$  sur deux plans  $v'Ov''$  et  $w'Ow''$ , le développement sera valable pour les valeurs de  $v$



situées dans une bande parallèle à l'axe  $Ov''$  et les valeurs de  $w$  situées dans une bande parallèle à l'axe  $Ow''$ . Ces deux bandes sont ombrées sur la figure.

Le coefficient  $P_{m,n}$  est donné par l'intégrale double

$$(41) \quad P_{m,n} = -\frac{1}{\pi^2} \int_{v_0}^{v_0+\pi i} dv \int_{w_0}^{w_0+\pi i} \frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} e^{2mv+2nw} dw,$$

l'intégration étant étendue à des valeurs purement imaginaires de  $v$  et  $w$ , de sorte qu'il suffirait de poser

$$v = v_0 + iv'', \quad w = w_0 + iw''$$

pour avoir une intégrale double étendue à des valeurs réelles  $v''$  et  $w''$ .

Le calcul de cette intégrale double se ramène au calcul des modules de périodicité d'intégrales de fonctions à multiplicateurs. Pour le montrer, faisons-y le changement de variables défini par les équations de JACOBI<sup>1</sup>

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

en prenant pour nouvelles variables  $z_1$  et  $z_2$ . Comme nous l'avons expliqué en détail, pour faire varier  $v$  et  $w$  par valeurs *purement* imaginaires de  $v_0$  et  $w_0$  à  $v_0 + i\pi$  et  $w_0 + i\pi$ , il suffit de faire varier  $z_2$  par *valeurs réelles* de  $\gamma$  à  $1$  dans le feuillet supérieur (voyez la figure de la page 100), puis de  $1$  à  $0$  dans le feuillet inférieur, puis de  $0$  à  $\delta$  dans le feuillet supérieur, et de faire varier  $z_1$  par *valeurs réelles* de  $\alpha$  à  $\frac{1}{\lambda^2}$  dans le feuillet supérieur, puis de  $\frac{1}{\lambda^2}$  à  $\frac{1}{k^2}$  dans le feuillet inférieur, enfin de  $\frac{1}{k^2}$  à  $\beta$  dans le feuillet supérieur. Ainsi que nous en sommes convenus, nous dirons, pour désigner d'une manière abrégée ces successions de valeurs réelles de  $z_1$  et  $z_2$ , que les variables  $z_1$  et  $z_2$  décrivent les contours  $L_1$  et  $L_2$ .

Nous devons alors, en appliquant les règles élémentaires du changement de *variables réelles* dans une intégrale double, remplacer

$$dv dw$$

par

$$\left(\frac{\partial v}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_2} - \frac{\partial v}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_1}\right) dz_1 dz_2.$$

Or les équations

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

---

<sup>1</sup> voir page 99.

donnent, puisque

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \quad W(z) = - \int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

$$\frac{\partial v}{\partial z_1} = \frac{B - Cz_1}{s_1}, \quad \frac{\partial v}{\partial z_2} = \frac{B - Cz_2}{s_2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z_1} = - \frac{B' - C'z_1}{s_1}, \quad \frac{\partial w}{\partial z_2} = - \frac{B' - C'z_2}{s_2},$$

d'où

$$\frac{\partial v}{\partial z_1} \frac{\partial w}{\partial z_2} - \frac{\partial v}{\partial z_2} \frac{\partial w}{\partial z_1} = (BC' - CB') \frac{z_2 - z_1}{s_1 s_2}.$$

Nous devons donc faire, dans l'intégrale double,

$$dv dw = (BC' - CB') \frac{z_2 - z_1}{s_1 s_2} dz_1 dz_2.$$

Comme  $dv$  et  $dw$  sont *purement imaginaires positifs*, le produit  $dv dw$  est *réel négatif*; dans le second membre, le facteur  $(BC' - CB')$  est réel positif d'après les valeurs de  $B, C, B', C'$ , la différence  $z_2 - z_1$  est négative puisque  $z_2$  est réel et compris entre 0 et 1,  $z_1$  réel et compris entre  $\frac{1}{k^2}$  et  $\frac{1}{\lambda^2}$ , enfin  $\frac{dz_1}{s_1}$  et  $\frac{dz_2}{s_2}$  sont tous deux positifs d'après la suite des valeurs que prennent  $z_1$  et  $z_2$  dans les deux feuillets,  $s_1$  étant pris positivement quand  $z_1$  croît et négativement quand  $z_1$  décroît, et de même  $s_2$  à l'égard de  $z_2$ . Comme on a de plus

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = -k\lambda\mu z_1 z_2,$$

l'intégrale (41) qui donne le coefficient  $P_{m,n}$  devient, après le changement de variables,

$$(42) \quad P_{m,n} = \Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right) - 2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{z_1 z_2 (z_2 - z_1)}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1) + V(z_2)] + 2n[W(z_1) + W(z_2)]} dz_1 dz_2,$$

la lettre  $\Delta$  désignant le facteur constant

$$\Delta = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2} (BC' - CB')$$

et les indices  $L_1$  et  $L_2$  rappelant que les variables réelles  $z_1$  et  $z_2$  doivent décrire sur la surface de Riemann les chemins définis plus haut et appelés  $L_1$  et  $L_2$ . Il se présente une petite difficulté à propos de cette transformation, c'est que les éléments des deux intégrales se correspondent bien deux à deux, mais les éléments appartenant à la limite de l'une n'appartiennent pas à la limite de l'autre. Pour montrer la légitimité de la transformation, nous allons vérifier que la nouvelle intégrale (42) est bien équivalente à la première (41). Si l'on pose:

$$\begin{aligned} z_2 &= \frac{1}{k^2} \cos^2 u_1 + \frac{1}{\lambda^2} \sin^2 u_1, & s_2 &= \sin u_2 \cos u_2 \Delta_2 u_2, \\ z_1 &= \sin^2 u_2, & s_1 &= \sin u_1 \cos u_1 \Delta_1 u_1, \end{aligned}$$

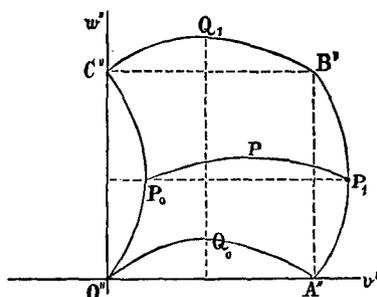
où  $\Delta_1 u_1$  et  $\Delta_2 u_2$  sont des quantités qui restent réelles et positives pour toutes les valeurs réelles de  $u_1$  et  $u_2$ , on fera décrire à  $z_1$  le chemin  $L_1$  et à  $z_2$  le chemin  $L_2$  en faisant varier  $u_1$  et  $u_2$  de 0 à  $\pi$  par valeurs réelles. L'intégrale double (42) deviendra ainsi une intégrale double étendue aux valeurs réelles de  $u_1$  et  $u_2$  telles que

$$0 \leq u_1 \leq \pi, \quad 0 \leq u_2 \leq \pi.$$

D'autre part, posons comme précédemment

$$v = v_0 + v''i, \quad w = w_0 + w''i,$$

$v''$  et  $w''$  étant réels, et désignons par  $P$  un point ayant pour coordonnées  $v''$  et  $w''$  par rapport à deux axes rectangulaires  $O''v''$ ,  $O''w''$ .



On peut alors dire que l'intégrale (41) est étendue à l'aire du carré  $O''A''B''C''$  dont les cotés sont égaux à  $\pi$ . Les éléments des intégrales (41) et (42) sont égaux; pour comparer les champs d'intégration, donnons,

dans l'intégrale (42), à  $u_2$  une valeur constante et faisons varier  $u_1$  de 0 à  $\pi$ : le point  $P$  de coordonnées  $v''$  et  $w''$  décrira une courbe  $P_0PP_1$  telle que le segment  $P_0P_1$  soit parallèle à l'axe  $O''v''$  et ait pour longueur  $\pi$ ; car si, dans les équations (38) de JACOBI, on laisse  $z_2$  constant en faisant décrire à  $z_1$  le contour  $L_1$ ,  $w$  revient à la même valeur et  $v$  augmente de  $\pi i$ . A chaque valeur constante donnée à  $u_2$  correspond ainsi une courbe  $P_0PP_1$  dans le plan  $v''O''w''$ ; si l'on fait varier cette valeur constante donnée à  $u_2$  de 0 à  $\pi$ , la courbe  $P_0PP_1$  se déplace et se déforme d'une manière continue depuis la position  $O''Q_0A''$  correspondant à  $u_2 = 0$ , jusqu'à la position  $C''Q_1B''$  correspondant à  $u_2 = \pi$ , de façon à recouvrir une fois et une seule fois l'aire  $O''Q_0A''P_1B''Q_1C''P_0O''$ . Cette aire est limitée par quatre courbes: la courbe  $C''Q_1B''$  se déduit de  $O''Q_0A''$  en augmentant les ordonnées de cette dernière courbe de  $\pi$  ( $Q_0Q_1 = \pi$ ), et la courbe  $A''P_1B''$  se déduit de  $O''P_0C''$  en augmentant les abscisses de cette dernière de  $\pi$  ( $P_0P_1 = \pi$ ). L'intégrale double (42) est donc égale à l'intégrale double (41) étendue à l'aire curviligne  $O''Q_0A''P_1B''Q_1C''P_0O''$ ; mais, comme la fonction de  $v$  et  $w$  qui figure dans l'intégrale (41) admet par rapport à  $v''$  et  $w''$  la période  $\pi$ , la valeur de cette intégrale étendue à l'aire curviligne est égale à la valeur de cette même intégrale étendue au carré  $O''A''B''C''$ , c'est à dire aux valeurs

$$0 \leq v'' \leq \pi, \quad 0 \leq w'' \leq \pi.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Il est donc bien établi que la première intégrale double (41) donnant  $P_{m,n}$  peut être remplacée par la nouvelle intégrale (42); mais, et c'est là un premier point d'une grande importance, dans cette nouvelle intégrale double, les variables se séparent, et l'intégrale se ramène à quatre intégrales simples. En effet, si l'on pose

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z_1 dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1) + 2nW(z_1)}, \quad \mathcal{A}_1 = \int_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1) + 2nW(z_1)},$$

$$A_2 = \int_{L_2} \frac{z_2 dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2) + 2nW(z_2)}, \quad \mathcal{A}_2 = \int_{L_2} \frac{z_2^2 dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2) + 2nW(z_2)},$$

on a

$$P_{m,n} = \Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right) - 2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)} (A_1 \mathcal{A}_2 - A_2 \mathcal{A}_1),$$

ou encore, puisque (d'après pag. 98)

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2} \log p - A, \quad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2} \log q,$$

$$(43) \quad P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} e^{2(m-n)A} (A_1 \mathfrak{A}_2 - A_2 \mathfrak{A}_1).$$

Le calcul du coefficient  $P_{m,n}$  est ainsi ramené au calcul des quatre intégrales définies

$$A_1, A_2, \mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2.$$

Or ces quatre constantes sont les modules de périodicité, le long des coupures  $a_1$  et  $a_2$ , des intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\int \frac{z dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}, \quad \int \frac{z^2 dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}.$$

Pour le montrer, considérons l'exponentielle

$$E(z) = e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

qui est, ainsi que  $V(z)$  et  $W(z)$ , uniforme sur la surface  $R_{ab}$  de Riemann avec les coupures  $a_1, a_2, b_1, b_2$ . Cette exponentielle admet le long des coupures  $a_1, a_2, b_1, b_2$  les multiplicateurs respectifs

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \quad n_2 = p^{2m} r^{2n}$$

en faisant pour simplifier

$$e^{-2A} = r.$$

C'est ce qui résulte immédiatement du tableau des modules de périodicité des intégrales  $V(z)$  et  $W(z)$  tel que nous l'avons donné à la page 96.

Ainsi, le long de la coupure  $a_1$ , on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = e^{2m[V(\lambda) - V(\rho)] + 2n[W(\lambda) - W(\rho)]},$$

et, comme le long de  $a_1$ ,

$$V(\lambda) - V(\rho) = 0, \quad W(\lambda) - W(\rho) = \pi i,$$

on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = 1, \quad E(\lambda) = E(\rho);$$

ce qui montre que le multiplicateur  $m_1$  relatif à la coupure  $a_1$  est l'unité. On voit de même que le multiplicateur  $m_2$  relatif à la coupure  $a_2$  est l'unité.

Le long de la coupure  $b_1$ , on a

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = e^{2m[V(\lambda) - V(\rho)] + 2n[W(\lambda) - W(\rho)]}$$

c'est à dire, puisque

$$V(\lambda) - V(\rho) = -2A, \quad W(\lambda) - W(\rho) = \log q,$$

$$\frac{E(\lambda)}{E(\rho)} = r^{2m} q^{2n};$$

ce qui montre que le multiplicateur  $n_1$  relatif à la coupure  $b_1$  est  $r^{2m} q^{2n}$ . On voit de même que le multiplicateur  $n_2$  relatif à la coupure  $b_2$  est  $p^{2m} r^{2n}$ .

Alors la fonction

$$\Phi(z) = \frac{z}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)} = \frac{z}{s} E(z)$$

est aussi uniforme sur la surface  $R_{ab}$  de Riemann et admet le long des coupures  $a_1, a_2, b_1, b_2$  les mêmes multiplicateurs que l'exponentielle  $E(z)$  à savoir

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \quad n_2 = p^{2m} r^{2n}.$$

L'intégrale de cette fonction

$$\omega(z) = \int_0^z \frac{z dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)}$$

est uniforme sur la surface de Riemann  $R_{abc}$  avec les coupures  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_2$ , telle qu'elle est figurée à la page 100. Cette intégrale est de première espèce, car elle est partout finie. Le module de périodicité de

cette intégrale  $\omega(z)$  le long de la coupure  $a_1$  est la valeur constante que possède la différence

$$\omega(\lambda) - m_1 \omega(\rho),$$

c'est à dire  $\omega(\lambda) - \omega(\rho)$  puisque  $m_1 = 1$ , le long de la coupure  $a_1$ . Or cette différence est

$$\omega(\beta) - \omega(\alpha),$$

$\alpha$  et  $\beta$  désignant comme plus haut les points où l'axe  $Ox$  rencontre les deux bords de la coupure  $a_1$ . Le module de périodicité de  $\omega(z)$  le long de  $a_1$  est donc la valeur de l'intégrale

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{z dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

prise de  $\alpha$  à  $\beta$  sur un contour  $L_1$  entourant les deux points  $\frac{1}{\lambda^2}, \frac{1}{h^2}$ , et pouvant être pris infiniment voisin de l'axe des quantités réelles. Ce module de périodicité est donc la constante appelée précédemment  $A_1$  (page 106)

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z_1 dz_1}{s_1} e^{2m V(z_1) + 2n W(z_1)}.$$

On verra de même que le module de périodicité de cette intégrale  $\omega(z)$  le long de  $a_2$  est la constante appelée précédemment  $A_2$  (page 106). Nous appellerons en outre  $B_1, B_2$  et  $C_2$  les modules de périodicité de cette intégrale  $\omega(z)$  le long des coupures  $b_1, b_2, c_2$ , de sorte que l'on aura

$$\text{le long de } a_1: \omega(\lambda) - \omega(\rho) = A_1,$$

$$\text{le long de } a_2: \omega(\lambda) - \omega(\rho) = A_2,$$

$$\text{le long de } b_1: \omega(\lambda) - n_1 \omega(\rho) = B_1,$$

$$\text{le long de } b_2: \omega(\lambda) - n_2 \omega(\rho) = B_2,$$

$$\text{le long de } c_2: \omega(\lambda) - \omega(\rho) = C_2,$$

les multiplicateurs  $m_1$  et  $m_2$  étant égaux à 1 et  $n_1$  et  $n_2$  ayant les valeurs

$$n_1 = r^{2m} q^{2n}, \quad n_2 = p^{2m} r^{2n}.$$

Les modules de périodicité et les multiplicateurs de l'intégrale de première espèce  $\omega(z)$  sont liés par les deux relations suivantes, déduites de la considération des points de croisement des coupures  $a_1, b_1, c_2$  et  $a_2, b_2, c_2$ ,

$$B_1(1 - m_1) - A_1(1 - n_1) + n_1 C_2 = 0,$$

$$B_2(1 - m_2) - A_2(1 - n_2) - m_2 n_2 C_2 = 0.$$

Ce sont là en effet les relations générales (12) de la page 34 appliquées au cas actuel où le genre est égal à 2. D'après les valeurs des multiplicateurs  $m_1, m_2, n_1, n_2$ , on a  $1 - m_1 = 0$ ,  $1 - m_2 = 0$  et il vient les deux relations

$$(44) \quad \begin{aligned} -A_1(1 - r^{2m} q^{2n}) + r^{2m} q^{2n} C_2 &= 0, \\ -A_2(1 - p^{2m} r^{2n}) - p^{2m} r^{2n} C_2 &= 0. \end{aligned}$$

Considérons maintenant la fonction

$$\Psi(z) = \frac{z^2}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)} = \frac{z^2}{s} E(z).$$

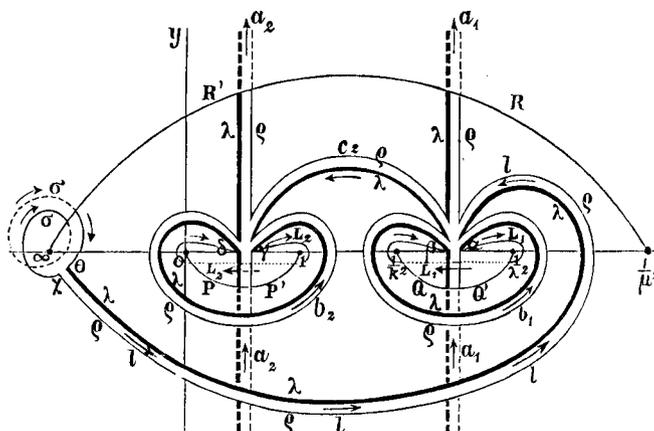
Cette fonction est uniforme sur la surface  $R_{ab}$  de Riemann et admet le long des coupures  $a_1, a_2, b_1, b_2$  les mêmes multiplicateurs  $m_1, m_2, n_1, n_2$  que l'exponentielle  $E(z)$ .

L'intégrale de cette fonction

$$\bar{\omega}(z) = \int_0^z \Psi(z) dz = \int_0^z \frac{z^2 dz}{s} e^{2m V(z) + 2n W(z)}$$

est partout finie excepté à l'infini où elle possède un *point critique logarithmique*; c'est donc une intégrale de *troisième espèce* qui n'est plus uniforme sur la surface  $R_{abc}$  de Riemann comme l'intégrale précédente  $\omega(z)$ . Cette intégrale  $\bar{\omega}(z)$  sera uniforme sur la surface  $R_{abcl}$  obtenue en ajoutant aux coupures  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_2$  un lacet  $l$  commençant et finissant au point

de croisement des coupures  $a_1, b_1, c_2$  et tournant deux fois autour du point  $\infty$ , comme le montre la figure schématique suivante où le point  $\infty$  est figuré par un point à distance finie.



On voit, sur cette figure, comment le lacet  $l$  se termine par un contour fermé  $\sigma$  tournant deux fois autour du point  $\infty$  en passant d'un feuillet à l'autre chaque fois qu'il traverse la ligne de passage  $\frac{1}{\mu^2} RR' \infty$ .

L'intégrale  $\bar{\omega}(z)$  uniforme sur cette surface de Riemann  $R_{abcl}$  possède six modules de périodicité relatifs aux six coupures  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_2$  et  $l$ ; les modules de périodicité relatifs aux coupures  $a_1$  et  $a_2$  sont les constantes appelées précédemment  $\mathfrak{A}_1$  et  $\mathfrak{A}_2$  (page 106)

$$\mathfrak{A}_1 = \int_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1)+2nW(z_1)}, \quad \mathfrak{A}_2 = \int_{L_2} \frac{z_2^2 dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2)+2nW(z_2)},$$

les indices  $L_1$  et  $L_2$  signifiant que les intégrales sont prises sur les contours  $L_1$  et  $L_2$  qui entourent le premier les points  $\frac{1}{k^2}, \frac{1}{\lambda^2}$ , le second les points  $0, 1$ , infiniment près de l'axe  $Ox$  des quantités réelles. Ces constantes  $\mathfrak{A}_1$  et  $\mathfrak{A}_2$  étant les modules de périodicité de l'intégrale

$$\bar{\omega}(z) = \int_0^z \frac{z^2 dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

le long des coupures  $a_1$  et  $a_2$ , nous appellerons en outre  $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{L}$  les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures  $b_1, b_2, c_2, l$ . De sorte que l'on aura:

$$\text{le long de la coupure } a_1: \bar{\omega}(\lambda) - \bar{\omega}(\rho) = \mathfrak{A}_1,$$

$$\text{le long de la coupure } a_2: \bar{\omega}(\lambda) - \bar{\omega}(\rho) = \mathfrak{A}_2,$$

$$\text{le long de la coupure } b_1: \bar{\omega}(\lambda) - n_1 \bar{\omega}(\rho) = \mathfrak{B}_1,$$

$$\text{le long de la coupure } b_2: \bar{\omega}(\lambda) - n_2 \bar{\omega}(\rho) = \mathfrak{B}_2,$$

$$\text{le long de la coupure } c_2: \bar{\omega}(\lambda) - \bar{\omega}(\rho) = \mathfrak{C}_2,$$

$$\text{le long de la coupure } l: \bar{\omega}(\lambda) - \bar{\omega}(\rho) = \mathfrak{L},$$

les multiplicateurs  $m_1$  et  $m_2$  étant égaux à 1 et les multiplicateurs  $n_1$  et  $n_2$  à  $r^{2m} q^{2n}$  et  $p^{2m} r^{2n}$ .

Le point de croisement des coupures  $a_1, b_1, c_2, l$  et celui des coupures  $a_2, b_2, c_2$  fournissent chacun une relation entre les modules de périodicité et les multiplicateurs, ainsi que nous l'avons montré dans la deuxième partie (page 56 par exemple). Ces relations sont les suivantes

$$\mathfrak{B}_1(1 - m_1) - \mathfrak{A}_1(1 - n_1) - m_1 n_1 \mathfrak{L} + n_1 \mathfrak{C}_2 = 0,$$

$$\mathfrak{B}_2(1 - m_2) - \mathfrak{A}_2(1 - n_2) - m_2 n_2 \mathfrak{C}_2 = 0,$$

où il faudra faire

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \quad n_2 = p^{2m} r^{2n}.$$

On aura donc

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{n_1 \mathfrak{C}_2 - n_1 \mathfrak{L}}{1 - n_1}, \quad \mathfrak{A}_2 = -\frac{n_2 \mathfrak{C}_2}{1 - n_2}.$$

D'ailleurs on a trouvé précédemment (page 110 éq. 44)

$$A_1 = \frac{n_1 \mathfrak{C}_2}{1 - n_1}, \quad A_2 = -\frac{n_2 \mathfrak{C}_2}{1 - n_2}.$$

Donc le coefficient  $P_{m,n}$  donné par la formule (43) de la page 107, où l'on fait  $e^{-2A} = r$ ,

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} (A_1 \mathfrak{A}_2 - A_2 \mathfrak{A}_1),$$

devient

$$P_{m,n} = - (-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} \frac{n_1 n_2}{(1-n_1)(1-n_2)} C_2 \mathcal{L}$$

ou encore, en remplaçant  $\frac{n_2 C_2}{1-n_2}$  par sa valeur  $-A_2$  et  $n_1$  par  $r^{2m} q^{2n}$ ,

$$(45) \quad P_{m,n} = (-1)^m \Delta \frac{p^m q^n r^{m+n}}{1-r^{2m} q^{2n}} A_2 \mathcal{L}.$$

Ce coefficient  $P_{m,n}$  est ainsi exprimé à l'aide de  $A_2$  et  $\mathcal{L}$  seulement. Or la constante  $\mathcal{L}$  est aisée à calculer. Cette constante est égale à la différence

$$\bar{\omega}(\lambda) - \bar{\omega}(\rho)$$

tout le long de la coupure  $l$ : elle est donc en particulier égale à

$$\bar{\omega}(\theta) - \bar{\omega}(\chi),$$

$\theta$  et  $\chi$  étant les points où le contour  $\sigma$  qui entoure deux fois le point  $\infty$  se raccorde avec les bords de la coupure  $l$  (Voyez la figure de la page 111). La constante  $\mathcal{L}$  est donc la valeur de l'intégrale

$$\int_{\chi}^{\theta} \frac{z^s dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)}$$

prise sur ce contour  $\sigma$  dans le sens marqué par une flèche.

Dans le voisinage du point  $\infty$ , c'est à dire pour des valeurs de  $z$  dont le module dépasse un nombre suffisamment grand, on a

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\sqrt{(zk\lambda\mu)}} = \frac{1}{k\lambda\mu z^{\frac{5}{2}}} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{k^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{1}{\mu^2 z}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

d'où en développant en série suivant les puissances croissantes de  $\frac{1}{z}$ :

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{k\lambda\mu z^{\frac{5}{2}}} \left[ 1 + \frac{\alpha_1}{z} + \frac{\alpha_2}{z^2} + \dots \right].$$

La fonction

$$2mV(z) + 2nW(z) = \int_0^z \frac{2mB - 2nB' - (2mC - 2nC')z}{s} dz$$

sera donc, pour ces mêmes valeurs de  $z$ , développable en une série de la forme

$$2mV(z) + 2nW(z) = K + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 + \frac{\beta_1}{z} + \frac{\beta_2}{z^2} + \dots \right]$$

où  $K$  désigne une constante d'intégration et où nous n'avons calculé exactement que le coefficient du terme en  $\frac{1}{z^{\frac{1}{2}}}$ . La constante  $K$  est aisée à déterminer: en effet en faisant  $z = \infty$ , on a

$$2mV(\infty) + 2nW(\infty) = K,$$

et comme (voyez page 96)

$$V(\infty) = -\frac{1}{2} \log p, \quad W(\infty) = A,$$

on a

$$K = -m \log p + 2nA.$$

D'après cela l'exponentielle

$$E(z) = e^{2mV(z) + 2nW(z)} = e^{K + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}} \left[ 1 + \frac{\beta_1}{z} + \dots \right]},$$

se développe en une série de la forme

$$E(z) = p^{-m} r^{-n} \left[ 1 + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu z^{\frac{1}{2}}} \left( 1 + \frac{\gamma_1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{\gamma_2}{z} + \dots \right) \right],$$

car

$$e^K = e^{-m \log p + 2nA} = p^{-m} r^{-n}.$$

En vertu de ces développements de  $\frac{1}{s}$  et  $E(z)$ , on a, pour les mêmes valeurs de  $z$ ,

$$\frac{z^2}{s} E(z) = \frac{p^{-m} r^{-n}}{k\lambda\mu} \left[ \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(2mC - 2nC')}{k\lambda\mu} \frac{1}{z} + \frac{\delta_1}{z^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2}{z^2} + \dots \right].$$

La constante  $\mathcal{L}$  est, comme nous l'avons vu, l'intégrale

$$\int_x^{\theta} \frac{z^2}{s} E(z) dz$$

prise sur un contour  $\sigma$  entourant deux fois le point  $\infty$  dans le sens négatif (figure de la page 111), c'est à dire sur une circonférence très grande de centre  $O$  parcourue deux fois dans le sens positif autour de  $O$ . Or cette dernière intégrale est le produit de  $4\pi i$  par le coefficient de  $\frac{1}{z}$  dans le développement ci-dessus de  $\frac{z^2}{s} E(z)$ . On a donc

$$\mathfrak{L} = \frac{16\pi i}{k^2 \lambda^2 \mu^2} p^{-m} r^{-n} (mC - nC').$$

La constante  $\mathfrak{L}$  étant ainsi calculée, l'expression (45) trouvée pour  $P_{m,n}$  à la page 113 devient

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16\pi i \Delta}{k^2 \lambda^2 \mu^2} (mC - nC') \frac{q^n r^m}{1 - r^{2m} q^{2n}} A_2$$

ou encore, puisque

$$\Delta = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2} (BC' - CB') \quad (\text{page 104}),$$

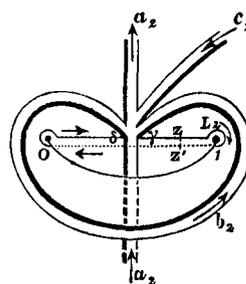
$$(46) \quad P_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu} (mC - nC') \frac{A_2}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n}$$

où il ne reste plus d'inconnu que le coefficient  $A_2$  exprimé par l'intégrale définie

$$A_2 = \int_{L_2} \frac{z dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)}$$

prise de  $\gamma$  en  $\delta$  sur le contour  $L_2$  infiniment voisin du segment de droite  $O1$  (figure de la page 111).

Cette dernière intégrale peut s'écrire d'une façon un peu plus commode. Figurons le contour  $L_2$  formé de l'axe des quantités réelles de  $\gamma$  en 1 dans le feuillet supérieur, de 1 en  $O$  dans le feuillet inférieur (partie ponctuée) et de  $O$  en  $\delta$  dans le feuillet supérieur. Appelons  $z$  un point de l'axe des quantités réelles situé dans le feuillet supérieur entre  $O$  et 1, et  $z'$  le point du même axe situé au dessous de  $z$  dans



le feuillet inférieur, et soient  $s$  et  $s'$  les valeurs correspondantes de  $s$ , de sorte que  $s' = -s$ . L'intégrale qui donne  $A_2$  pourra s'écrire

$$A_2 = \int_0^{\delta} \frac{z dz}{s} E(z) + \int_{\gamma}^1 \frac{z dz}{s} E(z) + \int_1^0 \frac{z' dz'}{s'} E(z').$$

Comme l'exponentielle  $E(z)$  admet le multiplicateur  $m_2 = 1$  le long de la coupure  $a_2$ , elle ne change pas quand on franchit cette coupure, et, par conséquent, les deux premières intégrales peuvent être réunies en une seule

$$\int_0^1 \frac{z dz}{s} E(z).$$

D'autre part on a le long de la droite  $O\delta$

$$z' = z, \quad s' = -s, \quad V(z') = -V(z), \quad W(z') = -W(z),$$

car on a, par exemple

$$V(z') = \int_0^{z'} \frac{B - Cz'}{s'} dz' = - \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz = -V(z)$$

et de même pour l'intégrale  $W$ . Puis le long de la droite  $\gamma I$ , on a

$$z' = z, \quad s' = -s, \quad V(z') = -\pi i - V(z), \quad W(z') = -W(z).$$

En effet on a, sur cette portion de l'axe  $Ox$ ,

$$V(z') = V(1) + \int_1^{z'} \frac{B - Cz'}{s'} dz' = V(1) - \int_1^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

et

$$V(z) = V(1) + \int_1^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

d'où en ajoutant

$$V(z') + V(z) = 2V(1) = -\pi i;$$

on trouvera de même

$$W(z') + W(z) = 2W(1) = 0;$$

car

$$V(1) = -\frac{\pi i}{2}, \quad W(1) = 0.$$

Il résulte de là que l'on a entre  $O$  et  $\gamma$

$$E(z') = e^{2mV(z')+2nW(z')} = e^{-2mV(z)-2nW(z)}$$

et entre  $\gamma$  et  $1$

$$E(z') = e^{2mV(z')+2nW(z')} = e^{-2mV(z)-2nW(z)},$$

car le facteur  $e^{-2m\pi i}$  égale  $1$ . On a ainsi la même expression de  $E(z')$  entre  $O$  et  $1$ , et la formule qui donne  $A_2$  peut s'écrire

$$A_2 = \int_0^1 \frac{z dz}{s} E(z) + \int_1^0 \frac{z' dz'}{s'} E(z') = \int_0^1 \frac{z dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)} + \int_0^1 \frac{z dz}{s} e^{-2mV(z)-2nW(z)}.$$

Donc, en posant

$$(47) \quad \phi(m, n) = \int_0^1 \frac{z dz}{s} e^{2mV(z)+2nW(z)},$$

l'intégration étant faite le long de l'axe  $Ox$  dans le feuillet supérieur en traversant la coupure  $a_2$ , on aura

$$A_2 = \phi(m, n) + \phi(-m, -n)$$

et l'expression de  $P_{m,n}$  deviendra

$$(48) \quad P_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k \lambda \mu} (mC - nC') \frac{\phi(m, n) + \phi(-m, -n)}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n}$$

où il n'entre plus que l'intégrale simple rectiligne  $\phi(m, n)$  définie ci-dessus.

Le développement de la fonction abélienne considérée est donc

$$(49) \quad \frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k \lambda \mu} \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} (-1)^m (mC - nC') \frac{\phi(m, n) + \phi(-m, -n)}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n} e^{-2mv - 2nw},$$

les constantes  $B, B', C, C'$  ayant les valeurs que donne ROSENHAIN à la page 433 de son Mémoire. Comme le premier membre est une fonction *paire* de  $v$  et  $w$ , il doit en être de même du second. C'est ce qu'on vérifie immédiatement, car si l'on change  $v$  et  $w$  en  $-v$  et  $-w$ , puis  $m$  et  $n$  en  $-m$  et  $-n$ , le second membre ne change pas. En réunissant dans la série les termes qui correspondent à des valeurs de  $m$  et  $n$  égales et de signes contraires, on aura la série trigonométrique suivante ne contenant que des cosinus

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)} = \frac{32(BC' - CB')i}{\pi k \lambda \mu} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \sum_{n=0}^{n=+\infty} (-1)^m (mC - nC') \frac{\psi(m, n) + \psi(-m, -n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} \cos(2miv + 2niw)$$

Il faut remarquer que, dans ces formules, le coefficient  $P_{0,0}$  correspondant à  $m = n = 0$  se présente sous forme illusoire  $\frac{0}{0}$ . On obtiendra directement ce coefficient en faisant dans la formule (42), page 104,  $m = n = 0$ . On a ainsi

$$P_{0,0} = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2} (BC' - CB') \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{z_1 z_2 (z_2 - z_1)}{s_1 s_2} dz_1 dz_2$$

ou bien

$$P_{0,0} = \frac{k\lambda\mu(BC' - CB')}{\pi^2} (A_1^0 \mathcal{A}_2^0 - A_2^0 \mathcal{A}_1^0)$$

en faisant

$$\begin{aligned} A_1^0 &= \int_{L_1} \frac{z_1 dz_1}{s_1}, & A_2^0 &= \int_{L_2} \frac{z_2 dz_2}{s_2}, \\ \mathcal{A}_1^0 &= \int_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1}, & \mathcal{A}_2^0 &= \int_{L_2} \frac{z_2^2 dz_2}{s_2}. \end{aligned}$$

Le coefficient  $P_{0,0}$  est ainsi exprimé à l'aide de quatre constantes dont les deux premières  $A_1^0$  et  $A_2^0$  sont les modules de périodicité de l'intégrale *abélienne*

$$\int \frac{z dz}{s}$$

le long des coupures  $a_1$  et  $a_2$ , et les deux dernières  $\mathfrak{A}_1^0$  et  $\mathfrak{A}_2^0$  les modules de périodicité de l'intégrale abélienne

$$\int \frac{z^2 dz}{s}$$

le long des mêmes coupures  $a_1$  et  $a_2$ . Les deux premières constantes  $\mathfrak{A}_1^0$  et  $\mathfrak{A}_2^0$  se calculent immédiatement à l'aide des équations (36) de la page 90; il est inutile d'insister sur ce calcul.

*Développement de la fonction abélienne qui donne la somme  $z_1 + z_2$  exprimée en  $v$  et  $w$ .*

Nous venons de trouver le développement de  $-k\lambda\mu z_1 z_2$  en série trigonométrique: nous formerons de même celui de  $-k\lambda\mu(z_1 + z_2)$ . En supposant

$$-k\lambda\mu(z_1 + z_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} Q_{m,n} e^{-2mv-2nw},$$

on trouve, comme pour  $P_{m,n}$  (pages 102—104),

$$(50) \quad Q_{m,n} = \Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{kz}\right) - 2nW\left(\frac{1}{kz}\right)} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{(z_1 + z_2)(z_2 - z_1)}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1) + V(z_2)] + 2n[W(z_1) + W(z_2)]} dz_1 dz_2,$$

formule qui se déduit de la formule (42) de la page 104 en y remplaçant  $z_1 z_2$  par  $z_1 + z_2$ . L'intégrale double ainsi obtenue se décompose en quatre intégrales simples dont deux

$$\mathfrak{A}_1 = \int_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1) + 2nW(z_1)},$$

$$\mathfrak{A}_2 = \int_{L_2} \frac{z_2^2 dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2) + 2nW(z_2)}$$

sont les mêmes que précédemment et dont les deux autres

$$A'_1 = \int_{L_1} \frac{dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1) + 2nW(z_1)},$$

$$A'_2 = \int_{L_2} \frac{dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2) + 2nW(z_2)}$$

se ramènent facilement à celles que nous avons appelées  $A_1$  et  $A_2$ . Avec ces notations, la formule qui donne  $Q_{m,n}$  s'écrit

$$Q_{m,n} = (-1)^m k\lambda\mu \frac{BC' - CB'}{\pi^2} p^m q^{-n} r^{n-m} (\mathcal{A}_2 A'_1 - \mathcal{A}_1 A'_2),$$

car

$$\Delta = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2} (BC' - CB'),$$

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2} \log p - A, \quad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2} \log q.$$

En répétant les calculs qui ont été faits pour la détermination de  $P_{m,n}$  on trouvera la formule

$$Q_{m,n} = (-1)^m \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu} (mC - nC') \frac{A'_2}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n}$$

ne différant de la formule (46) de la page 115 que par le changement de  $A_2$  en  $A'_2$ . Cette constante  $A'_2$

$$A'_2 = \int_{L_2} \frac{dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)}$$

peut s'écrire plus simplement

$$A'_2 = \phi'(m, n) + \phi'(-m, -n),$$

en posant

$$\phi'(m, n) = \int_0^1 \frac{dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)};$$

il suffit, pour le voir, de répéter le raisonnement fait pour  $A_2$  aux pages 115—117. On aura donc le développement

$$(51) \quad -k\lambda\mu(z_1 + z_2) \\ = \frac{16(BC' - CB')i}{\pi k\lambda\mu} \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} (-1)^m (mC - nC') \frac{\phi'(m, n) + \phi'(-m, -n)}{r^{-m}q^{-n} - r^m q^n} e^{-2mv - 2nw}$$

que l'on pourrait ordonner suivant les cosinus des arcs  $(2miv + 2niw)$ . Le coefficient  $Q_{0,0}$  devra être calculé à part, comme nous l'avons fait pour  $P_{0,0}$ .

Il est important de remarquer que la fonction  $\phi'(m, n)$  peut se ramener à  $\phi(m, n)$ ; cela revient à dire que les constantes  $A'_1$  et  $A'_2$  peuvent s'exprimer en fonction de  $A_1$  et  $A_2$ . En effet, comme

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \quad W(z) = - \int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

l'on a, pour l'exponentielle  $E(z)$ , l'expression

$$E(z) = e^{2mV(z) + 2nW(z)} = e^{2(mB - nB') \int_0^z \frac{dz}{s} - 2(mC - nC') \int_0^z \frac{zdz}{s}}$$

d'où l'on déduit, en différentiant,

$$dE(z) = 2(mB - nB') \frac{dz}{s} E(z) - 2(mC - nC') \frac{zdz}{s} E(z).$$

Intégrons cette identité de 0 à 1, l'intégrale du premier membre sera

$$E(1) - E(0) = (-1)^m - 1,$$

car

$$V(0) = W(0) = 0, \quad V(1) = -\frac{i\pi}{2}, \quad W(1) = 0;$$

on aura donc

$$(-1)^m - 1 = 2(mB - nB')\phi'(m; n) - 2(mC - nC')\phi(m, n),$$

formule qui exprime  $\phi'(m, n)$  en fonction de  $\phi(m, n)$  à condition toutefois que  $(mB - nB')$  ne soit pas nul. En retranchant de la relation ci-dessus

celle qu'on en déduit par le changement de  $m$  et  $n$  en  $-m$ ,  $-n$ , on a

$$\begin{aligned} & (mB - nB')[\psi'(m, n) + \psi'(-m, -n)] \\ &= (mC - nC')[\psi(m, n) + \psi(-m, -n)], \end{aligned}$$

formule qui permettra d'exprimer  $[\psi'(m, n) + \psi'(-m, -n)]$  en fonction de  $[\psi(m, n) + \psi(-m, -n)]$ , à condition que  $(mB - nB')$  ne soit pas nul.

Connaissant ainsi les développements en série de  $z_1 z_2$  et  $z_1 + z_2$ , on écrira immédiatement les développements en séries trigonométriques des cinq fonctions abéliennes

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}, \frac{\varphi_{2,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}, \frac{\varphi_{3,1}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}, \frac{\varphi_{3,2}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}, \frac{\varphi_{3,3}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}$$

qui, d'après les formules données par ROSENHAIN à la page 422 de son Mémoire, s'expriment toutes linéairement en  $z_1 z_2$  et  $z_1 + z_2$ . (Nos variables  $z_1$  et  $z_2$  sont celles que ROSENHAIN appelle  $x_1$  et  $x_2$ ). Dans ces cinq développements figurera la seule intégrale définie appelée  $\psi(m, n)$

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)},$$

le chemin d'intégration étant *rectiligne*.

Il est essentiel de remarquer que les modules des intégrales

$$\psi(m, n) = \int_0^1 \frac{z dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)}, \quad \psi'(m, n) = \int_0^1 \frac{dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)}$$

restent finis quand  $m$  et  $n$  croissent indéfiniment par valeurs positives ou négatives. En effet, ces deux intégrales sont prises le long de l'axe  $Ox$  des quantités réelles: or, le long de cet axe les intégrales

$$V(z) = \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz, \quad W(z) = - \int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz$$

sont *purement imaginaires*, puisque les constantes  $B, C, B', C'$  le sont (pages 90 et 91); le module de l'élément différentiel de l'intégrale  $\phi(m, n)$

$$\frac{z dz}{s} e^{2m r(z) + 2n W(z)}$$

est donc égal à

$$\frac{z dz}{s}$$

et, le module de l'intégrale  $\phi(m, n)$  étant plus petit que la somme des modules des éléments différentiels, on a

$$|\phi(m, n)| \leq \int_0^1 \frac{z dz}{s},$$

où, d'après la notation de M. WEIERSTRASS, nous appelons  $|u|$  le module de la quantité imaginaire  $u$ . On trouve de même, pour le module de  $\phi'(m, n)$

$$|\phi'(m, n)| \leq \int_0^1 \frac{dz}{s}.$$

Cette remarque permet de voir comment convergent les séries que nous avons obtenues.

***Sur un cas particulier dans lequel certains coefficients des séries précédentes se présentent sous forme indéterminée.***

Dans la détermination des coefficients  $P_{m,n}$  et  $Q_{m,n}$  nous avons supposé que le dénominateur de ces coefficients

$$1 - r^{2m} q^{2n}$$

est *différent de zéro*. Ce dénominateur est toujours nul pour  $m = n = 0$ ; aussi faut-il, comme nous l'avons vu, calculer à part les coefficients  $P_{0,0}$  et  $Q_{0,0}$ . Mais, si l'on ne se trouve pas dans un cas de réduction des fonctions  $\theta$  de deux variables à des fonctions  $\theta$  d'une variable, ce dénominateur

$$1 - r^{2m} q^{2n}$$

ne sera nul que pour  $m = n = 0$ .

En effet, supposons-le nul pour  $m = m'$ ,  $n = n'$

$$r^{2m'} q^{2n'} = 1,$$

alors, comme on a posé  $r = e^{-2A}$ , on aura

$$e^{-4m'A + 2n' \log q} = 1,$$

d'où,  $A$  et  $\log q$  étant réels,

$$-4m'A + 2n' \log q = 0.$$

Dans ce cas, il y aurait donc *réduction* pour les fonctions  $\theta$  et les fonctions abéliennes correspondantes. J'en rappelle rapidement la raison. Les fonctions abéliennes précédentes de  $v$  et  $w$  admettent les couples de périodes suivants:

$$\text{pour } v: \log p, \quad -2A$$

$$\text{et pour } w: -2A, \quad \log q.$$

En appelant  $F(v, w)$  une de ces fonctions, on aura donc

$$F(v + m \log p - 2nA, w - 2mA + n \log q) = F(v, w),$$

$m$  et  $n$  désignant des entiers quelconques. Si l'on fait, en particulier,  $m = m'$ ,  $n = n'$ , la quantité ajoutée à  $w$  devient nulle d'après l'hypothèse faite, et il vient

$$F(v + m' \log p - 2n'A, w) = F(v, w)$$

comme on a aussi

$$F(v + \pi i, w) = F(v, w);$$

on voit que la fonction abélienne  $F(v, w)$  est une fonction *doublement périodique* de  $v$  aux périodes  $m' \log p - 2n'A$  et  $\pi i$ . Il y a donc réduction, comme nous l'avons annoncé. La quantité

$$m' \log p - 2n'A$$

ne peut pas être nulle en même temps que

$$-2m'A + n' \log q,$$

car on aurait

$$4A^2 - \log p \cdot \log q = 0$$

et les séries de ROSENHAIN qui définissent les fonctions  $\varphi_{r,s}(v, w)$  seraient divergentes.

Supposons-nous placés dans un cas de réduction de ce genre, c'est à dire supposons

$$-2m'A + n' \log q = 0,$$

$m'$  et  $n'$  étant premiers entre eux. La quantité

$$r^{-m}q^{-n} - r^m q^n = r^{-m}q^{-n}(1 - r^{2m}q^{2n})$$

qui figure au dénominateur du coefficient  $P_{m,n}$  dans la série de la page 117, est nulle pour toutes les valeurs de  $m$  et  $n$  de la forme

$$m = \nu m', \quad n = \nu n', \quad (\nu = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty)$$

le numérateur

$$A_2 = \psi(m, n) + \psi(-m, -n)$$

est alors nul aussi et le coefficient  $P_{m,n}$  se présente sous une forme illusoire  $\frac{0}{0}$ , qu'il est aisé d'éviter, comme nous allons voir.

En effet, nous avons établi les relations suivantes, pages 110 et 112

$$\begin{aligned} -A_1(1 - r^{2m}q^{2n}) + r^{2m}q^{2n}C_2 &= 0, \\ -A_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n}C_2 &= 0, \\ -\mathcal{A}_1(1 - r^{2m}q^{2n}) - r^{2m}q^{2n}\mathcal{L} + r^{2m}q^{2n}\mathcal{C}_2 &= 0, \\ -\mathcal{A}_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n}\mathcal{C}_2 &= 0. \end{aligned}$$

Puisque nous supposons

$$1 - r^{2m}q^{2n} = 0$$

et que  $(1 - p^{2m}r^{2n})$  ne peut pas être nul en même temps, comme nous l'avons vu à la page précédente, ces relations donnent

$$C_2 = 0, \quad A_2 = 0, \quad \mathcal{C}_2 = \mathcal{L}, \quad \mathcal{A}_2 = \frac{\mathcal{L}p^m r^n}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}.$$

Le coefficient  $P_{m,n}$ , donné par la formule

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^m q^{-n} r^{n-m} (A_1 \mathcal{A}_2 - A_2 \mathcal{A}_1)$$

devient alors

$$P_{m,n} = (-1)^m \Delta p^{2m} q^{-n} r^{2n-m} \frac{A_1 \mathcal{L}}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

ou, d'après la valeur de  $\mathcal{L}$  (page 115)

$$\mathcal{L} = \frac{16\pi i}{k^2 \lambda^2 \mu^2} p^{-m} r^{-n} (mC - nC'),$$

$$P_{m,n} = (-1)^m \frac{16\pi i \Delta}{k^2 \lambda^2 \mu^2} (mC - nC') \frac{p^m q^{-n} r^{n-m} A_1}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}};$$

cette formule lève l'indétermination qui se présentait avec la première expression de  $P_{m,n}$ . La constante  $A_1$  est définie par l'intégrale

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)},$$

l'intégrale étant prise sur le contour  $L_1$  qui entoure les points  $\frac{1}{k^2}$ ,  $\frac{1}{\lambda^2}$  figuré à la page 111.

Si l'on pose

$$V_1(z) = V(z) - V\left(\frac{1}{k^2}\right) = \int_{\frac{1}{k^2}}^z \frac{B - Cz}{s} dz,$$

$$W_1(z) = W(z) - W\left(\frac{1}{k^2}\right) = - \int_{\frac{1}{k^2}}^z \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

en remarquant que

$$V\left(\frac{1}{k^2}\right) = -\frac{\pi i}{2} - \frac{1}{2} \log p - A, \quad W\left(\frac{1}{k^2}\right) = A + \frac{1}{2} \log q,$$

on obtient

$$A_1 = (-1)^m p^{-m} q^n r^{m-n} \int_{L_1} \frac{z dz}{s} e^{2mV_1(z) + 2nW_1(z)}.$$

Cette dernière intégrale peut s'écrire

$$\phi''(m, n) + \phi''(-m, -n)$$

si l'on pose

$$\phi''(m, n) = \int_{\frac{1}{k^2}}^{\frac{1}{\lambda^2}} \frac{z dz}{s} e^{2m V_1(z) + 2n W_1(z)},$$

l'intégrale étant *rectiligne*: c'est ce qu'on voit comme nous l'avons fait aux pages 116 et 117 pour une intégrale analogue. On aura donc enfin

$$P_{m,n} = \frac{16\pi i \Delta}{k^2 \lambda^2 \mu^2} (mC - nC') \frac{\phi''(m, n) + \phi''(-m, -n)}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}.$$

Il serait d'ailleurs aisé de voir que cette formule convient pour toutes les valeurs de  $m$  et  $n$ ; de sorte qu'on a deux formules pour développer

$$\frac{\varphi_{1,0}^2(v, w)}{\varphi_{0,0}^2(v, w)}$$

suivant qu'on prend l'ancienne expression de  $P_{m,n}$  où celle que nous venons d'obtenir. Ces deux développements se reconnaissent immédiatement comme équivalents à cause de la relation

$$\frac{A_2}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n} = p^m q^{-n} r^{n-m} \frac{A_1}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

qui se déduit des relations (44) de la page 110 par l'élimination de  $C_2$ : puisqu'on a

$$A_2 = \phi(m, n) + \phi(-m, -n),$$

$$A_1 = (-1)^m p^{-m} q^n r^{-n+m} [\phi''(m, n) + \phi''(-m, -n)],$$

on aura la relation

$$(-1)^m \frac{\phi(m, n) + \phi(-m, -n)}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n} = \frac{\phi''(m, n) + \phi''(-m, -n)}{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}$$

qui montre l'équivalence des deux développements et permet de lever l'indétermination chaque fois qu'elle se présente.

On pourrait faire les mêmes remarques sur le coefficient  $Q_{m,n}$ .

Mais nous laissons cette question de côté pour revenir au développement en séries trigonométriques de fonctions abéliennes autres que celles que nous venons de considérer et qui se ramènent à  $z_1 z_2$  et  $z_1 + z_2$ .

**Développement d'une fonction de  $v$  et  $w$  symétrique et entière  
en  $z_1$  et  $z_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$ .**

Une fonction symétrique et entière en  $z_1$  et  $z_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$  est une somme de termes de l'une des trois formes suivantes

$$z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu, \quad s_1 z_1^\nu z_2^\rho + s_2 z_1^\rho z_2^\nu, \quad s_1 s_2 (z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu),$$

les exposants  $\nu$  et  $\rho$  étant des entiers positifs ou nuls. Il suffira donc de développer en série chacune de ces trois expressions.

Appellons  $f(z_1, z_2)$  l'une de ces expressions et soit

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} R_{m,n} e^{-2m\nu-2nw},$$

développement valable pour des valeurs purement imaginaires de  $v$  et  $w$  et des valeurs voisines. On verra, d'après la même méthode que ci-dessus, que le coefficient  $R_{m,n}$  est donné par l'intégrale double

$$2) \quad R_{m,n} = (-1)^m \frac{BC' - CB'}{\pi^2} p^m q^{-n} r^{n-m} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{f(z_1, z_2)(z_1 - z_2)}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1) + V(z_2)] + 2n[W(z_1) + W(z_2)]} dz_1 dz_2$$

obtenue en remplaçant, dans l'intégrale de la page 104,  $z_1 z_2$  par  $-\frac{1}{k\lambda\mu} f(z_1, z_2)$ .

Les indices  $L_1$  et  $L_2$  signifient, comme plus haut, que l'intégrale est étendue aux valeurs réelles de  $z_1$  et  $z_2$  représentées par les contours  $L_1$  et  $L_2$  supposés infiniment voisins de l'axe  $Ox$ . Désignons par  $E(z)$  l'exponentielle

$$E(z) = e^{2mV(z) + 2nW(z)};$$

alors en supposant

$$f(z_1, z_2) = z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu,$$

nous serons ramenés à calculer l'expression

$$\int_{L_1} \frac{z_1^{\nu+1}}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^\rho}{s_2} E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} \frac{z_1^\rho}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^{\nu+1}}{s_2} E(z_2) dz_2 \\ - \int_{L_1} \frac{z_1^\nu}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^{\rho+1}}{s_2} E(z_2) dz_2 + \int_{L_1} \frac{z_1^{\rho+1}}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^\nu}{s_2} E(z_2) dz_2,$$

formée d'intégrales simples.

De même en supposant

$$f(z_1, z_2) = s_1 z_1^\nu z_2^\rho + s_2 z_1^\rho z_2^\nu$$

nous aurons, pour calculer  $R_{m,n}$ , à calculer l'expression

$$\int_{L_1} z_1^{\nu+1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^\rho}{s_2} E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} \frac{z_1^\rho}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^{\nu+1} E(z_2) dz_2 \\ + \int_{L_1} \frac{z_1^{\rho+1}}{s_1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^\nu E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} z_1^\nu E(z_1) dz_1 \int_{L_2} \frac{z_2^{\rho+1}}{s_2} E(z_2) dz_2,$$

composée d'intégrales simples.

Enfin si nous supposons

$$f(z_1, z_2) = s_1 s_2 (z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu)$$

nous aurons à calculer l'expression

$$\int_{L_1} z_1^{\nu+1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^\rho E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} z_1^\rho E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^{\nu+1} E(z_2) dz_2 \\ + \int_{L_1} z_1^{\rho+1} E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^\nu E(z_2) dz_2 - \int_{L_1} z_1^\nu E(z_1) dz_1 \int_{L_2} z_2^{\rho+1} E(z_2) dz_2,$$

formée d'intégrales simples.

Si l'on considère l'intégrale de fonction à multiplicateurs

$$\phi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu dz}{s} E(z), \quad \nu \geq 0,$$

les constantes

$$A_{1,\nu} = \int_{L_1} \frac{z_1^\nu dz_1}{s_1} E(z_1), \quad A_{2,\nu} = \int_{L_2} \frac{z_2^\nu dz_2}{s_2} E(z_2)$$

sont les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures  $a_1$  et  $a_2$ ; de même, les constantes

$$A'_{1,\nu} = \int_{L_1} z_1^\nu E(z_1) dz_1, \quad A'_{2,\nu} = \int_{L_2} z_2^\nu E(z_2) dz_2$$

sont les modules de périodicité relatifs aux coupures  $a_1$  et  $a_2$  de l'intégrale de fonction à multiplicateurs

$$\varphi_\nu(z) = \int z^\nu E(z) dz. \quad (\nu \geq 0)$$

Ces fonctions à multiplicateurs

$$\frac{z^\nu}{s} E(z), \quad z^\nu E(z)$$

ont d'ailleurs les mêmes multiplicateurs que l'exponentielle  $E(z)$ , c'est à dire les multiplicateurs

$$m_1, m_2, n_1, n_2$$

définis précédemment (page 108)

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \quad n_2 = p^{2m} r^{2n}.$$

On voit que le calcul des coefficients  $R_{m,n}$  se ramène au calcul de déterminants de l'une des trois formes suivantes

$$A_{1,\nu} A_{2,\rho} - A_{1,\rho} A_{2,\nu}, \quad A_{1,\nu} A'_{2,\rho} - A_{2,\nu} A'_{1,\rho}, \quad A'_{1,\nu} A'_{2,\rho} - A'_{1,\rho} A'_{2,\nu}$$

où  $\nu \geq 0, \rho \geq 0$ .

Toutes ces intégrales

$$\psi_\nu = \int \frac{z^\nu}{s} E(z) dz, \quad \varphi_\nu = \int z^\nu E(z) dz$$

où

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

se ramènent à trois d'entre elles. En effet faisons, pour abrégér,

$$E(z) = e^{2mV(z)+2nW(z)} = e^{\int \frac{M+Nz}{s} dz}$$

avec

$$M = 2(mB - nB'), \quad N = -2(mC - nC').$$

L'identité

$$dE(z) = M \frac{E(z)}{s} dz + N \frac{z}{s} E(z) dz$$

donne par l'intégration

$$(53) \quad E(z) = M\phi_0 + N\phi_1$$

ce qui ramène le calcul de  $\phi_0$  à celui de  $\phi_1$ .

Puis l'identité

$$dz^\nu E(z) = \nu z^{\nu-1} E(z) dz + M \frac{z^\nu}{s} E(z) dz + N \frac{z^{\nu+1}}{s} E(z) dz$$

où  $\nu \geq 1$  donne par l'intégration

$$(54) \quad z^\nu E(z) = \nu \varphi_{\nu-1} + M\phi_\nu + N\phi_{\nu+1},$$

formule qui ramène le calcul des fonctions

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$$

à celui des fonctions

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3, \dots$$

D'autre part, soit

$$s^2 = z(1-z)(1-k^2z)(1-\lambda^2z)(1-\mu^2z) = 2\alpha_0 z^5 + \alpha_1 z^4 + 2\alpha_2 z^3 + \alpha_3 z^2 + 2\alpha_4 z$$

d'où

$$\frac{ds}{dz} = \frac{5\alpha_0 z^4 + 2\alpha_1 z^3 + 3\alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4}{s};$$

la différentiation de l'expression  $sz^\nu E(z)$  donne

$$d[sz^\nu E(z)] = z^\nu \frac{ds}{dz} E(z) dz + \nu s z^{\nu-1} E(z) dz + s z^\nu (M + Nz) \frac{dz}{s} E(z)$$

ou en réduisant

$$\begin{aligned} & d[sz^\nu E(z)] \\ = & \frac{(2\nu + 5)\alpha_0 z^{\nu+4} + (\nu + 2)\alpha_1 z^{\nu+3} + (2\nu + 3)\alpha_2 z^{\nu+2} + (\nu + 1)\alpha_3 z^{\nu+1} + (2\nu + 1)\alpha_4 z^\nu}{s} E(z) dz \\ & + Mz^\nu E(z) dz + Nz^{\nu+1} E(z) dz. \end{aligned}$$

L'intégration de cette identité donne:

$$(55) \quad \begin{aligned} sz^\nu E(z) = & (2\nu + 5)\alpha_0 \psi_{\nu+4} + (\nu + 2)\alpha_1 \psi_{\nu+3} + (2\nu + 3)\alpha_2 \psi_{\nu+2} \\ & + (\nu + 1)\alpha_3 \psi_{\nu+1} + (2\nu + 1)\alpha_4 \psi_\nu + M\varphi_\nu + N\varphi_{\nu+1}; \end{aligned}$$

remplaçons, dans cette relation,  $\varphi_\nu$  et  $\varphi_{\nu+1}$  par leurs expressions déduites de la relation (54) de la page précédente dans laquelle on changerait successivement  $\nu$  en  $\nu + 1$  et  $\nu + 2$ :

$$\begin{aligned} \varphi_\nu &= \frac{z^{\nu+1} E(z)}{\nu + 1} - \frac{M}{\nu + 1} \psi_{\nu+1} - \frac{N}{\nu + 1} \psi_{\nu+2}, \\ \varphi_{\nu+1} &= \frac{z^{\nu+2} E(z)}{\nu + 2} - \frac{M}{\nu + 2} \psi_{\nu+2} - \frac{N}{\nu + 2} \psi_{\nu+3}. \end{aligned}$$

Nous aurons

$$(56) \quad \begin{aligned} \left( sz^\nu - \frac{M}{\nu + 1} z^{\nu+1} - \frac{N}{\nu + 2} z^{\nu+2} \right) E(z) = & (2\nu + 5)\alpha_0 \psi_{\nu+4} \\ & + \left[ (\nu + 2)\alpha_1 - \frac{N^2}{\nu + 2} \right] \psi_{\nu+3} + \left[ (2\nu + 3)\alpha_2 - \frac{MN}{\nu + 1} - \frac{MN}{\nu + 2} \right] \psi_{\nu+2} \\ & + \left[ (\nu + 1)\alpha_3 - \frac{M^2}{\nu + 1} \right] \psi_{\nu+1} + (2\nu + 1)\alpha_4 \psi_\nu, \end{aligned}$$

relation exprimant l'intégrale  $\psi_{\nu+4}$  en fonction des quatre précédentes  $\psi_{\nu+3}$ ,  $\psi_{\nu+2}$ ,  $\psi_{\nu+1}$ ,  $\psi_\nu$ . En faisant successivement dans cette relation

$$\nu = 0, 1, 2, \dots$$

on exprimera toutes les fonctions  $\psi_\nu$  à l'aide des quatre premières

$$\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3;$$

et comme  $\psi_0$  et  $\psi_1$  sont liés par une relation établie précédemment, (re-

lation (53) de la page 131), ou pourra exprimer toutes les fonctions  $\phi_\nu$  à l'aide des trois

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3.$$

Comme chaque fonction  $\varphi_\nu$  se ramène aux fonctions  $\phi_\nu$  par la formule (54) de la page 131, on voit que toutes les intégrales appelés  $\varphi_\nu$  et  $\phi_\nu$ , ( $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots, \infty$ ) s'expriment en fonction linéaire à coefficients constants de

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3$$

et de fonctions connues.

Ces fonctions connues sont de la forme

$$sz^\nu E(z), z^\nu E(z),$$

et leurs modules de périodicité sont nuls. Les modules de périodicité d'une quelconque des intégrales  $\varphi_\nu$  et  $\phi_\nu$  sont donc des fonctions linéaires homogènes des modules de périodicité correspondants des trois intégrales

$$\phi_1, \phi_2, \phi_3.$$

Par exemple

$$A_{1,\nu} = aA_{1,1} + a'A_{1,2} + a''A_{1,3},$$

$$A_{2,\nu} = aA_{2,1} + a'A_{2,2} + a''A_{2,3},$$

$$A_{1,\rho} = bA_{1,1} + b'A_{1,2} + b''A_{1,3},$$

$$A_{2,\rho} = bA_{2,1} + b'A_{2,2} + b''A_{2,3}.$$

Donc

$$\begin{aligned} A_{1,\nu}A_{2,\rho} - A_{2,\nu}A_{1,\rho} &= (ab' - ba')(A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}), \\ &+ (ab'' - ba'')(A_{1,1}A_{2,3} - A_{2,1}A_{1,3}), \\ &+ (a'b'' - b'a'')(A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}). \end{aligned}$$

Le calcul du déterminant

$$A_{1,\nu}A_{2,\rho} - A_{2,\nu}A_{1,\rho}$$

se trouve ainsi ramené, quels que soient les entiers  $\nu$  et  $\rho$ , à celui des trois déterminants

$$(57) \quad A_{1,1}A_{2,2} - A_{2,1}A_{1,2}, \quad A_{1,1}A_{2,3} - A_{2,1}A_{1,3}, \quad A_{1,2}A_{2,3} - A_{2,2}A_{1,3}.$$

Il en sera de même des déterminants tels que

$$\begin{aligned} A_{1,\nu} A'_{2,\rho} - A_{2,\nu} A'_{1,\rho}, \\ A'_{1,\nu} A'_{2,\rho} - A'_{2,\nu} A'_{1,\rho} \end{aligned}$$

qui peuvent aussi figurer dans l'expression de  $R_{m,n}$ . (Voyez page 130).

On sera donc toujours ramené, par voie récurrente, au calcul des trois déterminants (57) de la page précédente.

Or le premier de ces trois déterminants n'est autre chose que celui qui a été désigné à la page 106 par

$$A_1 \mathcal{A}_2 - A_2 \mathcal{A}_1;$$

en effet on a

$$A_1 = A_{1,1}, \quad A_2 = A_{1,2}, \quad \mathcal{A}_1 = A_{2,1}, \quad \mathcal{A}_2 = A_{2,2};$$

ce déterminant à été calculé et exprimé à l'aide de l'intégrale définie rectiligne

$$\phi(m, n) = \int_0^1 \frac{z dz}{s} E(s).$$

Le second des déterminants (57)

$$A_{1,1} A_{2,3} - A_{2,1} A_{1,3}$$

peut, par les mêmes méthodes, être exprimé à l'aide de la même intégrale définie rectiligne  $\phi(m, n)$ .

Enfin le troisième de ces déterminants

$$A_{1,2} A_{2,3} - A_{2,2} A_{1,3}$$

exige pour son expression deux nouvelles intégrales rectilignes analogues à  $\phi(m, n)$

$$\chi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{s} E(z), \quad \bar{\omega}(m, n) = \int_0^1 \frac{z^3 dz}{s} E(z).$$

En effet les deux intégrales

$$\phi_2(z) = \int \frac{z^2 dz}{s} E(z), \quad \phi_3(z) = \int \frac{z^3 dz}{s} E(z)$$

dont la première n'est autre chose que l'intégrale appelée précédemment  $\bar{\omega}(z)$  (pages 110 et suivantes)

$$\bar{\omega}(z) = \int \frac{z^2 dz}{s} E(z)$$

sont des intégrales de troisième espèce de fonctions aux multiplicateurs

$$m_1 = 1, \quad m_2 = 1, \quad n_1 = r^{2m} q^{2n}, \quad n_2 = p^{2m} r^{2n};$$

ces intégrales ont pour point critique logarithmique le point  $\infty$ . Elles sont uniformes sur la surface de Riemann  $R_{abcd}$  figurée à la page 111. Appelons  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  les modules de périodicité de ces intégrales  $\psi_2$  et  $\psi_3$  le long de la coupure  $l$ ; nous avons calculé  $\mathcal{L}$  précédemment aux pages 113—115; en suivant la même méthode on aura  $\mathcal{L}'$ . Le développement que nous avons établi à la page 114

$$\frac{z^2}{s} E(z) = \frac{p^{-m} r^{-n}}{k\lambda\mu} \left[ \frac{1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{\delta_0}{z} + \frac{\delta_1}{z^{\frac{3}{2}}} + \frac{\delta_2}{z^2} + \dots \right]$$

donne immédiatement

$$\frac{z^2}{s} E(z) = \frac{p^{-m} r^{-n}}{k\lambda\mu} \left[ z^{\frac{1}{2}} + \delta_0 + \frac{\delta_1}{z^{\frac{1}{2}}} + \frac{\delta_2}{z} + \dots \right];$$

alors

$$\mathcal{L}' = 4\pi i \frac{p^{-m} r^{-n}}{k\lambda\mu} \delta_2.$$

Nous avons établi les deux relations suivantes entre les modules de périodicité  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{L}$  de l'intégrale  $\psi_2(z)$  ou  $\bar{\omega}(z)$ , modules que nous appelons ici, pour plus de symétrie dans les formules,  $A_{1,2}, A_{2,2}, C_{2,2}, \mathcal{L}$  (voyez page 112)

$$A_{1,2} = \frac{n_1 C_{2,2} - n_1 \mathcal{L}}{1 - n_1}, \quad A_{2,2} = -\frac{n_2 C_{2,2}}{1 - n_2}.$$

On aura de même, en appelant

$$A_{1,3}, A_{2,3}, C_{2,3}, \mathcal{L}'$$

les modules de périodicité de  $\phi_3(z)$

$$A_{1,3} = \frac{n_1 C_{2,3} - n_1 \mathcal{L}'}{1 - n_1}, \quad A_{2,3} = -\frac{n_2 C_{2,3}}{1 - n_2}.$$

D'où l'on tire

$$A_{1,2} A_{2,3} - A_{2,2} A_{1,3} = \frac{n_1 n_2}{(1 - n_1)(1 - n_2)} (\mathcal{L} C_{2,3} - \mathcal{L}' C_{2,2})$$

ou encore

$$A_{1,2} A_{2,3} - A_{2,2} A_{1,3} = \frac{n_1}{1 - n_1} A_{2,2} \mathcal{L}' - \frac{n_2}{1 - n_2} A_{2,3} \mathcal{L}.$$

Le calcul du troisième des déterminants (57) est ainsi ramené au calcul des deux modules de périodicité

$$A_{2,2} = \int_{L_2} \frac{z^2 dz}{s} E(z), \quad A_{2,3} = \int_{L_2} \frac{z^3 dz}{s} E(z).$$

Si l'on pose

$$\chi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{s} E(z), \quad \bar{\omega}(m, n) = \int_0^1 \frac{z^3 dz}{s} E(z),$$

les intégrales étant rectilignes, on voit, comme aux pages 115—117, que l'on a

$$A_{2,2} = \chi(m, n) + \chi(-m, -n), \quad A_{2,3} = \bar{\omega}(m, n) + \bar{\omega}(-m, -n).$$

*En résumé, le calcul des coefficients des développements en série trigonométrique d'une fonction abélienne exprimée par une fonction symétrique entière de  $z_1$  et  $z_2$ ,  $s_1$  et  $s_2$ , se ramène toujours par des opérations algébriques élémentaires au calcul des trois intégrales définies rectilignes*

$$\phi(m, n) = \int_0^1 \frac{z dz}{s} E(z), \quad \chi(m, n) = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{s} E(z), \quad \bar{\omega}(m, n) = \int_0^1 \frac{z^3 dz}{s} E(z)$$

où

$$E(z) = e^{2mV(z) + 2nW(z)}.$$

Il serait, par exemple, bien facile d'appliquer cette méthode générale au développement de  $s_1 s_2$  ou de  $s_1 + s_2$ .

On peut, par les mêmes méthodes, calculer les coefficients des développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes de l'une des deux formes

$$R(s_1, z_1)R(s_2, z_2), R(s_1, z_1) + R(s_2, z_2),$$

$R(s, z)$  désignant une fonction rationnelle de  $s$  et  $z$ . Pour que ces développements soient convergents comme les précédents, il faut et il suffit que  $R(s, z)$  reste finie quand  $z$  varie par valeurs réelles de 0 à 1 et de  $\frac{1}{k^2}$  à  $\frac{1}{\lambda^2}$ .

*Développements de fonctions non symétriques en  $z_1, s_1$  et  $z_2, s_2$ .*

Les méthodes que nous avons appliquées au développement des fonctions abéliennes en séries trigonométriques procédant suivant les puissances de  $e^{2v}$  et  $e^{2w}$ , peuvent, dans certains cas, donner les coefficients du développement en séries trigonométriques de fonctions *non-symétriques* en  $z_1, s_1$  et  $z_2, s_2$ , fonctions qui s'expriment par des *racines carrées* de fonctions abéliennes.

Prenons, par exemple, la fonction

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} z_1 z_2,$$

où nous supposons  $z_2$  réel et compris entre 0 et 1,  $z_1$  réel et compris entre  $\frac{1}{k^2}$  et  $\frac{1}{\lambda^2}$ . Cette fonction s'exprime par une racine carrée de fonctions abéliennes, car

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} = \frac{k\lambda\mu}{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2}},$$

la racine étant prise positivement. Nous avons vu que, si les variables  $v$  et  $w$  partent de valeurs *purement imaginaires*  $v_0$  et  $w_0$  et varient par valeurs purement imaginaires de  $v_0$  et  $w_0$  à  $v_0 + \pi i$ ,  $w_0 + \pi i$ , les variables  $z_2$  et  $z_1$  oscillent sur l'axe des quantités réelles la première  $z_2$  entre 0 et 1, la seconde  $z_1$  entre  $\frac{1}{k^2}$  et  $\frac{1}{\lambda^2}$  de façon à décrire les lacets appelés

$L_2$  et  $L_1$ . (Page 100.) Lorsque  $v$  et  $w$  varient ainsi de  $v_0$  et  $w_0$  à  $v_0 + \pi i$  et  $w_0 + \pi i$ , la fonction

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} z_1 z_2$$

est donc uniforme, finie et continue. Elle est pour ces valeurs *purement imaginaires* de  $v$  et  $w$  développable en une série de la forme

$$-\frac{k\lambda\mu}{z_2 - z_1} z_1 z_2 = \sum_{m,n=-\infty}^{m,n=+\infty} S_{m,n} e^{-2mv - 2nw}$$

avec

$$S_{m,n} = \frac{k\lambda\mu}{\pi^2} \int_{v_0}^{v_0 + \pi i} dv \int_{w_0}^{w_0 + \pi i} \frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1} e^{2mv + 2nw} dw.$$

En faisant, dans cette intégrale double, le changement de variables défini par les équations d'inversion de JACOBI

$$v = V(z_1) + V(z_2) - V\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad w = W(z_1) + W(z_2) - W\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

on trouve, comme pour  $P_{m,n}$  (pages 102—104),

$$S_{m,n} = \Delta e^{-2mV\left(\frac{1}{k^2}\right) - 2nW\left(\frac{1}{k^2}\right)} \int_{L_1} \int_{L_2} \frac{z_1 z_2 dz_1 dz_2}{s_1 s_2} e^{2m[V(z_1) + V(z_2)] + 2n[W(z_1) + W(z_2)]},$$

formule qui se déduit de la formule (42) de la page 104 en y remplaçant  $z_1 z_2$  par  $\frac{z_1 z_2}{z_2 - z_1}$ . L'on aura donc, d'après les valeurs des intégrales  $V\left(\frac{1}{k^2}\right)$  et  $W\left(\frac{1}{k^2}\right)$ ,

$$S_{m,n} = (-1)^m k\lambda\mu \frac{BC' - CB'}{\pi^2} p^m q^{-n} r^{n-m} A_1 A_2,$$

où  $A_1$  et  $A_2$  désignent comme précédemment (pages 106 et suivantes) les intégrales

$$A_1 = \int_{L_1} \frac{z_1 dz_1}{s_1} e^{2mV(z_1) + 2nW(z_1)}, \quad A_2 = \int_{L_2} \frac{z_2 dz_2}{s_2} e^{2mV(z_2) + 2nW(z_2)},$$

dont les valeurs sont liées par les relations (44) de la page 110 :

$$\begin{aligned} -A_1(1 - r^{2m}q^{2n}) + r^{2m}q^{2n}C_2 &= 0, \\ -A_2(1 - p^{2m}r^{2n}) - p^{2m}r^{2n}C_2 &= 0, \end{aligned}$$

qui donnent par l'élimination de  $C_2$

$$A_1 = -q^n p^{-m} r^{m-n} \frac{p^{-m} r^{-n} - p^m r^n}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n} A_2.$$

On a donc

$$S_{m,n} = (-1)^m k \lambda \mu \frac{BC' - CB'}{\pi^2} \cdot \frac{p^m r^n - p^{-m} r^{-n}}{r^{-m} q^{-n} - r^m q^n} A_2^2,$$

et comme

$$A_2 = \phi(m, n) + \phi(-m, -n),$$

on voit que le coefficient  $S_{m,n}$  est encore exprimé à l'aide de l'intégrale définie appelée  $\phi(m, n)$ .

On trouverait de même les développements de fonctions de la forme

$$\frac{f(s_1, z_1; s_2, z_2)}{z_2 - z_1}$$

où le numérateur  $f(s_1, z_1; s_2, z_2)$  désigne une fonction symétrique entière de  $s_1, z_1$  et  $s_2, z_2$ .

Sans insister davantage sur ces développements, j'arrive à une autre question intéressante, à savoir celle de l'inversion d'une intégrale ultra-elliptique,  $\frac{1}{2} V(z)$  par exemple, pour des valeurs réelles de  $z$  et de l'intégrale.

**Les intégrales définies appelées  $\phi(m, n)$ ,  $\chi(m, n)$ ,  $\bar{\omega}(m, n)$  se présentent dans une autre espèce de problèmes qui se posent souvent en mécanique rationnelle.**

Soit, pour fixer les idées, la relation

$$(58) \quad t = \frac{1}{i} \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

où  $B$  et  $C$  sont les mêmes constantes purement imaginaires que précédemment et où  $s$  est lié à  $z$  par la même relation que ci-dessus

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2 z)(1 - \lambda^2 z)(1 - \mu^2 z).$$

Supposons que  $t$  désigne le *temps* et  $z$  une *variable réelle* servant à fixer la position d'un mobile au temp  $t$ . Alors les variables  $z$  et  $t$  doivent rester réelles, et  $t$  aller toujours en croissant.

Dans ces conditions, comme  $\frac{B}{i}$  et  $\frac{C}{i}$  sont des constantes réelles positives

$$\frac{B}{i} > \frac{C}{i},$$

$z$  croîtra de 0 à 1, le radical

$$s = \sqrt{(zk\lambda\mu)}$$

étant pris positivement; puis  $z$  décroîtra de 1 à 0, le même radical  $s$  étant pris négativement; puis  $z$  croîtra de nouveau de 0 à 1,  $s$  étant positif; et ainsi de suite indéfiniment. Nous avons vu (page 90) que l'on a

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{i} \int_0^1 \frac{B - Cz}{s} dz;$$

d'après cela, si dans la relation (58) de la page précédente

$$(58) \quad t = \frac{1}{i} \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

on veut prendre le temps  $t$  comme variable *indépendante* et la variable réelle  $z$  comme fonction de  $t$ , on voit que  $z$  est une fonction réelle de  $t$  admettant la période  $\pi$  et restant finie (comprise entre 0 et 1) pour toutes les valeurs du temps  $t$ . On pourra donc développer  $z$  en série trigonométrique de la forme

$$z = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} p_n e^{-2mti}$$

*convergente* pour toutes les valeurs réelles de  $t$ . La connaissance des coefficients de ce développement permettrait donc de réaliser, à ce point de vue spécial, l'*inversion* de l'intégrale (58). Le coefficient  $p_m$  est donné par l'intégrale définie

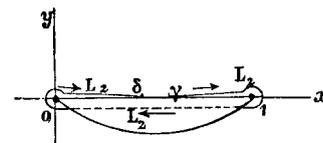
$$p_m = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_0 + \pi} z e^{2mt} dt,$$

ou, en faisant, dans cette intégrale, le changement de variable

$$t = \frac{1}{i} \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz = \frac{1}{i} V(z),$$

$$p_m = \frac{1}{i\pi} \int_{L_2} \frac{(B - Cz)z dz}{s} e^{2mV(z)},$$

l'indice  $L_2$  signifiant comme précédemment (page 101 et figure de la page 100) que le point  $z$  décrit un chemin formé de la portion  $\gamma 1$  de l'axe  $Ox$  dans le feuillet supérieur ( $s > 0$ ), de la portion  $1, 0$  du même axe dans le feuillet inférieur ( $s < 0$ ), enfin de la portion  $0\delta$  du même axe dans le feuillet supérieur ( $s > 0$ );  $\delta$  étant infiniment voisin de  $\gamma$ . Pour pouvoir figurer ce chemin  $L_2$ , nous l'avons représenté non comme confondu avec le segment  $01$  (ce qu'il est en réalité), mais comme infiniment rapproché de ce segment.



Nous avons vu précédemment que l'on a

$$\int_{L_2} \frac{z dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)} = \phi(m, n) + \phi(-m, -n),$$

$$\int_{L_2} \frac{z^2 dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)} = \chi(m, n) + \chi(-m, -n).$$

On aura donc, pour déterminer  $p_m$ , l'équation

$$p_m = \frac{B}{\pi i} [\phi(m, 0) + \phi(-m, 0)] - \frac{C}{\pi i} [\chi(m, 0) + \chi(-m, 0)],$$

où

$$\phi(m, \circ) = \int_0^1 \frac{z dz}{s} e^{2mV(z)},$$

$$\chi(m, \circ) = \int_0^1 \frac{z^2 dz}{s} e^{2mV(z)}.$$

On est donc bien ramené, pour calculer  $p_m$ , aux mêmes intégrales que pour développer les fonctions abéliennes précédentes en séries trigonométriques.

On verra de même que si l'on veut développer non seulement  $z$  mais  $z^\nu$  ou bien  $sz^\nu$  ( $\nu$  entier positif) en série trigonométrique ordonnée par rapport aux puissances de  $e^{2u}$ , le calcul des coefficients se ramène à celui des trois intégrales

$$\phi(m, \circ), \chi(m, \circ), \bar{\omega}(m, \circ)$$

en vertu des formules de réduction des pages 131 et suivantes.

On arrive donc à cette conclusion remarquable que, si l'on sait développer en séries trigonométriques les fonctions abéliennes

$$z_1^\nu z_2^\rho + z_1^\rho z_2^\nu,$$

on sait en même temps faire l'inversion de l'intégrale ultraelliptique

$$t = \frac{1}{i} \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz$$

$z$  et  $t$  réels) et développer

$$z, z^2, \dots, z^\nu, \dots, s, sz, sz^2, \dots, sz^\nu, \dots$$

en séries trigonométriques procédant suivant les puissances de  $e^{2u}$ .

Ces résultats s'étendraient sans peine à l'inversion d'une intégrale ultraelliptique de la forme plus générale

$$t = \frac{\nu}{i} \int_0^z \frac{B - Cz}{s} dz + \frac{\rho}{i} \int_0^z \frac{B' - C'z}{s} dz,$$

$\nu$  et  $\rho$  étant des entiers tels que l'expression

$$\nu(B - Cz) + \rho(B' - C'z)$$

ne s'annule pas entre 0 et 1.

**Les intégrales  $\phi(m, n)$ ,  $\chi(m, n)$ ,  $\bar{\omega}(m, n)$  comprennent comme cas très-particuliers les fonctions de Bessel.**

Dans les calculs précédents (pages 131 et suivantes) relatifs à la réduction des intégrales de la forme

$$\phi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)}, \quad \varphi_\nu(z) = \int z^\nu dz e^{2mV(z) + 2nW(z)}$$

où  $\nu$  est un entier positif ou nul, à trois d'entre elles  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , nous avons supposé  $m$  et  $n$  entiers, d'après la nature de la question qu'il s'agissait de résoudre. Les formules de réduction que nous avons établies sont les mêmes lorsque  $m$  et  $n$  ne sont plus des nombres entiers, mais désignent des constantes quelconques.

On en conclut que, quels que soient  $m$  et  $n$ , entiers ou non, les intégrales définies

$$\int_0^1 \frac{z^\nu dz}{s} e^{2mV(z) + 2nW(z)}, \quad \int_0^1 z^\nu dz e^{2mV(z) + 2nW(z)}$$

se ramènent aux trois que nous avons appelées

$$\phi(m, n), \chi(m, n), \bar{\omega}(m, n).$$

Ces dernières intégrales sont des fonctions de  $m$  et  $n$  qui comprennent comme cas limites les fonctions de BESSEL.

Par exemple  $m$  et  $n$  étant quelconques, l'expression

$$2mV(z) + 2nW(z)$$

est de la forme

$$\int_0^z \frac{\alpha + \beta z}{s} dz$$

$\alpha$  et  $\beta$  désignant des constantes arbitraires linéaires et homogènes en  $m$  et  $n$ . L'intégrale  $\phi(m, n)$  devient alors

$$\int_0^1 \frac{z dz}{s} e^{\int_0^z \frac{\alpha + \beta z}{s} dz}$$

où

$$s^2 = z(1 - z)(1 - k^2 z)(1 - \lambda^2 z)(1 - \mu^2 z).$$

Supposons, comme cas limite,

$$k = \lambda = \mu = 0, \quad s^2 = z(1 - z);$$

l'intégrale ci-dessus où l'on fait

$$z = \sin^2 \varphi, \quad s = \sin \varphi \cos \varphi, \quad \frac{dz}{s} = 2 d\varphi$$

prend la forme

$$2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi \cdot e^{(2\alpha + \beta)\varphi - \frac{\beta}{2} \sin^2 \varphi},$$

intégrale qui dans l'hypothèse

$$2\alpha + \beta = \nu i, \quad (\nu \text{ entier})$$

se ramène immédiatement à des fonctions de BESSEL de la variable  $\frac{\beta}{2}$ .

(Voyez, par exemple, le Traité de TODHUNTER: *On Laplace's, Lamé's and Bessel's Functions* (pages 287 et suivantes).

La méthode employée dans le chapitre précédent s'applique aux fonctions abéliennes les plus générales. Dans un supplément, nous montrons en particulier comment cette méthode s'étend aux fonctions abéliennes qui naissent de l'inversion d'intégrales hyperelliptiques d'un genre quelconque. Puis nous indiquons comment nos recherches sur les intégrales de fonctions à multiplicateurs peuvent être étendues à l'étude de l'intégrale générale d'une classe importante d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.

---