Supplément.

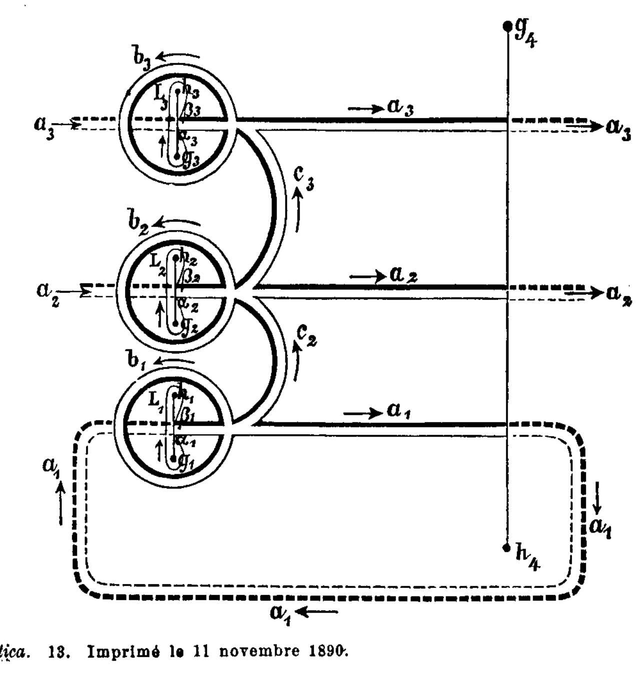
Développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes résultant de l'inversion d'intégrales hyperelliptiques.

La méthode que nous avons suivie dans le premier cahier, pour calculer les coefficients des développements en séries trigonométriques de fonctions abéliennes résultant de l'inversion d'intégrales ultraelliptiques, peut être étendue à des intégrales hyperelliptiques dont le genre p est quelconque.

C'est ce que nous allons montrer en supposant, pour simplifier, $p = 3$ et en partant de la relation algébrique

$$s^2 = (g_1 - z)(h_1 - z)(g_2 - z)(h_2 - z)(g_3 - z)(h_3 - z)(g_4 - z)(h_4 - z)$$

où $g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, g_4, h_4$ désignent des constantes inégales. La surface R_{abc} de Riemann correspondant à cette relation se trouve figurée dans l'Ouvrage de C. Neumann (loc. cit. page 179); nous la reproduisons ici en donnant aux coupures c_2 et c_3 la disposition particulière que nous sommes convenus d'adopter:



Soient alors

$$w_1(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_1 + q_1 z + r_1 z^2}{s} dz,$$

$$w_2(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_2 + q_2 z + r_2 z^2}{s} dz,$$

$$w_3(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_3 + q_3 z + r_3 z^2}{s} dz,$$

les intégrales abéliennes normales de première espèce relatives à cette surface de Riemann, $p_1, q_1, r_1, p_2, q_2, r_2, p_3, q_3, r_3$ étant des constantes convenables. Les modules de périodicité de ces intégrales sont (C. NEUMANN, page 246) donnés par le tableau suivant

Coupures →	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
$w_1(z)$	πi	o	o	b_{11}	b_{12}	b_{13}
$w_2(z)$	o	πi	o	b_{21}	b_{22}	b_{23}
$w_3(z)$	o	o	πi	b_{31}	b_{32}	b_{33}

avec

$$b_{jk} = b_{kj}.$$

Considérons les équations de JACOBI

$$\begin{aligned} u_1 &= w_1(z_1) + w_1(z_2) + w_1(z_3), \\ u_2 &= w_2(z_1) + w_2(z_2) + w_2(z_3), \\ u_3 &= w_3(z_1) + w_3(z_2) + w_3(z_3), \end{aligned} \tag{1}$$

définissant z_1, z_2, z_3 en fonction de u_1, u_2, u_3.

Appelons α_1 et β_1 les points où la droite $g_1 h_1$ rencontre les deux bords de la coupure a_1 (voyez page 145), α_2 et β_2 les points où la droite

g_2h_2 rencontre les deux bords de la coupure a_2, α_3 et β_3 les points où la droite g_3h_3 rencontre les deux bords de la coupure a_3. Alors, d'après les valeurs des modules de périodicité, on a

$$w_1(\beta_1) - w_1(\alpha_1) = \pi i, \quad w_2(\beta_1) - w_2(\alpha_1) = 0, \quad w_3(\beta_1) - w_3(\alpha_1) = 0,$$
$$w_1(\beta_2) - w_1(\alpha_2) = 0, \quad w_2(\beta_2) - w_2(\alpha_2) = \pi i, \quad w_3(\beta_2) - w_3(\alpha_2) = 0,$$
$$w_1(\beta_3) - w_1(\alpha_3) = 0, \quad w_2(\beta_3) - w_2(\alpha_3) = 0, \quad w_3(\beta_3) - w_3(\alpha_3) = \pi i.$$

Supposons que les variables z_1, z_2, z_3 partent respectivement des points $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et décrivent des contours L_1, L_2, L_3 aboutissant aux points $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, ces contours étant choises de telle façon que les différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0$$

varient par valeurs *purement imaginaires* de 0 à πi quand z_1, z_2, z_3 décrivent les contours L_1, L_2, L_3. Par exemple, dans le cas particulier où les constantes $g_1, h_1, g_2, h_2, g_3, h_3, g_4, h_4$ sont réelles, et rangées par ordre de grandeur, les contours L_1, L_2, L_3 sont infiniment voisins des segments de droites $\alpha_1 g_1, \alpha_2 g_2, \alpha_3 g_3$ dans le feuillet supérieur, g_1h_1, g_2h_2, g_3h_3 dans le feuillet inférieur, $h_1\beta_1, h_2\beta_2, h_3\beta_3$ dans le feuillet supérieur (voyez la figure de la page 145). C'est sur ce cas particulier que nous exposerons la méthode qui s'applique immédiatement au cas général, à condition que les contours L_1, L_2, L_3 ne se coupent pas.

Développement de la fonction abélienne $z_1z_2z_3$.

La fonction abélienne

$$z_1 z_2 z_3$$

est une fonction uniforme de u_1, u_2, u_3 aux périodes πi par rapport à chaque variable. Cette fonction sera pour les valeurs purement imaginaires des différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0$$

développable en une série trigonométrique de la forme:

$$z_1 z_2 z_3 = \sum P_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

où la sommation est étendue aux valeurs entières des indices $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ de $-\infty$ à $+\infty$. Le coefficient $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ est donné par la formule

$$(2) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{1}{(\pi i)^3} \int_{(u_1)_0}^{(u_1)_0+\pi i} du_1 \int_{(u_2)_0}^{(u_2)_0+\pi i} du_2 \int_{(u_3)_0}^{(u_3)_0+\pi i} du_3 \,.\, z_1 z_2 z_3 \,.\, e^{2\nu_1 u_1 + 2\nu_2 u_2 + 2\nu_3 u_3};$$

les différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0$$

prenant, dans l'intégrale triple, des valeurs purement imaginaires.

Suivant la méthode employée dans la troisième partie, faisons dans cette intégrale triple (2) le changement de variables défini par les équations de Jacobi

$$u_1 = w_1(z_1) + w_1(z_2) + w_1(z_3),$$
$$u_2 = w_2(z_1) + w_2(z_2) + w_2(z_3),$$
$$u_3 = w_3(z_1) + w_3(z_2) + w_3(z_3)$$

et prenons pour nouvelles variables z_1, z_2, z_3. Comme ce changement de variables se ramène immédiatement à un changement de variables réelles, puisque le long des contours L_1, L_2, L_3 les variables z_1, z_2, z_3 peuvent être regardées comme dépendant chacune d'une variable réelle, il suffit, d'après les régles élémentaires bien connues, de remplacer $du_1 du_2 du_3$ par

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)} dz_1 dz_2 dz_3,$$

la notation

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)}$$

désignant le déterminant fonctionnel

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial z_1} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z_2} & \dfrac{\partial u_1}{\partial z_3} \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial z_1} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_2} & \dfrac{\partial u_2}{\partial z_3} \\ \dfrac{\partial u_3}{\partial z_1} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z_2} & \dfrac{\partial u_3}{\partial z_3} \end{vmatrix}.$$

Comme nous avons posé

$$w_1(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_1 + q_1 z + r_1 z^2}{s} dz,$$

$$w_2(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_2 + q_2 z + r_2 z^2}{s} dz,$$

$$w_3(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{p_3 + q_3 z + r_3 z^2}{s} dz,$$

nous avons, en appelant s_1, s_2, s_3 les valeurs que prend s pour $z = z_1$, $z = z_2$, $z = z_3$,

$$\frac{D(u_1, u_2, u_3)}{D(z_1, z_2, z_3)} = \frac{1}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} p_1 + q_1 z_1 + r_1 z_1^2 & p_1 + q_1 z_2 + r_1 z_2^2 & p_1 + q_1 z_3 + r_1 z_3^2 \\ p_2 + q_2 z_1 + r_2 z_1^2 & p_2 + q_2 z_2 + r_2 z_2^2 & p_2 + q_2 z_3 + r_2 z_3^2 \\ p_3 + q_3 z_1 + r_3 z_1^2 & p_3 + q_3 z_2 + r_3 z_2^2 & p_3 + q_3 z_3 + r_3 z_3^2 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{\Delta}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{s_1 s_2 s_3} (z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1),$$

où Δ désigne une constante

$$\Delta = \begin{vmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Posons en outre

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)};$$

alors l'équation (2) qui donne $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ devient

$$P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int\limits_{L_1} dz_1 \int\limits_{L_2} dz_2 \int\limits_{L_3} \frac{z_1 z_2 z_3}{s_1 s_2 s_3} E(z_1) E(z_2) E(z_3) \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix} dz_3,$$

les indices L_1, L_2, L_3 dont sont affectés les signes d'intégration signifiant que les variables $z_1 z_2 z_3$ doivent prendre la suite des valeurs figurées par les contours L_1, L_2, L_3 définis à la page 147.

L'intégrale triple ainsi obtenue se décompose en intégrales simples. Nous pouvons l'écrire en faisant entrer les facteurs z_1, z_2, z_3 dans le déterminant

$$P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int\limits_{L_1} \int\limits_{L_2} \int\limits_{L_3} \frac{E(z_1) E(z_2) E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} z_1 & z_1^2 & z_1^3 \\ z_2 & z_2^2 & z_2^3 \\ z_3 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1 dz_2 dz_3.$$

Considérons les intégrales simples

$$A_{\nu 1} = \int\limits_{L_1} \frac{z_1^\nu E(z_1)}{s_1} dz_1,$$

$$A_{\nu 2} = \int\limits_{L_2} \frac{z_2^\nu E(z_2)}{s_2} dz_2,$$

$$A_{\nu 3} = \int\limits_{L_3} \frac{z_3^\nu E(z_3)}{s_3} dz_3$$

où ν *est un entier positif ou nul.* L'expression ci-dessus de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ deviendra

(3) $$P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}$$

et se trouvera ramenée à un déterminant de neuf intégrales simples; ce qui constitue la généralisation immédiate de la formule trouvée à propos des intégrales ultraelliptiques.

L'intégrale

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu E(z)}{s} dz$$

est une intégrale de fonction à multiplicateurs; et les constantes

$$A_{\nu 1}\,,\; A_{\nu 2}\,,\; A_{\nu 3}$$

sont les modules de périodicité de cette intégrale le long des coupures a_1, a_2, a_3.

En effet l'exponentielle

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)}$$

est uniforme sur la surface de Riemann R_{abc} figurée à la page 145. Les valeurs que prend cette exponentielle aux deux bords d'une coupure ne diffèrent que par un facteur constant qui se déduit immédiatement du tableau des modules de périodicité de $w_1(z), w_2(z), w_3(z)$. Appelons, comme dans la théorie génerale, m_1, m_2, m_3 les multiplicateurs de $E(z)$ le long des coupures a_1, a_2, a_3, et n_1, n_2, n_3 ses multiplicateurs le long de b_1, b_2, b_3. Nous aurons

$$(4)\quad \begin{cases} m_1 = e^{2\nu_1 \pi i} = 1, \quad m_2 = e^{2\nu_2 \pi i} = 1, \quad m_3 = e^{2\nu_3 \pi i} = 1, \\ n_1 = e^{2\nu_1 b_{11} + 2\nu_2 b_{21} + 2\nu_3 b_{31}}, \quad n_2 = e^{2\nu_1 b_{12} + 2\nu_2 b_{22} + 2\nu_3 b_{32}}, \quad n_3 = e^{2\nu_1 b_{13} + 2\nu_2 b_{23} + 2\nu_3 b_{33}}. \end{cases}$$

La fonction

$$\frac{z^\nu}{s} E(z),$$

ν étant un entier positif ou nul, admet les mêmes multiplicateurs que $E(z)$; cette fonction est, pour des valeurs très grandes de z, développable en une série ordonnée suivant les puissances décroissantes de z, et le premier terme du développement est de l'ordre de

$$z^{\nu-4}.$$

Donc les intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\phi_0(z)=\int\frac{1}{s}E(z)dz,\qquad \phi_1(z)=\int\frac{z}{s}E(z)dz,\qquad \phi_2(s)=\int\frac{z^2}{s}E(z)dz,$$

sont de *première espèce* comme restant partout finies; tandis que

$$\phi_3(s)=\int\frac{z^3}{s}E(z)dz$$

est de *troisième espèce,* car cette intégrale a pour points critiques logarithmiques les deux points j_0 et j_1 situés à l'infini, le premier dans le feuillet supérieur, le second dans le feuillet inférieur.

Appelons

$$A_{\nu 1}\,,\ A_{\nu 2}\,,\ A_{\nu 3}\,,\ B_{\nu 1}\,,\ B_{\nu 2}\,,\ B_{\nu 3}\,,\ C_{\nu 2}\,,\ C_{\nu 3}$$

les modules de périodicité de l'intégrale

$$\phi_\nu(z)=\int\frac{z^\nu}{s}E(z)dz,$$

le long des coupures $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_2, c_3$. Si ν est égal à 1 ou 2, cette intégrale est de première espèce, et, d'après les relations établies dans la deuxième partie entre les modules de périodicité et les multiplicateurs d'une intégrale de première espèce (page 34), on aura

$$\begin{aligned}
&B_{11}(1-m_1)-A_{11}(1-n_1) &&+n_1C_{12}=0,\\
&B_{12}(1-m_2)-A_{12}(1-n_2)-m_2n_2C_{12} &&+n_2C_{13}=0,\\
&B_{13}(1-m_3)-A_{13}(1-n_3)-m_3n_3C_{13} &&=0.
\end{aligned}$$

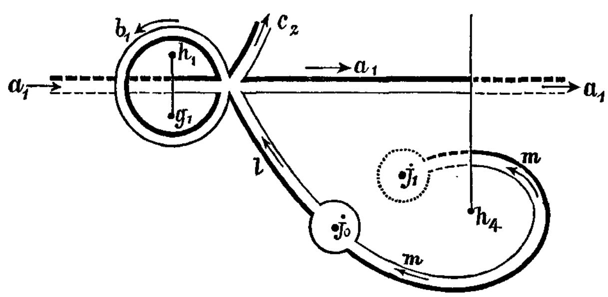
Mais actuellement $m_1=m_2=m_3=1$; donc

$$(5)\qquad \begin{cases}
-A_{11}(1-n_1)+n_1C_{12} &=0,\\
-A_{12}(1-n_2)+n_2(C_{13}-C_{12}) &=0,\\
-A_{13}(1-n_3)-n_3C_{13} &=0.
\end{cases}$$

On a de même pour l'intégrale $\psi_2(z)$

$$(6)\qquad \begin{cases} -A_{21}(1-n_1)+n_1C_{22} & =0, \\ -A_{22}(1-n_2)+n_2(C_{23}-C_{22}) & =0, \\ -A_{23}(1-n_3)-n_3C_{23} & =0. \end{cases}$$

L'intégrale $\psi_3(z)$ qui est de troisième espèce n'est plus uniforme sur la surface de Riemann R_{abc}: mais elle devient uniforme sur la surface R_{abclm} obtenue en traçant sur R_{abc} les deux coupures nouvelles l et m que nous figurons ci-dessus conformément à la disposition adoptée dans la théorie générale:



dans cette figure nous avons représenté, comme étant à distance finie, les points critiques logarithmiques j_0 et j_1 qui sont situés à l'infini.

Appelons

$$A_{31}\,,\ A_{32}\,,\ A_{33}\,,\ B_{31}\,,\ B_{32}\,,\ B_{33}\,,\ C_{32}\,,\ C_{33}\,,\ \mathfrak{L}\,,\ \mathfrak{M}$$

les modules de périodicité de l'intégrale $\psi_3(z)$ le long des coupures $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_2, c_3, l$ et m. Les modules de périodicité $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ sont aisés à calculer, comme nous l'avons montré dans la théorie générale des intégrales de troisième espèce. De plus, les relations entre les modules de périodicité et les multiplicateurs d'une intégrale de troisième espèce deviennent ici, puisque $m_1 = m_2 = m_3 = 1$:

$$(7)\qquad \begin{cases} -A_{31}(1-n_1)+n_1(C_{32}-\mathfrak{L}) & =0, \\ -A_{32}(1-n_2)+n_2(C_{33}-C_{32}) & =0, \\ -A_{33}(1-n_3)-n_3C_{33} & =0. \end{cases}$$

Les relations précédentes (5), (6) et (7) permettent de simplifier l'expression (3) de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ indiquée à la page 150. En effet, si l'on remplace A_{11}, A_{12}, A_{13}, A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{31}, A_{32}, A_{33} par leurs valeurs tirées de ces relations (5), (6), (7), on a

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = \frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} \begin{vmatrix} C_{12} & C_{13} - C_{12} & -C_{13} \\ C_{22} & C_{23} - C_{22} & -C_{23} \\ C_{32} - \mathfrak{L} & C_{33} - C_{32} & -C_{33} \end{vmatrix}$$

ou, en ajoutant les éléments de la première et de la dernière colonne à ceux de la seconde,

$$\frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} \begin{vmatrix} C_{12} & 0 & -C_{13} \\ C_{22} & 0 & -C_{23} \\ C_{32} - \mathfrak{L} & -\mathfrak{L} & -C_{33} \end{vmatrix},$$

ce qui donne en développant

$$\frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_3)} . \mathfrak{L} . (C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23}).$$

On a donc enfin, pour le coefficient $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, l'expression

$$(8) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_1 n_2 n_3}{(1-n_1)(1-n_2)(1-n_2)} . \mathfrak{L} . (C_{13}C_{22} - C_{12}C_{23}),$$

qui, en vertu des relations (5) et (6) des pages 152 et 153, peut aussi s'écrire

$$(9) \qquad P_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1-n_2} . \mathfrak{L} . (A_{11}A_{23} - A_{13}A_{21}).$$

Le calcul de ce coefficient se trouve ainsi ramené à celui d'un déterminant de *quatre* intégrales simples. Ces quatre intégrales simples

$$A_{11} = \int_{L_1} \frac{z_1 dz_1}{s_1} E(z_1), \qquad A_{13} = \int_{L_3} \frac{z_3 dz_3}{s_3} E(z_3),$$

$$A_{21} = \int_{L_1} \frac{z_1^2 dz_1}{s_1} E(z_1), \qquad A_{23} = \int_{L_3} \frac{z_3^2 dz_3}{s_3} E(z_3),$$

se ramènent immédiatement à des intégrales rectilignes d'après la définition même des contours L_1 et L_3 (page 147). Il suffit de leur appliquer la méthode dont nous nous sommes servis dans la troisième partie, pour ramener des intégrales analogues à la forme

$$\psi(m, n) + \psi(-m, -n).$$

Développement de $z_1 + z_2 + z_3$.

Si l'on fait

$$z_1 + z_2 + z_3 = \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3 = -\infty}^{\nu_1, \nu_2, \nu_3 = +\infty} Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

on trouvera comme ci-dessus, en prenant garde à l'identité

$$z_1 + z_2 + z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}},$$

$$Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3} \frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} \begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^3 \\ 1 & z_2 & z_2^3 \\ 1 & z_3 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1\, dz_2\, dz_3,$$

ou encore

$$Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{01} & A_{11} & A_{31} \\ A_{02} & A_{12} & A_{32} \\ A_{03} & A_{13} & A_{33} \end{vmatrix},$$

avec les notations de la page 150.

Les constantes

$$A_{01}, A_{02}, A_{03}; A_{11}, A_{12}, A_{13}$$

sont les modules de périodicité des intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\phi_0(z) = \int \frac{dz}{s} E(z), \qquad \phi_1(z) = \int \frac{z\,dz}{s} E(z)$$

le long des coupures a_1, a_2, a_3; ces deux intégrales sont de *première espèce.* Les constantes

$$A_{31},\ A_{32},\ A_{33}$$

sont les modules de périodicité, le long de ces mêmes coupures, de l'intégrale

$$\phi_3(z) = \int \frac{z^3\,dz}{s} E(z)$$

qui est de *troisième espèce* avec deux points critiques logarithmiques à l'infini. Cette intégrale $\phi_3(z)$ est uniforme sur la surface de Riemann R_{abclm} représentée à la page 153; appelons $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{M}$ ses modules de périodicité le long des coupures l et m; nous verrons, comme nous l'avons fait aux pages 153 et 154, que l'on a

$$(10) \qquad Q_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1 - n_2} . \mathfrak{L} . (A_{01}A_{13} - A_{03}A_{11}).$$

Le calcul de ce coefficient peut d'ailleurs se ramener à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$.

En effet on a

$$E(z) = e^{2\nu_1 w_1(z) + 2\nu_2 w_2(z) + 2\nu_3 w_3(z)}$$

ou

$$E(z) = e^{\int \frac{a + bz + cz^2}{s} dz}$$

en faisant pour abréger

$$a = 2\nu_1 p_1 + 2\nu_2 p_2 + 2\nu_3 p_3,$$
$$b = 2\nu_1 q_1 + 2\nu_2 q_2 + 2\nu_3 q_3,$$
$$c = 2\nu_1 r_1 + 2\nu_2 r_2 + 2\nu_3 r_3.$$

Donc

$$dE(z) = a\frac{dz}{s} E(z) + b\frac{z\,dz}{s} E(z) + c\frac{z^2\,dz}{s} E(z)$$

et en intégrant

$$E(z) = a\phi_0(z) + b\phi_1(z) + c\phi_2(z) + C^{te}.$$

Les modules de périodicité du premier membre $E(z)$ étant *nuls*, il en est de même de ceux du second membre et l'on a, entre autres relations,

$$aA_{01} + bA_{11} + cA_{21} = 0,$$
$$aA_{02} + bA_{12} + cA_{22} = 0,$$
$$aA_{03} + bA_{13} + cA_{23} = 0,$$

d'où en éliminant b entre la première et la dernière,

$$(11) \qquad a(A_{01}A_{13} - A_{03}A_{11}) + c(A_{21}A_{13} - A_{11}A_{23}) = 0,$$

formule qui ramène le calcul du coefficient $Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$.

Développement de $z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3$.

En faisant

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3 = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} R_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1u_1-2\nu_1u_2-2\nu_1u_3}$$

et prenant garde à l'identité bien connue

$$z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}},$$

on trouvera, comme ci-dessus pour les développements de $z_1z_2z_3$ et $z_1 + z_2 + z_3$,

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3}\int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3}\frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1s_2s_3}\begin{vmatrix} 1 & z_1^2 & z_1^3 \\ 1 & z_2^2 & z_2^3 \\ 1 & z_3^2 & z_3^3 \end{vmatrix} dz_1\,dz_2\,dz_3,$$

ou encore

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \begin{vmatrix} A_{01} & A_{21} & A_{31} \\ A_{02} & A_{22} & A_{32} \\ A_{03} & A_{23} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Les éléments de ce déterminant sont les modules de périodicité, le long des coupures a_1, a_2, a_3, des intégrales de fonctions à multiplicateurs

$$\psi_0(z) = \int \frac{dz}{s} E(z), \qquad \psi_2(z) = \int \frac{z^2 dz}{s} E(z), \qquad \psi_3(z) = \int \frac{z^3 dz}{s} E(z).$$

En transformant ce déterminant, comme le déterminant analogue (3) de la page 150, nous aurons

$$R_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \frac{n_2}{1 - n_2} . \mathfrak{L} . (A_{01} A_{23} - A_{21} A_{03}),$$

formule qui ramène aussi le calcul de ce coefficient à celui de $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$. En effet les relations entre les modules de périodicité établies à la page 157

$$aA_{01} + bA_{11} + cA_{21} = 0,$$
$$aA_{03} + bA_{13} + cA_{23} = 0,$$

donnent par l'elimination de c

(12) $$a(A_{01} A_{23} - A_{21} A_{03}) + b(A_{11} A_{23} - A_{21} A_{13}) = 0.$$

D'après cela, on a

$$aR_{\nu_1\nu_2\nu_3} + bP_{\nu_1\nu_2\nu_3} = 0;$$

la formule (11) de la page 157 nous donne de même

$$aQ_{\nu_1\nu_2\nu_3} - cP_{\nu_1\nu_2\nu_3} = 0.$$

Donc enfin

(13) $$\frac{P_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{a} = \frac{Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{c} = \frac{R_{\nu_1\nu_2\nu_3}}{-b};$$

dans cette formule importante a, b, c ont les valeurs déjà indiquées (page 156)

$$a = 2(\nu_1 p_1 + \nu_2 p_2 + \nu_3 p_3),$$
$$b = 2(\nu_1 q_1 + \nu_2 q_2 + \nu_3 q_3),$$
$$c = 2(\nu_1 r_1 + \nu_2 r_2 + \nu_3 r_3);$$

on voit que cette formule (13), qui ramène les trois coefficients $P_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, $Q_{\nu_1\nu_2\nu_3}$, $R_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ à l'un d'entre eux, est l'extension, au cas actuel, d'une formule analogue établie pour les fonctions abéliennes de genre 2 et ramenant les développements de $z_1 + z_2$ et $z_1 z_2$ l'un à l'autre.

Développements d'autres fonctions abéliennes résultant de l'inversion des mêmes équations.

On pourra appliquer la même méthode au développement en série trigonométrique d'une fonction abélienne des variables u_1, u_2, u_3 exprimée par un polynôme symétrique en z_1, z_2, z_3 et s_1, s_2, s_3.

Si l'on suppose une fonction de cette forme

$$f(z_1, z_2, z_3; s_1, s_2, s_3)$$

développée en série

$$\sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} S_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3},$$

le calcul du coefficient $S_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ se ramènera par les mêmes méthodes au calcul *d'intégrales simples* qui ne sont autre chose que les modules de périodicité d'intégrales de la forme

$$\psi_\nu(z) = \int \frac{z^\nu dz}{s} E(z), \qquad \varphi_\nu(z) = \int z^\nu E(z) dz \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$$

le long des coupures a_1, a_2, a_3.

Comme l'on a

$$E(z) = e^{\int \frac{a + bz + cz^2}{s} dz}$$

la différentiation des expressions

$$z^\nu E(z)\ ,\ sz^\nu E(z)$$

où

$$\nu = 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ \ldots\ \infty,$$

fournira des formules de réduction pour ces intégrales ψ_ν et φ_ν, formules entièrement semblables à celles que nous avons établies à la fin de la troisième partie.

Par exemple, on a identiquement

$$dz^\nu E(z) = \nu z^{\nu-1} E(z) dz + \frac{z^\nu(a + bz + cz^2)}{s} E(z) dz,$$

d'où en intégrant

$$z^\nu E(z) = \nu\varphi_{\nu-1}(z) + a\psi_\nu(z) + b\psi_{\nu+1}(z) + c\psi_{\nu+2}(z) + C^{te},$$

formule qui ramène toutes les intégrales $\varphi_\nu(z)$ à des intégrales $\psi_\nu(z)$.

Puis la différentiation de

$$sz^\nu E(z)$$

donnera une formule ramenant, par voie récurrente, toutes les intégrales $\psi_\nu(z)$ aux premières d'entre elles. Il est inutile de donner le détail de ces formules qui est entièrement élémentaire.

On conclut de là que toutes les intégrales définies qui figureront dans les coefficients tels que $S_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ se ramèneront par voie récurrente à un nombre fini d'entre elles.

On ramènerait de même au calcul d'intégrales simples la détermination des coefficients du développement en série d'exponentielles $e^{2\nu_1 u_1 + 2\nu_2 u_2 + 2\nu_3 u_4}$ d'une fonction abélienne ayant l'une ou l'autre des formes

$$R(s_1\,, z_1) + R(s_2\,, z_2) + R(s_3\,, z_3),$$

$$R(s_1\,, z_1)R(s_2\,, z_2) + R(s_2\,, z_2)R(s_3\,, z_3) + R(s_1\,, z_1)R(s_3\,, z_3),$$

$$R(s_1\,, z_1)R(s_2\,, z_2)R(s_3\,, z_3),$$

où $R(s\,, z)$ désigne une fonction rationnelle de s et z, à condition, bien entendu, que ce développement soit possible.

Ces nouvelles intégrales définies simples seront encore les modules de périodicité de certaines intégrales de fonctions à multiplicateurs: mais elles ne peuvent plus, par voie récurrente, se ramener à un nombre fini d'entre elles. On leur appliquera les théorèmes généraux indiqués dans la seconde partie.

Développements de certaines fonctions algébriques de fonctions abéliennes.

On peut développer par la même méthode certaines *fonctions rationnelles* mais *non symétriques* de $s_1, z_1; s_2, z_2; s_3, z_3$, c'est à dire certaines fonctions algébriques de fonctions abéliennes.

Prenons par exemple la fonction

$$f(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)} = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_1^2 \\ 1 & z_2 & z_2^2 \\ 1 & z_3 & z_3^2 \end{vmatrix}}$$

qui reste finie et continue quand z_1, z_2, z_3 décrivent les contours appelés L_1, L_2, L_3. Cette fonction, qui est la racine carrée d'une fonction abélienne, sera développable en une série trigonométrique de la forme

$$f(z_1, z_2, z_3) = \sum_{\nu_1,\nu_2,\nu_3=-\infty}^{\nu_1,\nu_2,\nu_3=+\infty} T_{\nu_1\nu_2\nu_3} e^{-2\nu_1 u_1 - 2\nu_2 u_2 - 2\nu_3 u_3}$$

convergente, comme les précédentes, pour des valeurs purement imaginaires des différences

$$u_1 - (u_1)_0, \qquad u_2 - (u_2)_0, \qquad u_3 - (u_3)_0.$$

On trouvera immédiatement, en suivant la même méthode que plus haut,

$$T_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} \int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3} \frac{E(z_1)E(z_2)E(z_3)}{s_1 s_2 s_3} dz_1 dz_2 dz_3,$$

c'est à dire, d'après nos notations de la page 150,

$$T_{\nu_1\nu_2\nu_3} = \frac{\Delta}{(\pi i)^3} A_{01} A_{02} A_{03}.$$

Le coefficient $T_{\nu_1\nu_2\nu_3}$ est ainsi exprimé en fonction des trois modules de périodicité

$$A_{01}\,,\ A_{02}\,,\ A_{03}$$

de l'intégrale $\psi_0(z)$. Si l'on appelle

$$C_{02}\,,\ C_{03}$$

les modules de périodicité de cette intégrale $\psi_0(z)$ le long des coupures c_2 et c_3, on a, comme à la page 152,

$$\begin{aligned}
&-A_{01}(1-n_1)+n_1C_{02} &&=0,\\
&-A_{02}(1-n_2)+n_2(C_{03}-C_{02}) &&=0,\\
&-A_{03}(1-n_3)-n_3C_{03} &&=0,
\end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1-n_1}{n_1}A_{01}+\frac{1-n_2}{n_2}A_{02}+\frac{1-n_3}{n_3}A_{03}=0.$$

Il restera donc à calculer A_{02} et A_{03}.

On ramènera au calcul des modules de périodicité de ces mêmes intégrales $\psi_\nu(z)$, le calcul des coefficients des développements en séries trigonométriques de toute fonction égale à un polynôme non symétrique en $s_1\,,z_1\,;\ s_2\,,z_2\,;\ s_3\,,z_3\,;$ ou du produit d'une pareille fonction par $f(z_1\,,z_2\,,z_3)$.

Mais il nous paraît sans intérêt d'insister davantage sur ce sujet, et nous terminerons par quelques remarques, qui nous semblent fondamentales, sur une classe d'équations différentielles linéaires à coefficients algébriques. Voyez un Mémoire de Riemann intitulé: *Zwei allgemeine Sätze über lineäre Differentialgleichungen mit algebraischen Coefficienten*, et les recherches de M. Poincaré sur l'intégration des équations différentielles linéaires à coefficients algébriques.