ÜBER BESTÄNDIG CONVERGIRENDE POTENZREIHEN

MIT RATIONALEN ZAHLENCOEFFICIENTEN UND VORGESCHRIEBENEN NULLSTELLEN

VON

A. HURWITZ
in KÖNIGSBERG i. Pr.

Den Quotienten zweier reeller ganzen Zahlen bezeichne ich im Folgenden als *reelle* rationale Zahl und verstehe unter einer rationalen Zahl schlechthin jede Grösse $a+bi$, deren Componenten a und b reelle rationale Zahlen sind.

Es sei irgend eine Potenzreihe

$$\mathfrak{P}(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots \tag{1}$$

gegeben. Dann kann man stets, und zwar auf unendlich viele Weisen, eine beständig convergirende Potenzreihe $g(x)$ *so bestimmen, dass die Entwicklung des Produktes*

$$\mathfrak{P}(x) \,.\, e^{g(x)} = r_0 + r_1x + r_2x^2 + \ldots \tag{2}$$

lauter rationale Coefficienten besitzt. Wenn in's besondere die Coefficienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *von* $\mathfrak{P}(x)$ *reell sind, so kann man die Bestimmung von* $g(x)$ *so treffen, dass die Coefficienten* $r_0, r_1, r_2, \ldots$ *reelle rationale Zahlen werden.*

Zum Beweise dieses Satzes nehme man eine unendliche Reihe positiver Grössen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$ an, welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass die Potenzreihe

$$\varepsilon_1x + \varepsilon_2x^2 + \varepsilon_3x^3 + \ldots \tag{3}$$

beständig convergirt. Sodann entwickle man $\log \mathfrak{P}(x)$ in der Form:

$$(4) \qquad \log \mathfrak{P}(x) = s \log x + \log a_s + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots,$$

wo a_s den ersten nicht verschwindenden Coefficienten $a_0, a_1, a_2 \dots$ bezeichnet. Endlich setze man, für $n = 1, 2, 3, \dots,$

$$(5) \qquad \alpha_n = \rho_n - \beta_n,$$

indem man die rationale Zahl ρ_n so bestimmt, dass der absolute Betrag von β_n kleiner als ε_n, also in Zeichen:

$$(6) \qquad |\beta_n| < \varepsilon_n$$

wird. Diese Bestimmung ist stets möglich, da in jeder noch so kleinen Umgebung von α_n unendlich viele rationale Zahlen vorhanden sind. Nunmehr wird die Reihe

$$(7) \qquad g(x) = -\log a_s + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \dots$$

die gewünschten Eigenschaften besitzen. Denn einerseits zeigt der Vergleich mit der Reihe (3) auf Grund der Ungleichung (6), dass $g(x)$ beständig convergirt. Andererseits ist

$$\log \mathfrak{P}(x) + g(x) = s \log x + \rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots$$

und folglich

$$\mathfrak{P}(x) \,.\, e^{g(x)} = x^s \,.\, e^{\rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots}$$

$$= x^s \left[1 + (\rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots) + \frac{1}{\underline{|2}} (\rho_1 x + \rho_2 x^2 + \dots)^2 + \dots \right].$$

Die Entwicklung der rechten Seite dieser Gleichung nach aufsteigenden Potenzen von x liefert aber lauter rationale Zahlencoefficienten, da $\rho_1, \rho_2, \dots$ rationale Zahlen sind. Wenn die Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ reelle Coefficienten besitzt, so werden auch $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ reelle Zahlen sein. Man kann dann offenbar ρ_n als *reelle* rationale Zahlen wählen, so dass auch die Potenzentwicklung von $\mathfrak{P}(x) \,.\, e^{g(x)}$ *reelle* rationale Zahlencoefficienten erhält.

Aus dem vorstehend bewiesenen Satze lassen sich einige bemerkenswerthe Folgerungen ziehen. Es sei gegeben eine Reihe von Grössen

$$(8) \qquad a_1, a_2, a_3, \dots,$$

welche nur der Bedingung unterworfen sind, dass

$$\lim_{n=\infty} a_n = \infty \tag{9}$$

ist, falls die Reihe (8) nicht abbricht. Nach einem Satze des Herrn WEIERSTRASS[1] kann man dann auf mannigfaltige Weise eine beständig convergirende Potenzreihe herstellen, welche die Grössen (8) und nur diese zu Nullstellen hat. Bezeichnet $\mathfrak{P}_1(x)$ irgend eine solche Potenzreihe so sind alle übrigen in der Form

$$\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_1(x) \,.\, e^{G(x)} \tag{10}$$

enthalten, wo $G(x)$ eine beliebige beständig convergirende Potenzreihe bedeutet. Wenn die Reihe (8) in sich übergeht, falls jede Grösse a_m durch ihren conjugirt imaginären Werth ersetzt wird, so darf man voraussetzen, dass $\mathfrak{P}_1(x)$ reelle Coefficienten besitzt. Denn andernfalls sei $\overline{\mathfrak{P}}_1(x)$ die Reihe, welche entsteht, wenn man jeden Coefficienten von $\mathfrak{P}_1(x)$ durch seinen conjugirten Werth ersetzt. Dann ist $\mathfrak{P}_2(x) = \sqrt{\mathfrak{P}_1(x)\, \overline{\mathfrak{P}}_1(x)}$ eine Potenzreihe mit reellen Coefficienten, welche an Stelle von $\mathfrak{P}_1(x)$ gesetzt werden kann.

Auf Grund des oben Bewiesenen können wir nun den Satz aussprechen:

Wenn eine Reihe von Grössen (8) *gegeben ist, so kann man auf mannigfaltige Weise eine beständig convergirende Potenzreihe herstellen, welche die Grössen* (8) *und nur diese zu Nullstellen hat und welche überdies rationale Zahlencoefficienten besitzt. Falls die Reihe* (8) *in sich übergeht, wenn man jede in ihr enthaltene Grösse durch deren conjugirt-imaginären Werth ersetzt, so kann man jene Potenzreihe derart bestimmen, dass sie reelle Coefficienten erhält.*

Wie eine leichte Überlegung zeigt, erhält man die allgemeinste Potenzreihe von der im Satze genannten Beschaffenheit aus einer bestimmten $\mathfrak{P}_1(x)$ vermöge der Gleichung

$$\mathfrak{P}(x) = c \,.\, \mathfrak{P}_1(x) \,.\, e^{xh(x)}, \tag{11}$$

[1] *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.* Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1876. Wieder abgedruckt in den *Abhandlungen aus der Functionenlehre.* Berlin 1886.

wo c irgend eine rationale Zahl und $h(x)$ irgend eine beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen Coefficienten bedeutet.

Der besondere Fall, in welchem die Reihe (8) aus einer einzigen Zahl a besteht, ergiebt den Satz:

Jede beliebige (reelle oder complexe) Zahl a ist Wurzel einer Gleichung

$$0 = r_0 + r_1 x + r_2 x^2 + \dots,$$

deren rechte Seite eine beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen (reellen bez. complexen) Coefficienten darstellt und welche ausser der Zahl a keine weitere Wurzel besitzt.»

Sei $\mathfrak{P}(x)$ eine beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen Coefficienten, und sei $a_1, a_2, a_3, \dots$ die Reihe ihrer Nullstellen. Die letzteren mögen willkürlich in n Gruppen $G_1, G_2, \dots G_n$ zerlegt werden. Nach dem Vorhergehenden ist es dann möglich $n - 1$ beständig convergirende Potenzreihen $\mathfrak{P}_1(x), \mathfrak{P}_2(x), \dots \mathfrak{P}_{n-1}(x)$ mit rationalen Coefficienten herzustellen derart, dass $\mathfrak{P}_r(x)$ für die in die Gruppe G_r aufgenommenen Stellen und nur für diese verschwindet. Der Quotient aus $\mathfrak{P}(x)$ und dem Produkte $\mathfrak{P}_1(x) \cdot \mathfrak{P}_2(x) \dots \mathfrak{P}_{n-1}(x)$ lässt sich dann als beständig convergirende Potenzreihe $\mathfrak{P}_n(x)$ mit rationalen Coefficienten darstellen, und es wird $\mathfrak{P}_n(x)$ für die in G_n enthaltenen Stellen und nur für diese verschwinden. Hieraus folgt:

Jede beständig convergirende Potenzreihe mit rationalen Coefficienten lässt sich als Produkt von n ebensolchen Reihen darstellen derart, dass sich die Nullstellen der ersteren Reihe in beliebig vorgeschriebener Weise auf die n Factoren vertheilen.

Ins besondere kann man also die linke Seite einer algebraischen Gleichung n^{ten} Grades mit rationalen Coefficienten auflösen in ein Produkt von n beständig convergirenden Potenzreihen mit ebenfalls rationalen Coefficienten, von welchen jede einzelne für je eine Wurzel jener Gleichung verschwindet.

Aus den vorstehenden Sätzen geht hervor, dass im Gebiete der beständig convergirenden Potenzreihen mit rationalen Coefficienten eine unbeschränkte Zerlegbarkeit stattfindet, und dass also in diesem Gebiete der Begriff der Irreducibilität keine Stelle findet.[1]

Schliesslich erwähne ich noch folgenden Satz, dessen Beweis nach den eingangs angestellten Betrachtungen keine Schwierigkeit bietet:

Jede beständig convergirende Potenzreihe mit beliebigen Coefficienten kann dargestellt werden als Produkt von unendlich vielen beständig convergirenden Potenzreihen mit rationalen Coefficienten, von welchen jede einzelne an einer oder an keiner Stelle verschwindet.

Königsberg i. Pr. 10. März 1889.

[1] Vgl. E. Strauss: *Eine Verallgemeinerung der dekadischen Schreibweise nebst functionentheoretischer Anwendung.* Acta Mathematica, Bd. 11, S. 13.