RECHERCHES SUR LES NOMBRES ET LES FONCTIONS DE BERNOULLI

PAR

A. BERGER

À UPSALA.

I. *Théorie des nombres et des fonctions de Bernoulli.*

Comme introduction à la théorie des nombres et des fonctions de BERNOULLI nous nous proposons la solution du problème suivant.

Problème. Former un groupe infini de fonctions d'une variable z

$$\varphi(z, 0), \varphi(z, 1), \varphi(z, 2), \ldots, \tag{1}$$

qui satisfont aux équations

$$\varphi''(z, m+1) = \varphi'(z, m), \tag{2}$$

$$\varphi(z, 0) = 0, \tag{3}$$

$$\varphi(0, m) = 0 \tag{4}$$

pour

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

et pour toutes les valeurs de la variable z.

Pour la solution de ce problème nous procédons de la manière suivante. En intégrant les deux membres de l'équation (2) nous en obtiendrons pour $m \geqq 0$

$$\varphi'(z, m+1) = \varphi(z, m) + B(m), \tag{5}$$

où l'on désigne par $B(m)$ une quantité qui ne dépend pas de z. Faisons dans l'équation (5) $m = 0$, nous en obtiendrons d'après l'équation (3)

$$\varphi'(z, 1) = B(0), \tag{6}$$

et de cette formule on déduit par intégration et en ayant égard à l'équation (4) la formule

$$\varphi(z, 1) = B(0)z. \tag{7}$$

Substituons dans l'équation (5) $m = 1$, nous en obtiendrons au moyen de l'équation (7)

$$\varphi'(z, 2) = B(0)z + B(1) \tag{8}$$

et par conséquent, en intégrant les deux membres de cette équation et en y appliquant l'équation (4),

$$\varphi(z, 2) = \frac{B(0)z^2}{1.2} + \frac{B(1)z}{1}. \tag{9}$$

Pour $m = 2$ on déduit des équations (5) et (9)

$$\varphi'(z, 3) = \frac{B(0)z^2}{1.2} + \frac{B(1)z}{1} + B(2), \tag{10}$$

d'où l'on tire par intégration et en ayant égard à l'équation (4)

$$\varphi(z, 3) = \frac{B(0)z^3}{1.2.3} + \frac{B(1)z^2}{1.2} + \frac{B(2)z}{1}. \tag{11}$$

En opérant de cette manière nous trouverons que toutes les fonctions du groupe (1) sont données par les formules

$$\varphi(z, 0) = 0, \qquad \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)z^k}{1.2.3\ldots k} \quad \text{pour} \quad m \geqq 1, \tag{12}$$

où l'on désigne par $B(0), B(1), B(2), \ldots$ une suite infinie de constantes arbitraires; et inversement on peut s'assurer sans difficulté, que les fonctions (12) satisfont aux équations (2), (3), (4), quelles que soient ces constantes. Pour la détermination de ces constantes nous fixerons les valeurs des fonctions $\varphi(z, m)$ pour $z = 1$ de sorte que l'on ait

$$\varphi(1, 1) = 1 \tag{13}$$

et

$$(14) \qquad \varphi(1, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Pour que ces conditions soient remplies, il faut et il suffit d'après l'équation (12), que les nombres $B(m)$ satisfassent aux équations

$$(15) \qquad B(0) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)}{1.2.3\ldots k} = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Par ces équations les nombres

$$B(0), B(1), B(2), \ldots$$

sont complètement déterminés, et par suite on peut conclure des équations (12), que les fonctions

$$\varphi(z, 0), \varphi(z, 1), \varphi(z, 2), \ldots$$

sont aussi complètement déterminées. Après cette introduction nous établissons les deux définitions suivantes.

Définition 1. Par les nombres Bernoulliens nous désignons le groupe infini de quantités

$$B(0), B(1), B(2), B(3), \ldots$$

qui satisfont aux équations

$$(16) \qquad B(0) = 1, \qquad \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)}{1.2.3\ldots k} = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Définition 2. Par les fonctions Bernoulliennes nous désignons le groupe infini de fonctions

$$\varphi(z, 0), \varphi(z, 1), \varphi(z, 2), \varphi(z, 3), \ldots$$

qui pour toutes les valeurs de la variable z satisfont aux équations

$$(17) \qquad \varphi''(z, m+1) = \varphi'(z, m) \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$

$$(18) \qquad \varphi(z, 0) = 0,$$

$$(19) \qquad \varphi(0, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$

$$(20) \qquad \varphi(1, 1) = 1,$$

$$(21) \qquad \varphi(1, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2.$$

Par ces deux définitions les nombres et les fonctions de Bernoulli sont parfaitement déterminés. En faiant dans la seconde des équations (16) m successivement égal à $2, 3, 4, 5, \ldots$ et en résolvant les équations ainsi obtenues, nous obtiendrons les valeurs des nombres Bernoulliens; les dix premiers sont

$$(22) \qquad B(0) = 1, \qquad B(1) = -\frac{1}{2}, \qquad B(2) = \frac{1}{12}, \qquad B(3) = 0,$$

$$B(4) = -\frac{1}{720}, \qquad B(5) = 0, \qquad B(6) = \frac{1}{30240}, \qquad B(7) = 0,$$

$$B(8) = -\frac{1}{1209600}, \qquad B(9) = 0.$$

Des équations (16) on peut conclure, que les nombres Bernoulliens sont des quantités rationnelles. Au moyen de ces nombres on peut calculer les fonctions de Bernoulli en employant les équations (12); on trouvera

$$(23) \qquad \varphi(z, 0) = 0, \qquad \varphi(z, 1) = z, \qquad \varphi(z, 2) = \frac{z^2}{2} - \frac{z}{2},$$

$$\varphi(z, 3) = \frac{z^3}{6} - \frac{z^2}{4} + \frac{z}{12}, \qquad \varphi(z, 4) = \frac{z^4}{24} - \frac{z^3}{12} + \frac{z^2}{24},$$

$$\varphi(z, 5) = \frac{z^5}{120} - \frac{z^4}{48} + \frac{z^3}{72} - \frac{z}{720}, \qquad \varphi(z, 6) = \frac{z^6}{720} - \frac{z^5}{240} + \frac{z^4}{288} - \frac{z^2}{1440}$$

et, en général, pour $m \geqq 1$

$$(24) \qquad \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)z^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k}.$$

Puisque les fonctions Bernoulliennes sont complètement déterminées par les équations (17), (18), (19), (20), (21), nous pouvons énoncer le théorème suivant:

Théorème I. Si un groupe infini de fonctions de la variable z

$$\chi(z, 0), \chi(z, 1), \chi(z, 2), \chi(z, 3), \ldots$$

pour toutes les valeurs de z satisfont aux équations

$$\chi''(z, m+1) = \chi'(z, m) \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$
$$\chi(z, 0) = 0,$$
$$\chi(0, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 0,$$
$$\chi(1, 1) = 1,$$
$$\chi(1, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2,$$

on aura identiquement pour $m \geqq 0$

$$\chi(z, m) = \varphi(z, m).$$

Par l'équation (24) nous avons obtenu une expression générale des fonctions Bernoulliennes; dans ce qui suivra, nous déduirons des expressions des dérivées de ces fonctions. Désignons par r un nombre entier positif et différentions les deux membres de l'équation (17) $r - 1$ fois par rapport à z, nous en obtiendrons pour $r \geqq 1$, $m \geqq 0$

$$(25) \qquad \varphi^{(r+1)}(z, m+1) = \varphi^{r}(z, m).$$

En désignant par k un nombre entier qui satisfait à l'inégalité

$$k \leqq m,$$

on aura évidemment

$$m - k + r > 0,$$

et par conséquent on obtiendra de l'équation (25), en y remplaçant m par $m - k + r$,

$$(26) \qquad \varphi^{(r+1)}(z, m-k+r+1) = \varphi^{r}(z, m-k+r),$$

formule qui subsiste pour $r \geqq 1$, $k \leqq m$. En introduisant dans l'équation (26)

$$r = 1, 2, 3, \ldots, k-1,$$

où $k \geqq 2$, et en ajoutant les égalités ainsi obtenues, on trouvera pour $2 \leqq k \leqq m$

$$(27) \qquad \varphi^{k}(z, m) = \varphi'(z, m-k+1).$$

Mais cette formule est évidemment vraie aussi pour $k = 1$, et en y appliquant l'équation (5), nous en obtiendrons pour $1 \leqq k \leqq m$ la formule

$$\varphi^k(z, m) = \varphi(z, m - k) + B(m - k). \tag{28}$$

Des équations (24) et (28) résulte ce théorème:

Théorème II. Pour les fonctions Bernoulliennes et leurs dérivées on aura les formules

$$\varphi(z, 0) = 0, \qquad \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)z^k}{1 . 2 . 3 \ldots k}$$

pour $m \geqq 1$, et

$$\varphi^k(z, m) = \varphi(z, m - k) + B(m - k)$$

pour $1 \leqq k \leqq m$.

Soient maintenant x, y deux quantités quelconques et m un nombre entier positif, nous obtiendrons d'après la formule de Taylor, en remarquant que $\varphi(z, m)$ est une fonction entière du $m^{\text{ième}}$ degré,

$$\varphi(x + y, m) - \varphi(x, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi^k(x, m)y^k}{1 . 2 . 3 \ldots k} \tag{29}$$

et, par conséquent, d'après le théorème précédent,

$$\begin{aligned} \varphi(x + y, m) - \varphi(x, m) &= \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x, m-k) + B(m-k)}{1 . 2 . 3 \ldots k} y^k \\ &= \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x, m-k)y^k}{1 . 2 . 3 \ldots k} + \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)y^k}{1 . 2 . 3 \ldots k} \end{aligned} \tag{30}$$

ou, d'après le même théorème,

$$\varphi(x + y, m) - \varphi(x, m) - \varphi(y, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x, m-k)y^k}{1 . 2 . 3 \ldots k}. \tag{31}$$

Le premier membre de cette équation étant une fonction symétrique des variables x et y, ce membre restera invariable en permutant x et y, et par suite nous aurons la formule

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x, m-k)y^k}{1 . 2 . 3 \ldots k} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(y, m-k)x^k}{1 . 2 . 3 \ldots k}. \tag{32}$$

Par là le théorème suivant est démontré:

Théorème III. Si l'on désigne par m un nombre entier positif et par x et y deux quantités quelconques, on aura

$$\varphi(x+y\,,\,m) - \varphi(x\,,\,m) - \varphi(y\,,\,m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x\,,\,m-k)y^k}{1.2.3\ldots k}$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(x\,,\,m-k)y^k}{1.2.3\ldots k} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(y\,,\,m-k)x^k}{1.2.3\ldots k}.$$

Substituons dans la seconde de ces formules

$$x = z, \qquad y = 1, \tag{33}$$

nous en tirerons

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(z\,,\,m-k)}{1.2.3\ldots k} = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(1\,,\,m-k)z^k}{1.2.3\ldots k}, \tag{34}$$

et pour $m \geqq 2$ nous obtiendrons de cette équation, en y appliquant les formules (20) et (21),

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(z\,,\,m-k)}{1.2.3\ldots k} = \frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}. \tag{35}$$

Au moyen de cette équation et la formule (18) on peut calculer les fonctions Bernoulliennes sans recourir aux nombres Bernoulliens; en effet, pour $m = 2, 3, 4, \ldots$ on tire de l'équation (35)

$$\varphi(z\,,\,1) = \frac{z}{1},$$

$$\frac{\varphi(z\,,\,2)}{1} + \frac{\varphi(z\,,\,1)}{1.2} = \frac{z^2}{1.2},$$

$$\frac{\varphi(z\,,\,3)}{1} + \frac{\varphi(z\,,\,2)}{1.2} + \frac{\varphi(z\,,\,1)}{1.2.3} = \frac{z^3}{1.2.3},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et ces formules donnent évidemment les valeurs des fonctions Bernoulliennes. D'après cela nous pouvons énoncer ce théorème:

Théorème IV. Si l'on désigne par m un nombre entier qui satisfait à l'inégalité

$$m \geqq 2,$$

on aura

$$\sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(z, m-k)}{1.2.3\ldots k} = \frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

En supposant que

$$m \geqq 2,$$

et en faisant dans la première formule du théorème III

$$x = z, \qquad y = 1,$$

nous en obtiendrons selon l'équation (21)

$$(36) \qquad \varphi(z+1, m) - \varphi(z, m) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{\varphi(z, m-k)}{1.2.3\ldots k}$$

et par suite, en y appliquant le théorème IV,

$$(37) \qquad \varphi(z+1, m) - \varphi(z, m) = \frac{z^{m-1}}{1.2.3\ldots(m-1)}.$$

Maintenant nous ferons une application du théorème I; définissons, à cet effet, un groupe de fonctions

$$\chi(z, 0), \chi(z, 1), \chi(z, 2), \ldots$$

par les égalités

$$(38) \qquad \chi(z, 0) = 0, \qquad \chi(z, 1) = z, \qquad \chi(z, m) = (-1)^m \varphi(1-z, m)$$

pour $m \geqq 2$, nous en obtiendrons, en différentiant par rapport à z, les formules

$$(39) \qquad \chi'(z, 0) = 0, \qquad \chi'(z, 1) = 1, \qquad \chi'(z, m) = (-1)^{m-1} \varphi'(1-z, m)$$

pour $m \geqq 2$, lesquelles peuvent être réunies dans la seule formule

$$(40) \qquad \chi'(z, m) = (-1)^{m-1} \varphi'(1-z, m),$$

qui subsiste pour $m \geqq 0$. En différentiant de nouveau, nous obtiendrons de l'équation (40) pour $m \geqq 0$

$$(41) \qquad \chi''(z, m) = (-1)^m \varphi''(1-z, m),$$

et par suite, en y remplaçant m par $m + 1$,

$$\chi''(z, m + 1) = (-1)^{m-1}\varphi''(1 - z, m + 1), \tag{42}$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 0$. Des équations (40), (42), (17) on déduit pour $m \geqq 0$

$$\chi''(z, m + 1) = \chi'(z, m). \tag{43}$$

Des équations (38) on tire aussi, en employant les équations (21) et (19),

$$\chi(z, 0) = 0, \tag{44}$$

$$\chi(0, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 0, \tag{45}$$

$$\chi(1, 1) = 1, \tag{46}$$

$$\chi(1, m) = 0 \quad \text{pour} \quad m \geqq 2. \tag{47}$$

Cela établi, appliquons le théorème I aux équations (43), (44), (45), (46), (47), nous en obtiendrons pour $m \geqq 0$

$$\chi(z, m) = \varphi(z, m), \tag{48}$$

et par suite on aura d'après les équations (38) et (48) pour $m \geqq 2$

$$\varphi(1 - z, m) = (-1)^m\varphi(z, m). \tag{49}$$

Nous résumons les formules (37) et (49) dans le théorème suivant:

Théorème V. Si l'on désigne par m un nombre entier supérieur ou égal à 2, on aura

$$\varphi(z + 1, m) - \varphi(z, m) = \frac{z^{m-1}}{1 . 2 . 3 \ldots (m - 1)}$$

et

$$\varphi(1 - z, m) = (-1)^m\varphi(z, m).$$

La première de ces formules, mise sous la forme

$$z^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z + 1, m) - \varphi(z, m)\}, \tag{50}$$

subsiste évidemment pour $m \geqq 1$, et en y remplaçant z par $z + h$, nous trouverons

$$(z + h)^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z + h + 1, m) - \varphi(z + h, m)\}. \tag{51}$$

Soit maintenant k un nombre entier positif, et faisons dans l'équation (51) h successivement égal à

$$0\,,\,1\,,\,2\,,\,\ldots\,,\,k-1,$$

et ajoutons les équations ainsi obtenues, nous obtiendrons

$$\sum_{h=0}^{h=k-1}(z+h)^{m-1}=\Gamma(m)\{\varphi(z+k\,,\,m)-\varphi(z\,,\,m)\},\tag{52}$$

ce qui démontre ce théorème:

Théorème VI. Soient m et k deux nombres entiers positifs, on aura

$$\sum_{h=0}^{h=k-1}(z+h)^{m-1}=\Gamma(m)\{\varphi(z+k\,,\,m)-\varphi(z\,,\,m)\}.$$

Pour $z=0$ on en déduit

$$\sum_{h=0}^{h=k-1}h^{m-1}=\Gamma(m)\varphi(k\,,\,m),\tag{53}$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 1$, $k \geqq 1$.

En combinant entre elles les deux formules du théorème V, après avoir remplacé z par $-z$ dans la seconde, nous en tirerons pour $m \geqq 2$

$$\varphi(z\,,\,m)-(-1)^m\varphi(-z\,,\,m)=-\frac{z^{m-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)}.\tag{54}$$

Ecrivons cette équation sous la forme

$$\varphi(z\,,\,m)+\frac{1}{2}\frac{z^{m-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)}=(-1)^m\left\{\varphi(-z\,,\,m)+\frac{1}{2}\frac{(-z)^{m-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)}\right\},\tag{55}$$

nous en obtiendrons le théorème suivant:

Théorème VII. Si l'on désigne par m un nombre entier supérieur ou égal à 2, l'expression

$$\varphi(z\,,\,m)+\frac{1}{2}\frac{z^{m-1}}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(m-1)}$$

est une fonction paire ou impaire de la variable z, suivant que m est un nombre pair ou impair.

Pour $m \geqq 3$ on tire des équations (24) et (22)

$$(56) \qquad \varphi(z, m) + \frac{1}{2}\frac{z^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (m-1)} = \frac{z^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots m} + \sum_{k=1}^{k=m-2} \frac{B(m-k) z^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k},$$

et du théorème précédent provient ce corollaire:

Corollaire. Pour tout nombre entier positif n on a

$$(57) \qquad B(2n+1) = 0.$$

On peut aussi déduire cette formule des équations (49) et (5). Effectivement, si l'on remplace m par $m+1$ dans l'équation (49), on aura pour $m \geqq 1$

$$(58) \qquad \varphi(1-z, m+1) = (-1)^{m+1}\varphi(z, m+1)$$

et par conséquent, en différentiant,

$$(59) \qquad \varphi'(1-z, m+1) = (-1)^m \varphi'(z, m+1)$$

ou, d'après l'équation (5),

$$(60) \qquad \varphi(1-z, m) + B(m) = (-1)^m \varphi(z, m) + (-1)^m B(m),$$

d'où l'on tire pour $m \geqq 2$, en ayant égard à l'équation (49),

$$(61) \qquad B(m)\{1 - (-1)^m\} = 0.$$

En faisant dans cette égalité

$$m = 2n + 1,$$

nous retrouvons la formule (57).

Soit maintenant a un nombre entier positif, et définissons un groupe de fonctions

$$\chi(z, 0), \chi(z, 1), \chi(z, 2), \ldots$$

au moyen de l'égalité

$$(62) \qquad \chi(z, m) = a^{m-1}\sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{z+r}{a}, m\right) - a^{m-1}\sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right),$$

où $m \geqq 0$. En différentiant cette égalité, on a

$$(63) \qquad \chi'(z, m) = a^{m-2}\sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi'\left(\frac{z+r}{a}, m\right).$$

Remplaçant m par $m+1$ et différentiant de nouveau, nous aurons, pour $m \geqq 0$,

$$\chi''(z, m+1) = a^{m-2} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi''\left(\frac{z+r}{a}, m+1\right) \tag{64}$$

ou, d'après l'équation (17),

$$\chi''(z, m+1) = a^{m-2} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi'\left(\frac{z+r}{a}, m\right). \tag{65}$$

Des équations (63) et (65) on tire pour $m \geqq 0$

$$\chi''(z, m+1) = \chi'(z, m). \tag{66}$$

D'après les équations (62) et (18) on a

$$\chi(z, 0) = 0 \tag{67}$$

et

$$\chi(0, m) = 0 \tag{68}$$

pour $m \geqq 0$, et de l'équation (62) on tire pour $m \geqq 0$

$$\chi(1, m) = a^{m-1} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r+1}{a}, m\right) - a^{m-1} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right) \tag{69}$$

et par suite, en introduisant $r-1$ au lieu de r dans la première somme du second membre,

$$\chi(1, m) = a^{m-1} \sum_{r=1}^{r=a} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right) - a^{m-1} \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right) = a^{m-1} \varphi(1, m), \tag{70}$$

d'où l'on tire d'après les formules (20) et (21)

$$\chi(1, 1) = 1 \tag{71}$$

et

$$\chi(1, m) = 0 \tag{72}$$

pour $m \geqq 2$. En appliquant le théorème I aux équations (66), (67), (68), (71), (72), on a, pour $m \geqq 0$,

$$\chi(z, m) = \varphi(z, m), \tag{73}$$

et par suite l'équation (62) nous donne, pour $m \geqq 0$,

$$\sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{z+r}{a}, m\right) = \frac{\varphi(z, m)}{a^{m-1}} + \sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{r}{a}, m\right). \tag{74}$$

En différentiant par rapport à z les deux membres de cette équation et en remplaçant m par $m+1$, nous aurons, pour $m \geqq 0$,

$$\sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi'\left(\frac{z+r}{a}, m+1\right) = \frac{\varphi'(z, m+1)}{a^{m-1}}, \tag{75}$$

d'où l'on tire, à l'aide de la formule (5),

$$\sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(\frac{z+r}{a}, m\right) = \frac{\varphi(z, m) - (a^m - 1)B(m)}{a^{m-1}}. \tag{76}$$

Introduisant dans l'équation (76) az au lieu de z, on aura ce théorème:

Théorème VIII. Si l'on désigne par a un nombre entier positif, on a pour $m \geqq 0$

$$\sum_{r=0}^{r=a-1} \varphi\left(z + \frac{r}{a}, m\right) = \frac{\varphi(az, m) - (a^m - 1)B(m)}{a^{m-1}}.$$

Au moyen de ce théorème nous pouvons calculer la valeur de la fonction $\varphi(z, m)$ pour $z = \frac{1}{2}$; en effet, substituons

$$z = 0, \qquad a = 2$$

dans la formule démontrée, nous en tirerons

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, m\right) = -\frac{(2^m - 1)B(m)}{2^{m-1}} \tag{77}$$

pour $m \geqq 0$. Désignons par n un nombre entier positif quelconque, on obtiendra des équations (77) et (57)

$$\varphi\left(\frac{1}{2}, 2n+1\right) = 0. \tag{78}$$

Si l'on désigne par z une quantité quelconque et par v une quantité qui remplit la condition

$$|v| < 2\pi,$$

l'expression

$$v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}$$

peut être développée en série convergente ordonnée suivant les puissances de v, et par suite nous aurons pour ces valeurs de v une égalité de la forme

$$(79)\qquad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}=\chi(z,0)+\chi(z,1)v+\chi(z,2)v^2+\ldots,$$

où $\chi(z,0)$, $\chi(z,1)$, $\chi(z,2)$, ... sont des fonctions de z. Pour $v=0$ on en tire

$$(80)\qquad \chi(z,0)=0,$$

et par suite on aura

$$(81)\qquad \chi'(z,0)=0.$$

Différentiant les deux membres de l'équation (79) par rapport à z, nous aurons, en divisant les deux membres par v,

$$(82)\qquad \frac{ve^{zv}}{e^v-1}=\chi'(z,1)+\chi'(z,2)v+\chi'(z,3)v^2+\ldots.$$

Faisant $v=0$, on en tire

$$(83)\qquad \chi'(z,1)=1$$

et, par conséquent,

$$(84)\qquad \chi''(z,1)=0.$$

Différentiant les deux membres de l'équation (82) par rapport à z, et divisant les deux membres par v, on a donc

$$(85)\qquad \frac{ve^{zv}}{e^v-1}=\chi''(z,2)+\chi''(z,3)v+\chi''(z,4)v^2+\ldots.$$

Des équations (81), (82), (84), (85) on obtient pour $m\geqq 0$ la formule

$$(86)\qquad \chi''(z,m+1)=\chi'(z,m).$$

Pour $z = 0$ on déduit de l'équation (79)

$$(87) \qquad 0 = \chi(0, 0) + \chi(0, 1)v + \chi(0, 2)v^2 + \ldots,$$

et par suite on aura pour $m \geqq 0$

$$(88) \qquad \chi(0, m) = 0.$$

En faisant $z = 1$ dans l'équation (79), nous en tirerons

$$(89) \qquad v = \chi(1, 0) + \chi(1, 1)v + \chi(1, 2)v^2 + \ldots,$$

et par conséquent on obtiendra, en égalant les uns aux autres les coefficients des puissances de v dans les deux membres,

$$(90) \qquad \chi(1, 1) = 1$$

et

$$(91) \qquad \chi(1, m) = 0$$

pour $m \geqq 2$. Appliquons maintenant le théorème I aux équations (86), (80), (88), (90), (91), nous en déduirons pour $m \geqq 0$

$$(92) \qquad \chi(z, m) = \varphi(z, m),$$

et par suite nous obtiendrons de l'équation (79) la formule

$$(93) \qquad v\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} = \varphi(z, 0) + \varphi(z, 1)v + \varphi(z, 2)v^2 + \ldots,$$

qui subsiste pour toutes les valeurs de z et pour $|v| < 2\pi$.

En divisant les deux membres de cette équation par v, on aura

$$(94) \qquad \frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi(z, k)v^{k-1}$$

et par suite, en différentiant par rapport à z,

$$(95) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \varphi'(z, k)v^{k-1}.$$

Remplaçons k par $k + 1$ dans le second membre de cette équation, nous aurons

(96) $$\frac{ve^{zv}}{e^v - 1} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \varphi'(z, k + 1)v^k$$

ou, d'après l'équation (5),

(97) $$\frac{ve^{zv}}{e^v - 1} = \sum_{k=0}^{k=\infty} \{\varphi(z, k) + B(k)\}v^k.$$

Pour $z = 0$ on en tire

(98) $$\frac{v}{e^v - 1} = B(0) + B(1)v + B(2)v^2 + \ldots.$$

Par là le théorème suivant est démontré:

Théorème IX. Si l'on désigne par z une quantité quelconque et par v une quantité qui satisfait à l'inégalité

$$|v| < 2\pi,$$

on aura

$$v\frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} = \varphi(z, 0) + \varphi(z, 1)v + \varphi(z, 2)v^2 + \ldots$$

et

$$\frac{v}{e^v - 1} = B(0) + B(1)v + B(2)v^2 + \ldots.$$

En faisant dans les formules ainsi démontrées

$$v = 1,$$

nous trouverons que pour une valeur quelconque de la variable z la somme de toutes les fonctions Bernoulliennes

$$\varphi(z, 0), \varphi(z, 1), \varphi(z, 2), \ldots$$

est égale à

$$\frac{e^z - 1}{e - 1},$$

et que la somme de tous les nombres Bernoulliens

$$B(0), B(1), B(2), \ldots.$$

est égale à

$$\frac{1}{e-1}.$$

Maintenant nous développerons les fonctions Bernoulliennes en des séries trigonométriques, et pour ce but nous ferons usage des formules connues

$$\frac{e^{a\pi(2z-1)}+e^{-a\pi(2z-1)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=\frac{1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos 2k\pi z}{a^2+k^2}, \tag{99}$$

qui est vraie pour $0 \leqq z \leqq 1$, et

$$\frac{e^{a\pi(2z-1)}-e^{-a\pi(2z-1)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\sin 2k\pi z}{a^2+k^2}, \tag{100}$$

qui subsiste pour $0 < z < 1$, a étant une quantité réelle quelconque. Nous introduisons aussi une fonction $\mu(z, m)$, définie pour toutes les valeurs réelles de z et pour tous les nombres entiers positifs m par les égalités

$$\mu(z, m) = 0 \tag{101}$$

pour $m \geqq 2$, mais

$$\mu(z, 1) = \frac{1}{2}, \tag{102}$$

si z est un nombre entier pair,

$$\mu(z, 1) = 0, \tag{103}$$

si z n'est pas un nombre entier, et

$$\mu(z, 1) = -\frac{1}{2}, \tag{104}$$

si z est un nombre entier impair.

Au moyen de la fonction $\mu(z, m)$ l'équation (100) peut se mettre sous la forme

$$\frac{e^{a\pi(2z-1)}-e^{-a\pi(2z-1)}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}=-2\mu(z, 1)-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{k\sin 2k\pi z}{a^2+k^2}, \tag{105}$$

et cette équation subsiste évidemment pour $0 \leqq z \leqq 1$. En ajoutant les équations (99) et (105) et en y substituant

$$a = \frac{v}{2\pi},$$

nous en obtiendrons pour $0 \leqq z \leqq 1$ la formule

$$(106) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = -v\mu(z, 1) - \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4k\pi v \sin 2k\pi z - 2v^2 \cos 2k\pi z}{4k^2\pi^2 + v^2},$$

d'où l'on tire après quelques réductions faciles

$$(107) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = -v\mu(z, 1) - \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{ve^{2k\pi zi}}{2k\pi i - v} - \frac{ve^{-2k\pi zi}}{2k\pi i + v} \right\}.$$

Si l'on impose à la quantité v la condition

$$|v| < 2\pi,$$

on aura

$$(108) \qquad \frac{ve^{2k\pi zi}}{2k\pi i - v} = e^{2k\pi zi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{v}{2k\pi i} \right)^n$$

et

$$(109) \qquad -\frac{ve^{-2k\pi zi}}{2k\pi i + v} = e^{-2k\pi zi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{-v}{2k\pi i} \right)^n;$$

par conséquent, nous obtiendrons de l'équation (107)

$$(110) \quad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = -v\mu(z, 1) - \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{v}{2k\pi i} \right)^n \{e^{2k\pi zi} + (-1)^n e^{-2k\pi zi}\}$$

ou, d'après l'équation (101),

$$(111) \quad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = -\sum_{n=1}^{n=\infty} \mu(z, n) v^n - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{v^n}{(2\pi i)^n} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi zi} + (-1)^n e^{-2k\pi zi}}{k^n}.$$

Des équations (93) et (98) on déduit par addition

$$(112) \qquad \frac{ve^{zv}}{e^v - 1} - 1 = \sum_{n=1}^{n=\infty} \{\varphi(z, n) + B(n)\} v^n,$$

et en égalant les uns aux autres les coefficients de v^m dans les seconds membres des équations (111) et (112), on obtiendra pour $0 \leqq z \leqq 1$ et pour $m \geqq 1$ la formule

$$(113) \qquad \varphi(z, m) = -B(m) - \mu(z, m) - \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi z i} + (-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème X. Si l'on désigne par m un nombre entier positif quelconque et par z une quantité réelle, qui satisfait aux conditions

$$0 < z < 1,$$

on aura

$$\varphi(z, m) = -B(m) - \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi z i} + (-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m};$$

pour $m \geqq 2$ cette formule subsiste encore pour $z = 0$ et pour $z = 1$.

Si l'on désigne par n un nombre entier positif, nous obtiendrons de ce théorème pour

$$n = 1, \quad 0 < z < 1$$

et pour

$$n \geqq 2, \quad 0 \leqq z \leqq 1$$

la formule

$$(114) \qquad \varphi(z, 2n-1) = -B(2n-1) + \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n-1}};$$

de même, pour

$$n \geqq 1, \quad 0 \leqq z \leqq 1,$$

nous aurons

$$(115) \qquad \varphi(z, 2n) = -B(2n) - \frac{2(-1)^n}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n}}.$$

Pour $z = 0$ on déduit du théorème X et de l'équation (19) le théorème suivant:

Théorème XI. Si l'on désigne par m un nombre entier supérieur ou égal à 2, on aura

$$B(m) = -\frac{1 + (-1)^m}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^m}.$$

Soit n un nombre entier positif, et faisons $m = 2n + 1$ dans cette formule, nous retrouverons l'équation (57); en y faisant $m = 2n$, nous aurons pour $n \geqq 1$

$$(116) \qquad B(2n) = \frac{2(-1)^{n-1}}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2n}},$$

d'où résulte ce corollaire:

Corollaire. Si l'on désigne par n un nombre entier positif quelconque, l'expression

$$\frac{1}{\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{k^{2n}}$$

est une quantité rationnelle.

De la formule (116) on peut aussi conclure que le nombre $B(2n)$ a le même signe que $(-1)^{n-1}$.

Maintenant nous évaluerons la somme de la série

$$\frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi x i} + (-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m},$$

où l'on désigne par x une quantité réelle quelconque et par m un nombre entier positif. A cet effet nous introduisons la fonction numérique

$$E(x),$$

que nous définissons de la manière suivante. Par $E(x)$ nous désignons le plus grand des nombres entiers qui ne surpassent pas la quantité réelle x, de sorte que l'on aura

$$(117) \qquad 0 \leqq x - E(x) < 1.$$

Cela posé, substituons dans la formule (113)

$$z = x - E(x),$$

nous en tirerons

$$(118) \qquad \frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{e^{2k\pi x i} + (-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$

$$= -B(m) - \mu\{x - E(x)\,,\, m\} - \varphi\{x - E(x)\,,\, m\},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XII. Si l'on désigne par x une quantité réelle quelconque et par m un nombre entier positif quelconque, on aura

$$\frac{1}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{e^{2k\pi x i}+(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$
$$=-B(m)-\mu\{x-E(x),\, m\}-\varphi\{x-E(x),\, m\}.$$

Corollaire. Si l'on désigne par x une quantité réelle et rationnelle quelconque et par m un nombre entier positif quelconque, l'expression

$$\frac{1}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{e^{2k\pi x i}+(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$

est une quantité réelle et rationnelle.

Dans ce qui suit nous appliquerons les formules précédentes à l'évaluation de quelques intégrales définies. En mettant l'équation (5) sous la forme

$$\varphi(z\,,\, m)=\varphi'(z\,,\, m+1)-B(m),$$

et en intégrant entre les limites $z=0$ et $z=c$, où l'on désigne par c une quantité finie quelconque, on aura pour $m\geqq 0$

$$(119)\qquad \int_0^c\varphi(z\,,\, m)dz=\varphi(c\,,\, m+1)-B(m)c.$$

Remplaçons c par $c+1$ dans cette équation et combinons entre elles les formules ainsi obtenues, nous trouverons

$$(120)\qquad \int_c^{c+1}\varphi(z\,,\, m)dz=\varphi(c+1\,,\, m+1)-\varphi(c\,,\, m+1)-B(m)$$

ou, d'après l'équation (50),

$$(121)\qquad \int_c^{c+1}\varphi(z\,,\, m)dz=\frac{c^m}{\Gamma(m+1)}-B(m),$$

formule qui subsiste pour $m\geqq 0$. Pour $c=0$ on en tire, en supposant que $m\geqq 1$,

$$(122)\qquad \int_0^1\varphi(z\,,\, m)dz=-B(m).$$

Cela établi, nous évaluerons l'intégrale

$$\int_0^c \varphi(z, m) e^{-az} dz,$$

où a et c sont des quantités finies quelconques, excepté que a ne soit pas nul. Posons, à cet effet, pour $m \geqq 0$

$$f(m) = a^m \int_0^c \varphi(z, m) e^{-az} dz, \tag{123}$$

nous aurons

$$f(0) = 0. \tag{124}$$

Intégrant par parties, nous tirons de l'équation (123)

$$\begin{aligned} f(m) &= - a^{m-1} \int_0^c \varphi(z, m) de^{-az} \\ &= - a^{m-1} \Big|_0^c \varphi(z, m) e^{-az} + a^{m-1} \int_0^c \varphi'(z, m) e^{-az} dz \end{aligned} \tag{125}$$

et, par suite, en supposant $m \geqq 1$ et en employant les équations (5) et (19),

$$f(m) = - a^{m-1} \varphi(c, m) e^{-ac} + a^{m-1} \int_0^c \{\varphi(z, m-1) + B(m-1)\} e^{-az} dz. \tag{126}$$

Des équations (126) et (123) on tire

$$f(m) - f(m-1) = - a^{m-1} \varphi(c, m) e^{-ac} + B(m-1) a^{m-2} (1 - e^{-ac}); \tag{127}$$

en remplaçant dans cette équation m par

$$1, 2, 3, \ldots, m-1, m,$$

et en ajoutant les résultats ainsi obtenus, nous en obtiendrons pour $m \geqq 1$, en ayant égard à l'équation (124),

$$f(m) = - e^{-ac} \sum_{h=1}^{h=m} \varphi(c, h) a^{h-1} + (1 - e^{-ac}) \sum_{h=1}^{h=m} B(h-1) a^{h-2} \tag{128}$$

ou d'après l'équation (123), si on remplace dans la seconde somme h par $h + 1$,

$$(129)\qquad \int_0^c \varphi(z\,,\,m)e^{-az}dz = -\frac{e^{-ac}}{a^m}\sum_{h=1}^{h=m}\varphi(c\,,\,h)a^{h-1} + \frac{1-e^{-ac}}{a^{m+1}}\sum_{h=0}^{h=m-1}B(h)a^h,$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 1$ et pour toutes les valeurs finies de a et c, excepté pour $a = 0$. Nous ferons deux applications de cette formule.

1) Supposons que la partie réelle de la quantité a soit positive, nous obtiendrons de l'équation (129), en faisant croître c vers l'infini positif,

$$(130)\qquad \int_0^\infty \varphi(z\,,\,m)e^{-az}dz = \frac{1}{a^{m+1}}\sum_{h=0}^{h=m-1}B(h)a^h$$

pour $m \geqq 1$. Désignons par ψ une quantité réelle qui satisfait aux inégalités

$$-\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2},$$

et faisons dans l'équation (130)

$$a = \cos\psi + i\sin\psi,$$

nous en déduirons

$$(131)\qquad \int_0^\infty \varphi(z\,,\,m)e^{-z\cos\psi - iz\sin\psi}dz$$
$$= \sum_{h=0}^{h=m-1} B(h)\{\cos(m+1-h)\psi - i\sin(m+1-h)\psi\}.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires dans cette équation, nous en tirerons

$$(132)\qquad \int_0^\infty \varphi(z\,,\,m)e^{-z\cos\psi}\cos(z\sin\psi)dz = \sum_{h=0}^{h=m-1} B(h)\cos(m+1-h)\psi$$

et

$$(133)\qquad \int_0^\infty \varphi(z\,,\,m)e^{-z\cos\psi}\sin(z\sin\psi)dz = \sum_{h=0}^{h=m-1} B(h)\sin(m+1-h)\psi,$$

formules qui sont vraies pour

$$m \geqq 1, \qquad -\frac{\pi}{2} < \psi < \frac{\pi}{2}.$$

Multiplions les deux membres de l'équation (130) par a^{m+1}, et supposons que

$$|a| < 2\pi,$$

nous en obtiendrons pour $m = \infty$

$$\lim_{m=\infty} a^{m+1}\int_0^\infty \varphi(z\,,\,m)e^{-az}dz = \sum_{h=0}^{h=\infty} B(h)a^h \tag{134}$$

ou, d'après l'équation (98),

$$\lim_{m=\infty} a^{m+1}\int_0^\infty \varphi(z\,,\,m)e^{-az}dz = \frac{a}{e^a - 1}, \tag{135}$$

formule qui subsiste si la partie réelle de la quantité a est positive, et que le module de a soit inférieur à 2π. Pour $a = 1$ on déduit des équations (130) et (135) la formule

$$\int_0^\infty \varphi(z\,,\,m)e^{-z}dz = \sum_{h=0}^{h=m-1} B(h), \tag{136}$$

qui est vraie pour $m \geqq 1$, et

$$\lim_{m=\infty} \int_0^\infty \varphi(z\,,\,m)e^{-z}dz = \frac{1}{e-1}. \tag{137}$$

2) En faisant dans l'équation (129) $c = 1$ et en y appliquant les formules (20) et (21), nous aurons pour $m \geqq 1$

$$\int_0^1 \varphi(z\,,\,m)e^{-az}dz = -\frac{e^{-a}}{a^m} + \frac{1 - e^{-a}}{a^{m+1}} \sum_{h=0}^{h=m-1} B(h)a^h, \tag{138}$$

et en substituant dans cette équation

$$a = 2k\pi i,$$

où l'on désigne par k un nombre entier réel différent de 0, nous trouverons pour $m \geqq 1$

$$\int_0^1 \varphi(z\,,\,m)e^{-2k\pi zi}dz = -\frac{1}{(2k\pi i)^m}. \tag{139}$$

Désignons par n un nombre entier positif quelconque, nous obtiendrons de l'équation (139) les formules suivantes

$$\int_0^1 \varphi(z, 2n-1)\cos 2k\pi z dz = 0, \tag{140}$$

$$\int_0^1 \varphi(z, 2n-1)\sin 2k\pi z dz = \frac{(-1)^n}{(2k\pi)^{2n-1}}, \tag{141}$$

$$\int_0^1 \varphi(z, 2n)\cos 2k\pi z dz = \frac{(-1)^{n-1}}{(2k\pi)^{2n}}, \tag{142}$$

$$\int_0^1 \varphi(z, 2n)\sin 2k\pi z dz = 0. \tag{143}$$

Faisons dans l'équation (119)

$$c = \frac{1}{2},$$

nous aurons pour $m \geqq 0$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, m)dz = \varphi\left(\frac{1}{2}, m+1\right) - \frac{B(m)}{2} \tag{144}$$

et, par suite, d'après l'équation (77),

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \varphi(z, m)dz = -\frac{B(m)}{2} - \left(2 - \frac{1}{2^m}\right)B(m+1). \tag{145}$$

Soit maintenant h une quantité réelle et désignons par $f(z)$ une fonction de la variable z telle que les fonctions

$$f(z), f'(z), f''(z), \ldots, f^{m+1}(z)$$

soient finies et continues entre les limites $z = h$ et $z = h + 1$. En appliquant la formule (5) à l'identité

$$\frac{d}{dz}\{\varphi(z, r+1)f^{r+1}(h+z)\} = \varphi(z, r+1)f^{r+2}(h+z) + \varphi'(z, r+1)f^{r+1}(h+z), \tag{146}$$

où $r \geqq 0$, nous en tirerons

$$(147)\qquad \frac{d}{dz}\{\varphi(z, r+1)f^{r+1}(h+z)\}$$
$$= B(r)f^{r+1}(h+z) + \varphi(z, r+1)f^{r+2}(h+z) + \varphi(z, r)f^{r+1}(h+z).$$

Multiplions les deux membres de cette équation par $(-1)^r dx$, et intégrons entre les limites 0 et 1, nous aurons, en observant l'équation (19),

$$(148)\qquad (-1)^r\varphi(1, r+1)f^{r+1}(h+1) = (-1)^r B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$-(-1)^{r+1}\int_0^1 \varphi(z, r+1)f^{r+2}(h+z)dz + (-1)^r\int_0^1 \varphi(z, r)f^{r+1}(h+z)dz,$$

formule qui subsiste évidemment pour $r \geqq 0$, en employant la notation

$$f^0(z) = f(z).$$

Soit maintenant m un nombre entier positif, et substituons dans l'équation (148)

$$r = 0, 1, 2, \ldots, m-1;$$

en ajoutant les égalités ainsi obtenues, nous aurons, d'après les formules (18), (20), (21),

$$(149)\qquad f'(h+1) = \sum_{r=0}^{r=m-1}(-1)^r B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$-(-1)^m\int_0^1 \varphi(z, m)f^{m+1}(h+z)dz$$

et, par conséquent,

$$(150)\qquad f'(h+1) = \sum_{r=0}^{r=m}(-1)^r B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$-(-1)^m\int_0^1\{\varphi(z, m) + B(m)\}f^{m+1}(h+z)dz.$$

Puisque on a

$$(-1)^r B(r) = B(r)$$

pour $r = 0$ et pour $r \geqq 2$, mais

$$(-1)^r B(r) = B(r) + 1$$

pour $r = 1$, nous obtiendrons de l'équation (150)

$$(151) \qquad f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$- (-1)^m \int_0^1 \{\varphi(z, m) + B(m)\} f^{m+1}(h+z)dz,$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 1$. Introduisons dans l'intégrale $z - h$ au lieu de z, nous en conclurons

$$(152) \qquad f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$- (-1)^m \int_h^{h+1} \{\varphi(z-h, m) + B(m)\} f^{m+1}(z)dz.$$

Or, h étant un nombre entier, on a d'après le théorème X pour $m \geqq 1$ et pour $h < z < h + 1$

$$(153) \qquad \varphi(z-h, m) + B(m) = -\frac{1}{(2\pi i)^m} \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{s^m},$$

et, par suite, on obtiendra de l'équation (152)

$$(154) \qquad f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(h+1) - f^r(h)\}$$
$$+ \frac{(-1)^m}{(2\pi i)^m} \int_h^{h+1} f^{m+1}(z) \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{s^m} dz.$$

Désignons maintenant par k un nombre entier positif et supposons que la fonction $f(z)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m + 1$ soient finies et continues entre les limites $z = 0$ et $z = k$; en faisant dans l'équation (154) h successivement égal à $0, 1, 2, \ldots, k - 1$, et en ajoutant les égalités ainsi obtenues, nous obtiendrons

$$(155) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\}$$
$$+ \frac{(-1)^m}{(2\pi i)^m} \int_0^k f^{m+1}(z) \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{e^{2s\pi z i} + (-1)^m e^{-2s\pi z i}}{s^m} dz,$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XIII. Soit $f(z)$ une fonction de la variable réelle z, désignons par k et m deux nombres entiers positifs, et supposons que les fonctions

$$f(z)\,,\,f'(z)\,,\,f''(z)\,,\,\ldots\,,\,f^{m+1}(z)$$

soient finies et continues entre les limites $z=0$ et $z=k$, nous aurons

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(k)-f^r(0)\}$$

$$+\frac{(-1)^m}{(2\pi i)^m}\int_0^k f^{m+1}(z)\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{2s\pi zi}+(-1)^m e^{-2s\pi zi}}{s^m}\,dz.$$

La quantité

$$(-1)^m\frac{e^{2s\pi zi}+(-1)^m e^{-2s\pi zi}}{i^m}$$

étant comprise entre les limites 2 et -2, on aura pour $m\geqq 2$

$$\frac{(-1)^m}{i^m}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{e^{2s\pi zi}+(-1)^m e^{-2s\pi zi}}{s^m} = 2\theta_1\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^m}, \tag{156}$$

où $-1\leqq\theta_1\leqq 1$, et par suite on obtiendra du théorème précédent

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(k)-f^r(0)\} + \frac{2}{(2\pi)^m}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^m}\int_0^k\theta_1 f^{m+1}(z)dz. \tag{157}$$

En supposant que la dérivée $f^{m+1}(z)$ ne change pas de signe entre $z=0$ et $z=k$, on a

$$\begin{aligned}\int_0^k\theta_1 f^{m+1}(z)dz &= \theta_2\int_0^k f^{m+1}(z)dz \\ &= \theta_2\{f^m(k)-f^m(0)\},\end{aligned} \tag{158}$$

où la quantité θ_2, qui est une valeur moyenne des quantités θ_1, satisfait aux inégalités

$$-1<\theta_2<1,$$

et des équations (157) et (158) on tire

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=m} B(r)\{f^r(k)-f^r(0)\} + \frac{2\theta_2}{(2\pi)^m}\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{1}{s^m}\{f^m(k)-f^m(0)\}. \tag{159}$$

Désignons par n un nombre entier positif quelconque et faisons dans l'équation (159)

$$m = 2n, \qquad \theta_2 = (-1)^n \theta,$$

nous en obtiendrons, en employant l'équation (116),

$$(160) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=2n} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\} - \theta B(2n)\{f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\},$$

où $-1 < \theta < 1$, et où l'on suppose que $f^{2n+1}(z)$ ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = k$.

Supposons en outre que les dérivées $f^{2n+2}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ soient finies et continues, et que $f^{2n+3}(z)$ ne change pas de signe entre $z = 0$ et $z = k$, nous trouverons, en remplaçant n par $n + 1$ dans l'équation (160),

$$(161) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=2n+2} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\}$$
$$- \theta_1 B(2n+2)\{f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)\},$$

où $-1 < \theta_1 < 1$, et par conséquent

$$(162) \qquad \sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=2n} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\}$$
$$+ (1 - \theta_1) B(2n+2)\{f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)\},$$

et des équations (160) et (162) on conclura

$$(163) \qquad - \theta B(2n)\{f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\}$$
$$= (1 - \theta_1) B(2n+2)\{f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)\}.$$

Puisque, d'après l'équation (116), les nombres $B(2n)$ et $B(2n+2)$ sont de signes contraires, nous obtiendrons de l'équation (163)

$$(164) \qquad \theta\{f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\} = P\{f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)\},$$

en désignant par P une quantité positive. Maintenant nous distinguerons les deux cas suivants:

1) Si les dérivées $f^{2n+1}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ ont le même signe entre $z = 0$

et $z = k$, les fonctions $f^{2n}(z)$ et $f^{2n+2}(z)$ seront simultanément croissantes ou décroissantes entre $z = 0$ et $z = k$; par suite les différences

$$f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\ ,\ f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)$$

auront le même signe, et de l'équation (164) on peut conclure que

$$\theta > 0; \tag{165}$$

or, θ étant compris entre -1 et 1, on en déduit

$$0 < \theta < 1. \tag{166}$$

2) Si les dérivées $f^{2n+1}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ sont de signes contraires entre $z = 0$ et $z = k$, l'une des deux fonctions $f^{2n}(z)$ et $f^{2n+2}(z)$ croîtra, pendant que l'autre décroîtra entre $z = 0$ et $z = k$, et par suite les différences

$$f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\ ,\ f^{2n+2}(k) - f^{2n+2}(0)$$

seront de signes contraires, et de l'équation (164) on obtiendra

$$\theta < 0, \tag{167}$$

et par suite, θ étant compris entre -1 et 1,

$$-1 < \theta < 0. \tag{168}$$

Par là le théorème suivant est démontré:

Théorème XIV. Soit $f(z)$ une fonction de la variable réelle z, et désignons par k et n deux nombres entiers positifs; supposons que les fonctions

$$f(z)\ ,\ f'(z)\ ,\ f''(z)\ ,\ \ldots\ ,\ f^{2n+1}(z)$$

soient finies et continues entre les limites $z = 0$ et $z = k$, et que $f^{2n+1}(z)$ ne change pas de signe dans cet intervalle, on aura

$$\sum_{h=0}^{h=k-1} f'(h) = \sum_{r=0}^{r=2n} B(r)\{f^r(k) - f^r(0)\} - \theta B(2n)\{f^{2n}(k) - f^{2n}(0)\},$$

où $-1 < \theta < 1$. Si, en outre, les dérivées $f^{2n+2}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ sont finies et continues entre $z = 0$ et $z = k$, et que $f^{2n+3}(z)$ ne change pas de signe dans cet intervalle, on aura

$$0 < \theta < 1,$$

si les dérivées $f^{2n+1}(z)$ et $f^{2n+3}(z)$ ont le même signe, mais

$$-1 < \theta < 0,$$

si ces dérivées sont de signes contraires dans le sus-dit intervalle.

II. *Généralisation des nombres et des fonctions de Bernoulli.*

Dans ses leçons sur l'arithmétique supérieure M. KRONECKER a introduit la notion de discriminant fondamental, et il a donné ce nom à tout nombre entier Δ, qui n'est pas un nombre carré positif et qui est de l'une des trois formes suivantes:

$$1) \qquad \Delta = P, \quad \text{où} \quad P \equiv 1, \quad \text{mod } 4,$$

$$2) \qquad \Delta = 4P, \quad \text{où} \quad P \equiv -1, \quad \text{mod } 4,$$

$$3) \qquad \Delta = 8P, \quad \text{où} \quad P \equiv 1, \quad \text{mod } 2,$$

pourvu que P désigne dans tous ces cas un nombre entier, qui n'est divisible par aucun nombre carré plus grand que l'unité. En désignant par

$$\left(\frac{\Delta}{r}\right)$$

le symbole de LEGENDRE, généralisé par M. KRONECKER, et par ε le signe du nombre Δ, en sorte que

$$(169) \qquad \varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon\Delta > 0,$$

on a les formules suivantes:

$$(170) \qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) = 0,$$

$$(171) \qquad \left(\frac{\Delta}{r + h\varepsilon\Delta}\right) = \left(\frac{\Delta}{r}\right) \quad \text{pour} \quad r > 0,\ h > 0,$$

$$(172) \qquad \left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta - r}\right) = \varepsilon\left(\frac{\Delta}{r}\right) \quad \text{pour} \quad 0 < r < \varepsilon\Delta,$$

$$(173) \qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{2k\pi ri}{\varepsilon\Delta}} = \left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta}) \quad \text{pour} \quad k > 0,$$

où la valeur de la racine carrée $(\sqrt{\Delta})$ est fixée par les formules:

$$(174) \qquad (\sqrt{\Delta}) = |\sqrt{\Delta}|$$

pour $\Delta > 0$, et

$$(175) \qquad (\sqrt{\Delta}) = i|\sqrt{-\Delta}|$$

pour $\Delta < 0$.

Cela posé, nous généraliserons les nombres et les fonctions de BERNOULLI, conformément au théorème IX, par les définitions suivantes:

Définition 3. En développant l'expression

$$\frac{v}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

en série ordonnée suivant les puissances croissantes de v, nous obtiendrons pour $|v| < 2\pi$ une équation de la forme

$$(176) \qquad \frac{v}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = B(0, \Delta) + B(1, \Delta)v + B(2, \Delta)v^2 + \ldots,$$

et nous appellerons les coefficients $B(0, \Delta), B(1, \Delta), B(2, \Delta), \ldots$ les nombres Bernoulliens appartenant au discriminant Δ.

Définition 4. En développant pour $|v| < 2\pi$ la fonction

$$v \frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

en série ordonnée suivant les puissances croissantes de v, nous aurons une équation de la forme

$$(177) \qquad v \frac{e^{zv} - 1}{e^v - 1} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

$$= \varphi(z, 0, \Delta) + \varphi(z, 1, \Delta)v + \varphi(z, 2, \Delta)v^2 + \ldots,$$

et nous appellerons les coefficients $\varphi(z, 0, \Delta), \varphi(z, 1, \Delta), \varphi(z, 2, \Delta), \ldots$ les fonctions Bernoulliennes appartenant au discriminant Δ.

Au moyen de la formule (170) l'équation (176) peut être mise sous la forme

$$(178)\qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)v\frac{e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}-1}{e^v-1}=\sum_{k=0}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k$$

ou, en y appliquant l'équation (93),

$$(179)\qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,\,k\right)v^k=\sum_{k=0}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k,$$

d'où l'on tire, en renversant l'ordre des deux membres,

$$(180)\qquad \sum_{k=0}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k=\sum_{k=0}^{k=\infty}v^k\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,\,k\right).$$

En égalant les uns aux autres les coefficients de v^m dans les deux membres de cette équation, nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(181)\qquad B(m\,,\,\Delta)=\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}\,,\,m\right),$$

et des équations (24) et (181) on déduit les formules

$$(182)\qquad B(0,\Delta)=0,\qquad B(m,\Delta)=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{B(m-k)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots k\,.\,(\varepsilon\Delta)^k}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r^k$$

pour $m \geqq 1$.

De ces équations on peut conclure, que les nombres Bernoulliens $B(m\,,\,\Delta)$ sont des quantités rationnelles. Mettons maintenant l'équation (181) sous la forme

$$(183)\qquad B(m,\Delta)=\sum_{r=1}^{r<\frac{\varepsilon\Delta}{2}}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta},m\right)+\sum_{r>\frac{\varepsilon\Delta}{2}}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta},m\right)$$

et introduisons dans la seconde somme $\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r, nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(184)\qquad B(m\,,\,\Delta)=\sum_{r=1}^{r<\frac{\varepsilon\Delta}{2}}\left\{\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta},m\right)+\left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta-r}\right)\varphi\left(1-\frac{r}{\varepsilon\Delta},m\right)\right\},$$

d'où l'on tire pour $m \geqq 2$, en y appliquant les équations (49) et (172),

$$(185) \qquad B(m, \Delta) = \{1 + \varepsilon(-1)^m\} \sum_{r=1}^{r<\frac{\varepsilon\Delta}{2}} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right).$$

Si l'on désigne par n un nombre entier positif, on obtiendra des équations (184) et (185) pour $\Delta > 0$

$$(186) \qquad B(2n - 1, \Delta) = 0,$$

et pour $\Delta < 0$

$$(187) \qquad B(2n, \Delta) = 0.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation (173), nous aurons pour $\Delta > 0$

$$(188) \qquad \sum_{r=1}^{r=\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \cos\frac{2k\pi r}{\Delta} = \left(\frac{\Delta}{k}\right) |\sqrt{\Delta}|,$$

et pour $\Delta < 0$

$$(189) \qquad \sum_{r=1}^{r=-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sin\frac{2k\pi r}{-\Delta} = \left(\frac{\Delta}{k}\right) |\sqrt{-\Delta}|.$$

Substituons dans la somme

$$\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}},$$

$\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r, nous en déduirons

$$(190) \qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{\varepsilon\Delta - r}\right) e^{v - \frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

où, d'après la formule (172),

$$(191) \qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \varepsilon \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{-\frac{rv}{\varepsilon\Delta}+v},$$

d'où l'on tire

$$(192) \qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}} + \varepsilon e^{-\frac{rv}{\varepsilon\Delta}+v} \right\}$$

et, par conséquent,

$$(193)\qquad \frac{v}{e^v-1}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}=\frac{v}{2}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}-\frac{v}{2}}+\varepsilon e^{-\frac{rv}{\varepsilon\Delta}+\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}}-e^{-\frac{v}{2}}}.$$

Des équations (176) et (193) on déduit

$$(194)\qquad \sum_{k=0}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k=\frac{v}{2}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\frac{e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}-\frac{v}{2}}+\varepsilon e^{-\frac{rv}{\varepsilon\Delta}+\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}}-e^{-\frac{v}{2}}}.$$

Distinguons maintenant les deux cas suivants:

1) Pour $\Delta > 0$ nous obtiendrons de l'équation (99) par les substitutions

$$a=\frac{v}{2\pi},\qquad z=\frac{r}{\Delta}$$

la formule

$$(195)\qquad \frac{v}{2}\cdot\frac{e^{\frac{rv}{\Delta}-\frac{v}{2}}+e^{-\frac{rv}{\Delta}+\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}}-e^{-\frac{v}{2}}}=1+2v^2\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{\cos\frac{2k\pi r}{\Delta}}{v^2+4k^2\pi^2},$$

qui subsiste pour $0 < r < \Delta$, et des équations (194) et (195) on tire

$$(196)\qquad \sum_{k=0}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k=\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{2v^2}{v^2+4k^2\pi^2}\sum_{r=1}^{r=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\cos\frac{2k\pi r}{\Delta}$$

ou, suivant l'équation (188),

$$(197)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k=2\left|\sqrt{\Delta}\right|\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\left(\frac{v}{2k\pi}\right)^2\frac{1}{1+\left(\frac{v}{2k\pi}\right)^2}$$

et, par suite,

$$(198)\qquad \sum_{k=1}^{k=\infty}B(k\,,\,\Delta)v^k=2\left|\sqrt{\Delta}\right|v^2\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{(2k\pi)^2}-2\left|\sqrt{\Delta}\right|v^4\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{(2k\pi)^4}$$
$$+2\left|\sqrt{\Delta}\right|v^6\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{1}{(2k\pi)^6}-\cdots.$$

En égalant les uns aux autres les coefficients de v^m dans les deux membres de cette équation, nous retrouverons la formule (186), et du reste nous obtiendrons, en désignant par n un nombre entier positif,

$$(199) \qquad B(2n\,,\,\Delta) = \frac{2(-)^{n-1}|\sqrt{\Delta}|}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}}.$$

De cette formule on peut conclure que pour $\Delta > 0$ le nombre $B(2n, \Delta)$ a le même signe que $(-1)^{n-1}$.

2) Pour $\Delta < 0$ nous obtiendrons de l'équation (100) par les substitutions

$$a = \frac{v}{2\pi}, \qquad z = -\frac{r}{\Delta}$$

la formule

$$(200) \qquad \frac{v}{2} \cdot \frac{e^{-\frac{rv}{\Delta}-\frac{v}{2}} - e^{\frac{rv}{\Delta}+\frac{v}{2}}}{e^{\frac{v}{2}} - e^{-\frac{v}{2}}} = -4\pi v \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{k \sin \frac{2k\pi r}{-\Delta}}{v^2 + 4k^2\pi^2},$$

qui est vraie pour $0 < r < -\Delta$, et des équations (194) et (200) on déduit

$$(201) \qquad \sum_{k=0}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta) v^k = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4\pi v k}{v^2 + 4k^2\pi^2} \sum_{r=1}^{r=-\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \sin \frac{2k\pi r}{-\Delta}$$

ou, d'après l'équation (189),

$$(202) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta) v^k = -2|\sqrt{-\Delta}| \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{v}{2k\pi} \frac{1}{1 + \left(\frac{v}{2k\pi}\right)^2}$$

ou

$$(203) \qquad \sum_{k=1}^{k=\infty} B(k\,,\,\Delta) v^k = -2|\sqrt{-\Delta}|\, v \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{2k\pi} + 2|\sqrt{-\Delta}|\, v^3 \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{(2k\pi)^3}$$
$$- 2|\sqrt{-\Delta}|\, v^5 \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{(2k\pi)^5} + \cdots$$

Egalons les coefficients de v^m dans les deux membres de cette équation, nous retrouverons la formule (187), et du reste nous obtiendrons, n étant un nombre entier positif,

$$(204) \qquad B(2n-1\,,\,\Delta) = \frac{2(-1)^n|\sqrt{-\Delta}|}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n-1}}.$$

De cette formule on conclura que pour $\Delta < 0$ le nombre $B(2n-1, \Delta)$ a le même signe que $(-1)^n$.

Les quatre équations (186), (187), (199), (204) peuvent être remplacées par la seule formule

$$(205) \qquad B(m, \Delta) = -\frac{\{1 + \varepsilon(-1)^m\}(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^m},$$

et des équations (181), (182), (205) résulte le théorème suivant:

Théorème XV. Si l'on désigne par Δ un discriminant fondamental quelconque et par ε le signe du nombre Δ, en sorte que

$$\varepsilon = \pm 1, \qquad \varepsilon\Delta > 0,$$

les nombres Bernoulliens $B(0, \Delta)$, $B(1, \Delta)$, $B(2, \Delta)$, ... sont des quantités réelles et rationnelles, et l'on aura pour $m \geqq 0$

$$B(m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right),$$

et pour $m \geqq 1$ on aura

$$B(m, \Delta) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots k \cdot (\varepsilon\Delta)^k} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r^k$$

et

$$B(m, \Delta) = -\frac{\{1 + \varepsilon(-1)^m\}(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^m}.$$

Corollaire 1. Si l'on désigne par Δ un discriminant fondamental positif et par n un nombre entier positif, l'expression

$$\frac{\sqrt{\Delta}}{\pi^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n}}$$

est une quantité rationnelle.

Corollaire 2. Si l'on désigne par Δ un discriminant fondamental négatif et par n un nombre entier positif, l'expression

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{\pi^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{1}{k^{2n-1}}$$

est une quantité rationnelle.

De l'équation (176) on tire

$$(206) \qquad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}$$

$$=\left(\frac{zv}{1}+\frac{z^2v^2}{1.2}+\frac{z^3v^3}{1.2.3}+\ldots\right)[B(0,\Delta)+B(1,\Delta)v+B(2,\Delta)v^2+\ldots]$$

ou, en exécutant le produit dans le second membre,

$$(207) \qquad v\frac{e^{zv}-1}{e^v-1}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}=\frac{B(0,\Delta)z}{1}v+\left\{\frac{B(0,\Delta)z^2}{1.2}+\frac{B(1,\Delta)z}{1}\right\}v^2$$

$$+\left\{\frac{B(0,\Delta)z^3}{1.2.3}+\frac{B(1,\Delta)z^2}{1.2}+\frac{B(2,\Delta)z}{1}\right\}v^3+\ldots.$$

Egalons les coefficients de v^m dans les seconds membres des équations (177) et (207), nous aurons

$$(208) \qquad \varphi(z,0,\Delta)=0, \qquad \varphi(z,m,\Delta)=\sum_{k=1}^{k=m}\frac{B(m-k,\Delta)z^k}{1.2.3\ldots k}$$

pour $m \geqq 1$, et de ces équations on déduit pour $m \geqq 0$

$$(209) \qquad \varphi(0,m,\Delta)=0.$$

Des formules (208) on peut conclure que les fonctions Bernoulliennes $\varphi(z,m,\Delta)$ sont des fonctions entières, dont les coefficients sont des nombres rationnels. En mettant l'équation (177) sous la forme

$$(210) \qquad \sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi(z,k,\Delta)v^k=\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{v\frac{e^{\left(z+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)v}-1}{e^v-1}-v\frac{e^{\frac{rv}{\varepsilon\Delta}}-1}{e^v-1}\right\},$$

et en y appliquant l'équation (93), nous aurons

$$(211) \quad \sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi(z,k,\Delta)v^k=\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{\sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi\left(z+\frac{r}{\varepsilon\Delta},k\right)v^k-\sum_{k=0}^{k=\infty}\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta},k\right)v^k\right\}$$

$$=\sum_{k=0}^{k=\infty}v^k\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{\varphi\left(z+\frac{r}{\varepsilon\Delta},k\right)-\varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta},k\right)\right\}.$$

En égalant les coefficients de v^m dans les deux membres de cette équation, on aura pour $m \geqq 0$

$$(212) \qquad \varphi(z, m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{\varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right)\right\},$$

et des équations (181) et (212) on tire pour $m \geqq 0$

$$(213) \qquad \varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) + \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right).$$

Remplaçons dans l'équation (213) m par $m + 1$, nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(214) \quad \varphi(z, m + 1, \Delta) = -B(m + 1, \Delta) + \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m + 1\right)$$

et par suite, en différentiant par rapport à z,

$$(215) \qquad \varphi'(z, m + 1, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi'\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m + 1\right)$$

ou, par application de la formule (5),

$$(216) \qquad \varphi'(z, m + 1, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{B(m) + \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right)\right\}$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right).$$

Des équations (213) et (216) on tire pour $m \geqq 0$

$$(217) \qquad \varphi'(z, m + 1, \Delta) = \varphi(z, m, \Delta) + B(m, \Delta).$$

De l'équation (213) on obtiendra pour $m \geqq 1$

$$(218) \qquad \varphi(z + 1, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta)$$

$$= \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left\{\varphi\left(z + 1 + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right)\right\}$$

et par suite, en y appliquant l'équation (50),

$$(219) \quad \varphi(z + 1, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta) = \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}.$$

Remplaçons dans l'équation (212) z par $-z$, nous aurons pour $m \geqq 0$

$$(220) \qquad \varphi(-z, m, \Delta) = \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \varphi\left(-z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\},$$

d'où l'on tire, en y substituant $\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r et en employant l'équation (172),

$$(221) \qquad \varphi(-z, m, \Delta)$$

$$= \varepsilon \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \varphi\left(1 - z - \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(1 - \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\};$$

pour $m \geqq 2$ on en déduit par application de l'équation (49)

$$(222) \quad \varphi(-z, m, \Delta) = \varepsilon(-1)^m \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{ \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) - \varphi\left(\frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \right\},$$

et des équations (212) et (222) on obtiendra pour $m \geqq 2$

$$(223) \qquad \varphi(-z, m, \Delta) = \varepsilon(-1)^m \varphi(z, m, \Delta),$$

formule qui subsiste encore pour $m = 0$ et pour $m = 1$, car d'après les équations (208) on a

$$(224) \qquad \varphi(z, 0, \Delta) = 0, \qquad \varphi(z, 1, \Delta) = 0.$$

De ce qui précède résulte ce théorème:

Théorème XVI. Si l'on désigne par Δ un discriminant fondamental quelconque et par ε le signe du nombre Δ, en sorte que

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon\Delta > 0,$$

les fonctions Bernoulliennes $\varphi(z, 0, \Delta)$, $\varphi(z, 1, \Delta)$, $\varphi(z, 2, \Delta)$, ... sont des fonctions entières dont les coefficients sont des nombres rationnels, et ces fonctions jouissent des propriétés suivantes:

$$\varphi(z, 0, \Delta) = 0, \qquad \varphi(z, m, \Delta) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B(m-k, \Delta) z^k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k} \quad \text{pour } m \geqq 1,$$

$$\varphi(0, m, \Delta) = 0 \quad \text{pour } m \geqq 0,$$

$$\varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) + \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \quad \text{pour } m \geqq 0,$$

$$\varphi'(z, m+1, \Delta) = \varphi(z, m, \Delta) + B(m, \Delta) \quad \text{pour } m \geqq 0,$$

$$\varphi(z+1, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta) = \frac{1}{\Gamma(m)} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}$$

$$\text{pour } m \geqq 1,$$

$$\varphi(-z, m, \Delta) = \varepsilon(-1)^m \varphi(z, m, \Delta) \quad \text{pour } m \geqq 0.$$

En remplaçant z par $z+s$ dans la formule (219), nous en obtiendrons pour $m \geqq 1$

$$(225) \qquad \sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z + \frac{r+s\varepsilon\Delta}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}$$

$$= \Gamma(m)\{\varphi(z+s+1, m, \Delta) - \varphi(z+s, m, \Delta)\}$$

ou d'après l'équation (171), k étant un nombre entier positif,

$$\sum_{s=0}^{s=k-1} \sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r+s\varepsilon\Delta}\right)\left(z + \frac{r+s\varepsilon\Delta}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}$$

$$= \Gamma(m) \sum_{s=0}^{s=k-1} \{\varphi(z+s+1, m, \Delta) - \varphi(z+s, m, \Delta)\}.$$

Posons dans le premier membre de cette équation

$$r + s\varepsilon\Delta = h,$$

nous en déduirons pour $m \geqq 1$ la formule

$$(226) \qquad \sum_{h=0}^{h=k\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{h}\right)\left(z + \frac{h}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z+k, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta)\},$$

ce qui démontre ce théorème:

Théorème XVII. Soit Δ un discriminant fondamental, et ε le signe du nombre Δ, et désignons par m et k deux nombres entiers positifs, on aura

$$\sum_{h=0}^{h=k\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{h}\right)\left(z + \frac{h}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1} = \Gamma(m)\{\varphi(z+k, m, \Delta) - \varphi(z, m, \Delta)\}.$$

Pour $z = 0$ on en déduit

$$(227)\qquad \sum_{h=0}^{h=k\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{h}\right)h^{m-1} = \Gamma(m)(\varepsilon\Delta)^{m-1}\varphi(k\,,\,m\,,\,\Delta),$$

formule qui subsiste pour $m \geqq 1$, $k \geqq 1$.

Désignons maintenant par x une quantité réelle quelconque, nous obtiendrons du théorème XII et de l'équation (170)

$$(228)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^m}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{e^{2k\pi\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)i}+(-1)^m e^{-2k\pi\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)i}}{k^m}$$

$$= -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

ou

$$(229)\qquad \frac{1}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\frac{1}{k^m}\left\{e^{2k\pi x i}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{2k\pi r i}{\varepsilon\Delta}}+(-1)^m e^{-2k\pi x i}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{-\frac{2k\pi r i}{\varepsilon\Delta}}\right\}$$

$$= -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}.$$

D'après l'équation (173) on a

$$(230)\qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{\frac{2k\pi r i}{\varepsilon\Delta}} = \left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta})$$

et, par conséquent, en introduisant dans le premier membre $\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r et en employant l'équation (172),

$$(231)\qquad \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)e^{-\frac{2k\pi r i}{\varepsilon\Delta}} = \varepsilon\left(\frac{\Delta}{k}\right)(\sqrt{\Delta}).$$

Des équations (229), (230), (231) nous tirons

$$(232)\qquad \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi x i}+\varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$
$$= -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$
$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\},$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XVIII. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque, et ε le signe du nombre Δ, de sorte que

$$\varepsilon = \pm 1\ ,\ \varepsilon\Delta > 0,$$

et désignons par x une quantité réelle quelconque et par m un nombre entier positif quelconque, on aura

$$\frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi x i}+\varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$
$$= -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$
$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}.$$

Corollaire. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque et ε le signe du nombre Δ, et désignons par x une quantité réelle et rationnelle quelconque et par m un nombre entier positif quelconque, l'expression

$$\frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi x i}+\varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}$$

est une quantité réelle et rationnelle.

Au moyen de l'équation (232) nous développerons la fonction $\varphi(z, m, \Delta)$ en série, et pour ce but nous distinguerons les deux cas suivants:

1) Pour $m \geqq 2$ la dernière somme du second membre de l'équation (232) est nulle d'après l'équation (101), et en désignant par z une quantité qui satisfait aux conditions

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\varepsilon\Delta}, \tag{233}$$

on aura évidemment pour $r = 1, 2, 3, \ldots, \varepsilon\Delta - 1$

$$0 \leqq z + \frac{r}{\varepsilon\Delta} \leqq 1; \tag{234}$$

puisque on a

$$\varphi(0, m) = \varphi(1, m),$$

on en obtiendra

$$\varphi\left\{z + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\} = \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right). \tag{235}$$

Cela établi, introduisons dans l'équation (232) $x = z$, nous en tirerons

$$\frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi z i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m} = -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \tag{236}$$

et par suite, d'après l'équation (213),

$$\varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) - \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi z i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m}, \tag{237}$$

formule qui subsiste pour

$$m \geqq 2, \quad -\frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\varepsilon\Delta}.$$

2) Pour $m = 1$ on a

$$\varphi(z, 1) = z,$$

et de l'équation (232) on obtiendra pour toutes les valeurs réelles de x

$$\begin{aligned} &\frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} - \varepsilon e^{-2k\pi x i}}{k} \\ &= -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)\right\} \\ &\quad - \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \mu\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\}. \end{aligned} \tag{238}$$

En désignant par z une quantité qui satisfait aux inégalités

$$(239)\qquad -\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

on aura pour $r = 1, 2, 3, \ldots, \varepsilon\Delta - 1$

$$(240)\qquad 0 < z + \frac{r}{\varepsilon\Delta} < 1,$$

et, par conséquent,

$$(241)\qquad E\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right) = 0,$$

et de l'équation (103) on tire

$$(242)\qquad \mu\left\{z + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\} = 0.$$

Cela posé, substituons dans l'équation (238) $x = z$, nous en déduirons

$$(243)\qquad \frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi zi} - \varepsilon e^{-2k\pi zi}}{k} = -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)$$

$$= -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(z + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, 1\right)$$

et, par suite, d'après l'équation (213),

$$(244)\qquad \varphi(z, 1, \Delta) = -B(1, \Delta) - \frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi zi} - \varepsilon e^{-2k\pi zi}}{k},$$

formule qui subsiste pour

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta}.$$

Des équations (237) et (244) résulte ce théorème:

Théorème XIX. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque, et ε le signe du nombre Δ, de sorte que

$$\varepsilon = \pm 1, \quad \varepsilon\Delta > 0,$$

et désignons par z une quantité qui satisfait aux inégalités

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

et par m un nombre entier positif quelconque, on aura

$$\varphi(z, m, \Delta) = -B(m, \Delta) - \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi z i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi z i}}{k^m};$$

pour $m \geqq 2$ cette formule subsiste encore pour $z = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}$ et pour $z = \frac{1}{\varepsilon\Delta}$.

Si l'on désigne par n un nombre entier positif, nous obtiendrons de ce théorème et des équations (186) et (187) pour $\Delta > 0$

$$(245) \qquad \varphi(z, 2n-1, \Delta) = \frac{2(-1)^n |\sqrt{\Delta}|}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n-1}},$$

$$(246) \qquad \varphi(z, 2n, \Delta) = -B(2n, \Delta) - \frac{2(-1)^n |\sqrt{\Delta}|}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n}},$$

et pour $\Delta < 0$

$$(247) \quad \varphi(z, 2n-1, \Delta) = -B(2n-1, \Delta) + \frac{2(-1)^n |\sqrt{-\Delta}|}{(2\pi)^{2n-1}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi z}{k^{2n-1}},$$

$$(248) \qquad \varphi(z, 2n, \Delta) = \frac{2(-1)^n |\sqrt{-\Delta}|}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi z}{k^{2n}}.$$

Ces quatre formules sont vraies pour tous les nombres entiers positifs n et pour

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq z \leqq \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

excepté que pour $n = 1$ les équations (245) et (247) subsistent seulement pour

$$-\frac{1}{\varepsilon\Delta} < z < \frac{1}{\varepsilon\Delta}.$$

En définissant pour toutes les valeurs réelles de la variable x une fonction $F(x)$ au moyen de l'équation

$$(249) \qquad F(x) = \frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} - \varepsilon e^{-2k\pi x i}}{k},$$

cette fonction aura évidemment les propriétés suivantes:

$$(250) \qquad F(x+1) = F(x), \qquad F(-x) = -\varepsilon F(x),$$

et des équations (238) et (170) on tire

$$(251)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r + \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)$$
$$-\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x+\frac{r}{\varepsilon\Delta}\right),\,1\right\}.$$

Si l'on désigne par x_0 une quantité qui satisfait aux conditions

$$(252)\qquad 0 \leqq x_0 < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

on obtiendra des équations (251) et (103)

$$(253)\qquad F(x_0) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r.$$

Cela établi, soit x une quantité réelle, et supposons que

$$(254)\qquad \frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq x < 1,$$

on peut mettre x sous la forme

$$(255)\qquad x = x_0 + \frac{s}{\varepsilon\Delta},$$

où x_0 satisfait aux inégalités (252), et où s est un nombre entier qui satisfait aux conditions

$$(256)\qquad 1 \leqq s \leqq \varepsilon\Delta - 1,$$

et de l'équation (255) on tire

$$(257)\qquad s = E(x\varepsilon\Delta).$$

Des équations (251) et (255) on déduit

$$(258)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r + \sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)E\left(x_0+\frac{s+r}{\varepsilon\Delta}\right)$$
$$-\sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\mu\left\{x_0+\frac{s+r}{\varepsilon\Delta}-E\left(x_0+\frac{s+r}{\varepsilon\Delta}\right),\,1\right\}$$

ou, en remplaçant r par $\varepsilon\Delta - r$ dans les deux dernières sommes et en employant les équations (170) et (172)

$$(259)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}r + \varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r}E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right)$$
$$- \varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r}\mu\left\{x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\}.$$

Puisque on a évidemment

$$(260)\qquad E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right) = 0$$

pour $r = 1, 2, 3, \ldots, s$, mais

$$(261)\qquad E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right) = -1$$

pour $r = s+1, s+2, \ldots, \varepsilon\Delta - 1, \varepsilon\Delta$, nous obtiendrons de l'équation (259)

$$(262)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}r - \varepsilon\sum_{r=s+1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r}$$
$$- \varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r}\mu\left\{x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\}.$$

De l'équation (170) on tire

$$(263)\qquad \sum_{r=s+1}^{r=\varepsilon\Delta}\binom{\Delta}{r} = -\sum_{r=0}^{r=s}\binom{\Delta}{r},$$

et, par suite, nous obtiendrons de l'équation (262)

$$(264)\qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}r + \varepsilon\sum_{r=0}^{r=s}\binom{\Delta}{r}$$
$$- \varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\binom{\Delta}{r}\mu\left\{x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right), 1\right\}.$$

Dans les cas, où x n'est pas multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$, on a d'après les équations (255) et (252)

$$o < x_0 < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

et des équations (264) et (103) on déduit

$$(265) \qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r + \varepsilon\sum_{r=0}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right);$$

mais si x est multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$, on a

$$x_0 = o,$$

et des équations (264), (102) et (103) on tire

$$(266) \qquad F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta}\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r + \varepsilon\sum_{r=0}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right) - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\Delta}{s}\right).$$

Les équations (265) et (266) ont été démontrées sous la supposition que

$$(267) \qquad \frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq x < 1,$$

et le nombre s, qui se trouve dans ces équations, est déterminé par l'égalité

$$(268) \qquad s = E(x\varepsilon\Delta).$$

Mais ces formules sont encore vraies pour

$$(269) \qquad o \leqq x < \frac{1}{\varepsilon\Delta};$$

on a, en effet, dans ce cas, d'après la formule (268)

$$(270) \qquad s = o,$$

et, par conséquent, les formules (265) et (266) se réduisent à l'équation (253). Par là nous avons démontré ces formules pour

$$(271) \qquad o \leqq x < 1,$$

et puisque les deux membres de ces formules ne se changent pas, en ajoutant à x un nombre entier positif quelconque, elles subsistent pour toutes les valeurs de x, qui satisfont à l'inégalité

$$x \geqq 0; \tag{272}$$

par suite nous pouvons énoncer ce théorème:

Théorème XX. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque, et ε le signe du nombre Δ, et posons pour toutes les valeurs réelles de x

$$F(x) = \frac{(\sqrt{\Delta})}{2\pi i} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} - \varepsilon e^{-2k\pi x i}}{k},$$

nous aurons

$$F(x+1) = F(x), \qquad F(-x) = -\varepsilon F(x);$$

et en employant la notation

$$s = E(\varepsilon \Delta x),$$

nous aurons pour $x \geqq 0$

$$F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r + \varepsilon \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right),$$

si x n'est pas multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$, mais

$$F(x) = -\frac{1}{\varepsilon\Delta} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r + \varepsilon \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\Delta}{s}\right),$$

si x est multiple de $\frac{1}{\varepsilon\Delta}$.

En séparant les parties réelles et imaginaires des deux membres de l'équation (249), nous aurons pour $\Delta > 0$

$$F(x) = \frac{|\sqrt{\Delta}|}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\sin 2k\pi x}{k}, \tag{273}$$

et pour $\Delta < 0$

$$F(x) = \frac{|\sqrt{-\Delta}|}{\pi} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{\cos 2k\pi x}{k}; \tag{274}$$

et en observant, que pour $\Delta > 0$

$$\sum_{r=1}^{r=\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r = 0,$$

nous obtiendrons du théorème précédent pour $\Delta > 0$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi x}{k} = \frac{\pi}{|\sqrt{\Delta}|}\sum_{r=0}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right), \tag{275}$$

si x n'est pas multiple $\frac{1}{\Delta}$, mais

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\sin 2k\pi x}{k} = \frac{\pi}{|\sqrt{\Delta}|}\left\{\sum_{r=0}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{s}\right)\right\}, \tag{276}$$

si x est multiple de $\frac{1}{\Delta}$, et pour $\Delta < 0$ nous aurons

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi x}{k} = \frac{\pi}{|\sqrt{-\Delta}|}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_{r=1}^{r=-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r - \sum_{r=0}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right)\right\}, \tag{277}$$

si x n'est pas multiple de $-\frac{1}{\Delta}$, mais

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{\cos 2k\pi x}{k} = \frac{\pi}{|\sqrt{-\Delta}|}\left\{\frac{1}{\Delta}\sum_{r=1}^{r=-\Delta-1}\left(\frac{\Delta}{r}\right)r - \sum_{r=0}^{r=s}\left(\frac{\Delta}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta}{s}\right)\right\}, \tag{278}$$

si x est multiple de $-\frac{1}{\Delta}$.

Dans ces quatre formules, qui subsistent pour $x \geqq 0$, l'on désigne par s le plus grand des nombres entiers qui ne surpassent pas $\varepsilon\Delta x$.

Dans ce qui suit, nous traiterons de la même manière les cas où l'on a

$$m \geqq 2; \tag{279}$$

en posant pour ces valeurs du nombre m

$$F(x) = \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m}\sum_{k=1}^{k=\infty}\left(\frac{\Delta}{k}\right)\frac{e^{2k\pi x i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m}, \tag{280}$$

la fonction $F(x)$ aura évidemment les propriétés

$$F(x+1) = F(x), \qquad F(-x) = \varepsilon(-1)^m F(x), \tag{281}$$

et du théorème XVIII et de l'équation (101) nous obtiendrons pour toutes les valeurs réelles de la variable x

$$(282)\qquad F(x) = -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x + \frac{r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x + \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}.$$

Cela posé, soit x_0 une quantité qui satisfait aux conditions (252), nous déduirons des équations (282) et (213)

$$(283)\quad F(x_0) = -\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(x_0 + \frac{r}{\varepsilon\Delta}, m\right) = -B(m, \Delta) - \varphi(x_0, m, \Delta).$$

En désignant par x une quantité qui satisfait aux inégalités (254), et en posant x sous la forme (255), nous tirerons de l'équation (282)

$$(284)\qquad F(x) = -\sum_{r=0}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x_0 + \frac{s+r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s+r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

ou, en introduisant dans la somme du second membre $\varepsilon\Delta - r$ au lieu de r,

$$(285)\qquad F(x) = -\varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left\{x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} - E\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}\right), m\right\}$$

et par suite, d'après les formules (260) et (261),

$$(286)\qquad \begin{aligned} F(x) = &-\varepsilon\sum_{r=1}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta}, m\right) \\ &-\varepsilon\sum_{r=s+1}^{r=\varepsilon\Delta} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(x_0 + \frac{s-r}{\varepsilon\Delta} + 1, m\right) \end{aligned}$$

ou d'après l'équation (255), en appliquant la formule (50) à la première somme du second membre de l'équation (286),

$$(287)\qquad \begin{aligned} F(x) = &-\varepsilon\sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\varphi\left(x - \frac{r}{\varepsilon\Delta} + 1, m\right) \\ &+ \frac{\varepsilon}{\Gamma(m)}\sum_{r=1}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(x - \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}. \end{aligned}$$

Remplaçons dans la première somme du second membre de cette équation r par $\varepsilon\Delta - r$, nous en obtiendrons au moyen de l'équation (213)

$$(288)\quad F(x) = -B(m, \Delta) - \varphi(x, m, \Delta) + \frac{\varepsilon}{\Gamma(m)} \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right)\left(x - \frac{r}{\varepsilon\Delta}\right)^{m-1}.$$

Pour la démonstration de cette formule nous avons supposé que

$$(289)\qquad \frac{1}{\varepsilon\Delta} \leqq x < 1,$$

et le nombre s, qui se trouve dans l'équation (288), est déterminé par l'égalité (257). Pour les valeurs de x qui satisfont aux conditions

$$(290)\qquad 0 \leqq x < \frac{1}{\varepsilon\Delta},$$

on a évidemment

$$(291)\qquad s = 0,$$

et, par suite, on peut conclure de l'équation (283), que la formule (288) subsiste encore dans ce cas.

Nous avons donc démontré cette formule pour

$$(292)\qquad 0 \leqq x < 1,$$

et puisque, d'après les équations (281) et (219) les deux membres de cette formule restent invariables en ajoutant à x l'unité positive, l'équation (288) est vrai pour toutes les valeurs de la variable x qui satisfont à l'inégalité

$$(293)\qquad x \geqq 0,$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Théorème XXI. Soit Δ un discriminant fondamental quelconque, et ε le signe du nombre Δ, et désignons par m un nombre entier supérieur ou égal à 2; en posant pour toutes les valeurs réelles de x

$$F(x) = \frac{(\sqrt{\Delta})}{(2\pi i)^m} \sum_{k=1}^{k=\infty} \left(\frac{\Delta}{k}\right) \frac{e^{2k\pi x i} + \varepsilon(-1)^m e^{-2k\pi x i}}{k^m},$$

on aura

$$F(x+1) = F(x), \qquad F(-x) = \varepsilon(-1)^m F(x),$$

et en employant la notation

$$s = E(\varepsilon \Delta x),$$

on aura pour $x \geqq 0$

$$F(x) = - B(m\, , \Delta) - \varphi(x\, , m\, , \Delta) + \frac{\varepsilon}{\Gamma(m)} \sum_{r=0}^{r=s} \left(\frac{\Delta}{r}\right) \left(x - \frac{r}{\varepsilon \Delta}\right)^{m-1}.$$

Nous avons démontré ce théorème pour $m \geqq 2$, mais puisque on a d'après les équations (181) et (224)

$$(294) \qquad B(1\, , \Delta) = \frac{1}{\varepsilon \Delta} \sum_{r=1}^{r=\varepsilon\Delta-1} \left(\frac{\Delta}{r}\right) r, \qquad \varphi(x\, , 1\, , \Delta) = 0,$$

on peut conclure du théorème XX, que le théorème XXI subsiste encore pour $m = 1$ dans tous les cas où x n'est pas multiple de $\frac{1}{\varepsilon \Delta}$.

Dans la première partie de ce mémoire, j'ai exposé les propriétés principales des nombres et des fonctions de Bernoulli. En terminant, j'indiquerai les travaux suivants sur ce sujet:

1. O. Schlömilch, *Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis.* Dritte Auflage 1879, p. 209—221.
2. Jules Tannery, *Introduction à la théorie des fonctions d'une variable.* 1886, p. 352—363.
3. O. Schlömilch, *Über die Bernoullische Funktion und deren Gebrauch bei der Entwickelung halbconvergenter Reihen.* (O. Schlömilch und B. Witzschel, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Erster Jahrgang 1856, p. 193—211.)
4. O. Schlömilch, *Über ein allgemeines Princip für Reihenentwickelungen.* (O. Schlömilch und B. Witzschel, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Zweiter Jahrgang 1857, p. 289—298.)
5. C. G. J. Jacobi, *De usu legitimo formulæ summatoriæ Maclaurinianæ.* (Journal de Crelle, t. 12, p. 263—272.)
6. Eisenlohe, *Entwickelung der Functionsweise der Bernoullischen Zahlen.* (Journal de Crelle, t. 28, p. 193—212.)

7. C. J. Malmsten, *Sur la formule*

$$hu'_x = \Delta u_x - \frac{h}{2}\Delta u'_x + \frac{B_1 h^2}{1 \cdot 2}\Delta u''_x - \frac{B_2 h^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\Delta u^{\mathrm{IV}}_x + \text{etc.}$$

(Journal de Crelle, t. 35, p. 55—82.)

Ce mémoire à été réimprimé dans les Acta mathematica, t. 5, p. 1—46.

8. *Zurückführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob-Bernoullische Function.* Von Herrn Dr. Raabe (Journal de Crelle, t. 42, p. 348—367).

9. *Über die Darstellung gewisser Functionen durch die Euler'sche Summenformel.* Von Herrn Rudolf Lipschitz (Journal de Crelle, t. 56, p. 11—26).

10. *Von einigen Summen- und Differenzenformeln und den Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn G. Bauer (Journal de Crelle, t. 58, p. 292—300).

11. *Lettre de M. Ch. Hermite à M. Borchardt sur la fonction de Jacob Bernoulli.* (Journal de Crelle, t. 79, p. 339—344.)

12. *Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt.* (Journal de Crelle, t. 81, p. 93—95.)

13. *Über eine Eigenschaft der Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn Stern in Göttingen (Journal de Crelle, t. 81, p. 290—294).

14. *Sur la formule de Maclaurin.* Extrait d'une lettre de M. Hermite à M. Borchardt (Journal de Crelle, t. 84, p. 64—69).

15. *Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.* Auszug aus einem Schreiben an Herrn Borchardt. Von Herrn Stern in Göttingen (Journal de Crelle, t. 84, p. 267—269).

16. *Table of the values of the first sixty-two numbers of Bernoulli.* By Professor I. C. Adams, M. A.. F. R. S. at Cambridge (Journal de Crelle, t. 85, p. 269—272).

17. *Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn Stern in Göttingen (Journal de Crelle, t. 88, p. 85—95).

18. *Zur Theorie der Eulerschen Zahlen.* Von Herrn A. Radicke in Bromberg (Journal de Crelle, t. 89, p. 257—261).

19. *Zur Theorie der Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn M. A. Stern in Göttingen (Journal de Crelle, t. 92, p. 349—350).

20. *Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.* Von Herrn I. Worpitzky (Journal de Crelle, t. 94, p. 203—232).

21. *Über die Bernoullischen Zahlen.* (Bemerkungen zur Abhandlung des Herrn Worpitzky, S. 203 u. flgde.) Von Kronecker (Journal de Crelle, t. 94, p. 268—269).

22. *Beiträge zu der Kenntniss der Bernoullischen Zahlen.* Von Herrn R. Lipschitz in Bonn (Journal de Crelle, t. 96, p. 1—16).

23. *Sur quelques fonctions symétriques et sur les nombres de Bernoulli,* par M. Leopold

KRONECKER (Journal de mathématiques de LIOUVILLE. Deuxième Série, t. 1, p. 385—391).

24. *Beiträge zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.* Von M. A. STERN (Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band 23. 1878).

25. *Beiträge zur Theorie der Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.* Zweiter Beitrag. Von M. A. STERN (Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Band 26. 1880).

26. *Über eine bei Anwendung der partiellen Integration nützliche Formel.* Von L. KRONECKER (Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1885).