SUR LES ÉQUATIONS FONDAMENTALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE POUR LES CORPS EN MOUVEMENT

PAR

H. HERTZ

à BONN.

(Traduit de l'allemand des Annales de Wiedemann.[1])

J'ai publié récemment[2] une exposition des phénomènes électromagnétiques dans les corps en repos. Elle coïncide dans le fond avec la théorie de MAXWELL, mais pour la forme, elle arrive à un ordre systématique meilleur. J'admettais dès le commencement ce principe sévèrement respecté: La force électrique et magnétique en chaque point correspond à un état particulier du milieu qui s'y trouve, les causes qui déterminent cet état et ses variations doivent être cherchées seulement dans le voisinage immédiat, à l'exclusion de toute action à distance. Je supposais de plus que l'état électrique et magnétique est déterminé en chaque point par une seule grandeur dirigée et j'ai montré que cette restriction n'exclut de notre étude que des phénomènes d'une importance secondaire. L'introduction du potentiel dans les équations fondamentales était évitée.

Reste à savoir si l'observation stricte des mêmes principes et de la même restriction permet d'étendre la théorie aux corps en mouvement. Observons d'abord qu'en parlant des corps en mouvement nous n'entendons ordinairement que le mouvement de la matière pondérable. Mais les mouvements simultanés de l'éther ne sauraient être sans influence, et sur cette influence nous n'avons aucune donnée. D'après cela il est bien entendu que sans l'introduction d'une hypothèse arbitraire sur le mouvement de l'éther, la question proposée ne peut pas être traitée

[1] t. 41, 1890.

[2] H. HERTZ, Wiedemann's Annalen, p. 577. 1890.

pour le moment. Il faut avouer de plus que les quelques indications que l'on a sur le mouvement de l'éther nous font présumer qu'à la question posée en toute rigueur on doive répondre par la négative. Il paraît résulter de ces indications que l'éther se meut dans l'intérieur de la matière pondérable, indépendamment de celle-ci; il est même presque impossible d'éviter cette hypothèse, en considération du fait qu'on ne peut enlever l'éther d'un espace clos. Si donc nous voulons adapter notre théorie aux idées les plus vraisemblables, nous devons considérer en chaque point de l'espace les états électromagnétiques de l'éther et de la matière comme indépendants. Les phénomènes électromagnétiques appartiennent alors à la classe de ceux qu'on ne peut pas traiter sans l'introduction de deux grandeurs dirigées pour chacun des états électrique et dynamique.

Il en est autrement si nous nous limitons au cercle des phénomènes électromagnétiques proprement dits et qui se prêtent aux observations exactes. Parmi les phénomènes ainsi restreints, il ne s'en trouve pas qui nous oblige à donner à l'éther un mouvement indépendant de celui du corps qui le renferme; cela résulte bien de la circonstance que cette classe de phénomènes ne fournit pas de donnée sur la grandeur du déplacement réciproque de l'éther et du corps. Ainsi les phénomènes électriques et magnétiques proprement dits peuvent se traiter avec cette notion qu'un tel déplacement n'existe pas, et que l'éther supposé dans la matière pondérable se meut avec celui-ci. Cette notion permet de ne considérer en chaque point de l'espace que les états d'un milieu unique, elle permet donc de répondre affirmativement à la question posée. Nous l'adoptons pour le présent mémoire. Si la théorie reconstruite sur ces principes ne possède pas l'avantage de donner la réponse exacte ou même une réponse déterminée à toute question, elle donne du moins pour chacune des réponses possibles, c'est à dire qui ne sont en contradiction, ni avec les phénomènes observés dans les corps en mouvement, ni avec les principes empruntés à la théorie des corps en repos.

Ainsi, d'après nos hypothèses, il y a lieu d'attribuer à chaque point de l'espace une vitesse déterminée unique. Ses composantes α, β, γ seront supposées finies et continues d'un point à un autre. Nous admettons aussi, il est vrai, des variations discontinues, mais nous traitons ce cas comme la limite d'une variation continue très rapide. En outre nous assujettissons toute discontinuité possible à la restriction que celle-ci ne conduise pas à la formation d'un espace vide, et cette condition équivaut à dire que les 3 dérivées $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\beta}{dy}, \frac{d\gamma}{dz}$ restent finies. Si en un point se trouve de la matière palpable, nous empruntons à celle-ci les valeurs des α, β, γ; dans le cas contraire, nous pouvons attribuer aux α, β, γ toute valeur arbitraire compatible avec les mouvements donnés à la limite de l'espace dénué de matière ponderable, et d'un égal ordre de grandeur. Nous pouvons par exemple mettre pour α, β, γ les valeurs qui se trouveraient dans l'éther si celui-ci se déplaçait comme un gaz arbitrairement choisi. Pour le reste, toutes les notations du travail mentionné plus haut conserveront ici la même signification. Nous désignons donc par L, M, N les composantes de la force magnétique, par X, Y, Z celles de la force électrique, par $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ celles de la polarisation magnétique, par $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ celles de la polarisation électrique, par u, v, w les composantes du courant électrique. Nous rappelons encore que les grandeurs $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, u, v, w$ sont des fonctions linéaires des composantes des forces, savoir:

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{L} &= \mu_{11}L + \mu_{12}M + \mu_{13}N, \\ \mathfrak{M} &= \mu_{21}L + \mu_{22}M + \mu_{23}N, \\ \mathfrak{N} &= \mu_{31}L + \mu_{32}M + \mu_{33}N, \end{aligned} \qquad \text{(b)} \quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \varepsilon_{11}X + \varepsilon_{12}Y + \varepsilon_{13}Z, \\ \mathfrak{Y} &= \varepsilon_{21}X + \varepsilon_{22}Y + \varepsilon_{23}Z, \\ \mathfrak{Z} &= \varepsilon_{31}X + \varepsilon_{32}Y + \varepsilon_{33}Z, \end{aligned}$$

$$\text{(c)} \quad \begin{aligned} u &= \lambda_{11}(X - X') + \lambda_{12}(Y - Y') + \lambda_{13}(Z - Z'), \\ v &= \lambda_{21}(X - X') + \lambda_{22}(Y - Y') + \lambda_{23}(Z - Z'), \\ w &= \lambda_{31}(X - X') + \lambda_{32}(Y - Y') + \lambda_{33}(Z - Z'). \end{aligned}$$

Les constantes $\mu, \varepsilon, \lambda$ sont respectivement les constantes de magnétisation, les constantes diélectriques et les conductibilités; X', Y', Z' sont les composantes de la force électromotrice. En chaque point des corps, toutes ces grandeurs doivent être considérées comme des propriétés caractéristiques du milieu. L'énergie magnétique de l'unité de volume était égale à $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)$, l'énergie électrique à $\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{X}X + \mathfrak{Y}Y + \mathfrak{Z}Z)$; la somme de ces deux expressions formait l'énergie totale de l'unité de volume. Nous rappelons en outre que la suite des états électromagnétiques dans les corps fixes était déterminée par la condition que, sans cesse et en tous les points de l'espace infini, ils satisfassent aux équations:

$$
\text{(d)}\quad
\begin{aligned}
A\frac{d\mathfrak{L}}{dt} &= \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz},\\
A\frac{d\mathfrak{M}}{dt} &= \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx},\\
A\frac{d\mathfrak{N}}{dt} &= \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy},
\end{aligned}
\qquad
\text{(e)}\quad
\begin{aligned}
A\frac{d\mathfrak{X}}{dt} &= \frac{dM}{dz} - \frac{dN}{dy} - 4\pi Au,\\
A\frac{d\mathfrak{Y}}{dt} &= \frac{dN}{dx} - \frac{dL}{dz} - 4\pi Av,\\
A\frac{d\mathfrak{Z}}{dt} &= \frac{dL}{dy} - \frac{dM}{dx} - 4\pi Aw.
\end{aligned}
$$

Dans tout cela, nous nous contentions de voir dans la force électrique et la force magnétique un moyen pour marquer des états particuliers de la matière en repos. De même, dans le présent travail, ces grandeurs seront adoptées pour définir les mêmes états de la matière mobile. Ici comme dans mon premier mémoire, les polarisations électrique et magnétique ne seront regardées que comme un second moyen équivalent de définir ces états. De même les lignes de force qui, par leur densité et leurs direction, représentent les polarisations, n'auront aucune autre signification.

1. *Extension des équations fondamentales aux corps mobiles.*

D'après les équations (d), en chaque point d'un corps fixe, la variation de l'état magnétique avec le temps est exclusivement déterminée par la distribution de la force électrique dans le voisinage du point. Dans un corps mobile, à cette variation s'en ajoute à tout instant une deuxième; elle provient de la déformation que le mouvement fait éprouver au voisinage du point considéré. Nous admettons encore que l'influence du mouvement, considéré seul, est d'entraîner avec la matière les lignes de force magnétiques. Pour mieux préciser cette hypothèse principale, imaginons qu'à un instant donné l'état magnétique de la substance soit représenté par un système de lignes de force; dès lors. à tous les instants suivants, un système de lignes appliquées aux mêmes points matériels et considérées comme des lignes de forces, représenterait encore l'état magnétique, si l'influence seule du mouvement entrait en compte. L'énoncé correspondant s'applique aux variations que le mouvement fait éprouver à la polarisation électrique. Ces énoncés suffisent pour étendre aux corps mobiles la théorie développée pour les corps fixes; évidemment ils sont en concordance avec nos principes et on verra qu'ils comprennent les faits observés.

Pour mettre notre hypothèse en formule, considérons pendant le temps dt un élément de surface qui soit parallèle au plan yz à l'origine de l'élément de temps considéré, et entraîné dans le mouvement de la matière. Nous donnons aux lignes de force magnétiques une densité telle que, au commencement du temps dt, la surface considérée soit traversée par le nombre $\mathfrak{L}$ de celles-ci. Partout et toujours, on doit donc appeler $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ le nombre des lignes de force qui traversent une portion égale de surface parallèle aux plans yz, zx, xy. Le nombre des lignes de force qui traversent l'élément considéré change pour des causes diverses. Nous allons examiner séparément la part que fournit chacune d'elles. D'abord, si on imagine que l'élément de surface soit fixe, la variation est $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}dt$, $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$ désignant la vitesse de variation de $\mathfrak{L}$ en un point fixe par rapport à notre système de coordonnées. En second lieu l'élément de surface est emporté avec la vitesse α, β, γ vers un lieu où domine une autre valeur de $\mathfrak{L}$; de ce fait la variation monte à

$$\left(\alpha\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \beta\frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \gamma\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right)dt.$$

En troisième lieu, l'élément tourne avec la vitesse $\frac{d\alpha}{dy}$ autour de l'axe z et avec la vitesse $\frac{d\alpha}{dz}$ autour de l'axe y; des lignes de force qui étaient primitivement parallèles à son plan viendront le traverser: la part due à cette cause est $-\left(\mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dy} + \mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz}\right)dt$. Enfin l'aire de l'élément augmente avec la vitesse $\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}$ et par là le nombre considéré croît de $\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)dt$. Si les parts énumérées sont toutes égales à zéro, le nombre considéré ne peut pas varier; nous avons donc épuisé les causes de variation et comme toutes les parts sont très petites, leur somme répond à la variation totale. Mais nous pouvons partager celle-ci en parties qui ont une signification plus physique: la partie que produirait seul l'état présent des forces électriques dans le voisinage, et la partie due au mouvement seul. La première est, d'après les lois relatives aux conducteurs fixes, égale à

$\frac{1}{A}\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)dt$; la dernière est nulle d'après l'assertion apportée au début de ce paragraphe; la première seule représente donc bien la variation totale. Egalons les 2 expressions trouvées pour la variation totale, divisons par dt, multiplions par A, ajoutons et retranchons l'expression $\alpha\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\alpha\frac{d\mathfrak{N}}{dz}$; ordonnons, et opérons de même pour les autres composantes de la force magnétique et pour celles de la force électrique; nous obtenons le système suivant d'équations fondamentales pour les corps en mouvement:

$$
(1)\quad\left\{\begin{aligned}
&A\left\{\frac{d\mathfrak{L}}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{L}-\alpha\mathfrak{M})-\frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{N}-\gamma\mathfrak{L})+\alpha\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz},\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{M}}{dt}+\frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{M}-\beta\mathfrak{N})-\frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{L}-\alpha\mathfrak{M})+\beta\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx},\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{N}}{dt}+\frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{N}-\gamma\mathfrak{L})-\frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{M}-\beta\mathfrak{N})+\gamma\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dx}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(1')\quad\left\{\begin{aligned}
&A\left\{\frac{d\mathfrak{X}}{dt}+\frac{d}{dy}(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})-\frac{d}{dz}(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})+\alpha\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dM}{dz}-\frac{dN}{dy}-4\pi Au,\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{Y}}{dt}+\frac{d}{dz}(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})-\frac{d}{dx}(\beta\mathfrak{X}-\alpha\mathfrak{Y})+\beta\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dN}{dx}-\frac{dL}{dz}-4\pi Av,\\
&A\left\{\frac{d\mathfrak{Z}}{dt}+\frac{d}{dx}(\alpha\mathfrak{Z}-\gamma\mathfrak{X})-\frac{d}{dy}(\gamma\mathfrak{Y}-\beta\mathfrak{Z})+\gamma\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\right\}\\
&\qquad\qquad=\frac{dL}{dy}-\frac{dM}{dx}-4\pi Aw.
\end{aligned}\right.
$$

Elles sont complétées par les relations linéaires qui lient aux forces les polarisations et les composantes du courant. Les coefficients de ces relations doivent être regardés comme des fonctions de l'état variable de la matière mobile et par conséquent comme des fonctions du temps.

Notre manière d'établir les équations (1), (1') n'exige pas que le système de coordonnées employé soit fixe dans l'espace absolu. Les équations ne changeront donc pas de forme si on remplace le système primitivement choisi par tout autre système mobile à volonté dans l'espace; α, β, γ désigneront les composantes de la vitesse relative par rapport au nouveau système de coordonnées; les constantes $\varepsilon, \mu, \lambda, X', Y', Z'$ qui dépendent de la direction seront aussi, à chaque instant, relatives à ce nouveau système. Pour un ensemble de corps qui se meut comme un corps rigide, on peut par suite donner aux équations (1) et (1') continuellement la forme des équations des corps fixes: il suffit d'employer un système de coordonnées invariablement lié à celui des corps. Il résulte de là que le mouvement absolu d'un système de forme invariable n'a aucune influence sur son état électrodynamique intérieur, pourvu que tous les corps véritablement considérés, même l'éther, participent au mouvement. D'après cela, si une portion d'un système mobile se meut comme un corps rigide, les choses s'y passent comme dans un corps fixe. Si donc le mouvement considéré a toutefois une influence sur cette partie, cette influence ne peut provenir que des parties où se trouvent des déformations, de là elle se propage ensuite vers la partie qui se meut comme un corps rigide. Si par exemple une masse métallique solide est déplacée subitement dans un champ magnétique, immédiatement ou plutôt en même temps la surface et le voisinage seulement en sont influencés et des forces électriques y sont engendrées; ce n'est que secondairement, c'est à dire quelque peu après, que celles-ci se propagent dans l'intérieur de la masse et y produisent les courants.

Les équations établies sont, par le but et la forme, analogues à celles qu'a données VON HELMHOLTZ au tome 78 du Journal de Borchardt pour représenter le jeu des forces électriques et magnétiques dans les corps mobiles.[1] Les dénomiations lui sont en partie empruntées. Cependant nos équations diffèrent des siennes, non seulement par la forme,

[1] v. HELMHOLTZ, Gesammelte Abhandlungen, I, p. 745.

mais aussi par le fonds relativement à certains termes qui ne peuvent pas être examinés par l'expérience. MAXWELL lui-même me paraît avoir fait abstraction dans son système d'une série importante de phénomènes dans les corps en mouvement. Dans les nombreuses considérations qu'il consacre à ces phénomènes, il se borne aux cas ou se contente des rapprochements dont l'objet est de montrer que la distinction entre la théorie des forces à distance et celle de l'action de proche en proche n'est pas nécessaire.

2. *Signification physique des différents termes.*

Le système des équations (1) et (1′) nous donne la valeur future des polarisations en chaque point fixe de l'espace ou, si nous préférons, en chaque élément de la matière mobile, comme la conséquence déterminée des états électromagnétiques et du mouvement actuel dans le voisinage du point considéré. Telle est, d'après notre manière de voir, sa signification physique. D'ordinaire, on interprète tout autrement ces équations. On voit, à gauche, la cause dans les vitesses de changement des polarisations: à droite, la conséquence dans les forces induites. Cette opinion est née de cette circonstance que les polarisations et leurs changements nous sont connus plus tôt et plus clairement que les forces coexistantes; que par conséquent les membres gauches des équations sont les premiers au point de vue de notre connaissance. D'une façon générale, elle conduit à cette difficulté que les forces ne sont pas déterminées sans ambiguité par les vitesses de changement des polarisations, mais contiennent des termes indépendants de ces changements. La théorie usitée oppose ces parties comme des forces électrostatiques ou magnétiques aux forces électromagnetiques qui selon elle sont seules déterminées par nos équations. Quoique nous n'approuvions pas une telle séparation, il n'est cependant passans intérêt de montrer comment les différents termes de nos équations comprennent les forces partielles introduites par la théorie usitée. Dans ce but décomposons les forces sous la forme $X = X_1 + X_2$, $L = L_1 + L_2$, etc. et posons

$$
\begin{aligned}
X_1 &= A(\gamma\mathfrak{M} - \beta\mathfrak{N}), & L_1 &= A(\beta\mathfrak{Z} - \gamma\mathfrak{Y}),\\
Y_1 &= A(\alpha\mathfrak{N} - \gamma\mathfrak{L}), & M_1 &= A(\gamma\mathfrak{X} - \alpha\mathfrak{Z}),\\
Z_1 &= A(\beta\mathfrak{L} - \alpha\mathfrak{M}), & N_1 &= A(\alpha\mathfrak{Y} - \beta\mathfrak{X}).
\end{aligned}
\tag{2}
$$

De cette façon, les équations (1) et (1') donnent pour X_2, Y_2, Z_2, L_2, M_2, N_2 les relations qu'on obtient en y mettant ces lettres à la place de X, Y, Z, L, M, N et supposant dans les premiers membres le second et le troisième termes nuls. La résultante de X_1, Y_1, Z_1 est une force électrique qui survient quand on déplace un corps dans un champ magnétique et qui est perpendiculaire à la direction du mouvement et aux lignes de force magnétiques; c'est cette force que, dans un sens restreint, on a l'habitude d'appeler force électromotrice induite par le déplacement. Nous insistons sur ce point que, séparer celle-ci de la force totale ne peut avoir pour nous aucune signification physique, puisque nous nions que le champ magnétique puisse posséder dans l'intérieur d'un corps une vitesse relative par rapport à celui-ci. A la force X_1, Y_1, Z_1 correspond la force L_1, M_1, N_1 qui doit survenir dans un isolant, si celui-ci se déplace à travers les lignes de force d'un champ électrique; celle-ci n'est confirmée jusqu'ici par aucune expérience et n'existe pas dans l'ancienne électrodynamique.

Considérons maintenant la résultante de L_2, M_2, N_2 et imaginons dans ce but les solutions générales des équations relatives à ces grandeurs exprimées en fonction des quantités u, $\frac{d\mathfrak{X}}{dt}$, $\alpha\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$, etc. Si, dans ces solutions, on annule toutes ces quantités, il reste une première partie de la force qui ne provient pas des actions électrodynamiques. Les composantes de ce résidu possèdent évidemment un potentiel; c'est cette force qui, d'après les anciennes idées, est regardée comme une force à distance provenant de la masse magnétique. Une deuxième partie de la force totale sera donnée par cette partie de la solution complète qui s'évanouit en même temps que u, v, w. Elle comprend cette force magnétique à distance qui a l'apparence de provenir des courants électriques proprements dits. Nous obtenons toute la partie électrodynamique de la force L_2, M_2, N_2, si, dans l'expression de la deuxième partie, nous remplaçons $4\pi Au$ par

$$4\pi Au + A\frac{d\mathfrak{X}}{dt} + A\alpha\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)$$

et si nous opérons de même avec v et w. Cela revient à dire que, au point de vue de la génération d'une force magnétique à distance, on doit considérer comme équivalent au courant proprement dit, d'abord le changement de polarisation électrique, en second lieu le mouvement de convection de l'électricité vraie. La dernière partie de cet énoncé trouve dans les recherches de Rowland la confirmation désirée.

Enfin examinons la force X_2, Y_2, Z_2. Tout d'abord on peut aussi séparer de cette force une partie indépendante des changements du système avec le temps; elle possède un potentiel et est traitée ordinairement comme une force électrostatique à distance. De la force électrodynamique restante, on peut détacher une seconde partie qui s'évanouit en même temps que $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{M}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{N}}{dt}$. Elle représente explicitement la force d'induction qui provient de la variation des aimants, mais elle contient aussi implicitement cette force électrique qui doit son existence aux courants variables. Enfin il reste encore une troisième et dernière partie qui doit être interprétée comme une force électrique produite par le magnétisme déplacé par convection et qui doit être citée afin d'expliquer certains phénomènes d'induction unipolaire.

Cette analyse montre que nous aurions pu aussi arriver au système des équations (1) et (1') par cette voie: nous aurions additionné l'action des diverses forces exigées par les anciennes théories et ajouté en outre une suite de termes hypothétiques qui ne peuvent être ni confirmés, ni démentis par les expériences présentes. La voie que nous avons suivie exigeait un nombre moindre d'hypothèses indépendantes. Déduisons maintenant de nos équations les énoncés les plus importants.

3. *Mouvement des corps chargés de magnétisme et d'électricité statique.*

Comme causes indépendantes pour la variation de la polarisation électrique ou magnétique, nous avons d'abord les forces magnétiques ou électriques, ensuite le mouvement des corps matériels. Comme nous l'avons montré pour les corps fixes, la première seule ne saurait d'aucune manière déplacer l'électricité vraie [1] dans les isolants, dans aucun cas elle ne produit

---

[1] C'est l'expression $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)d\tau$ que nous désignons par le nom d'électricité vraie de l'élément $d\tau$, l'expression $\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dX}{dx}+\frac{dY}{dy}+\frac{dZ}{dz}\right)$ étant désignée par le nom d'électricité libre. L'analogue a lieu pour le magnétisme.

un déplacement du magnétisme vrai. La dernière déplace l'électricité et le magnétisme par rapport à un système de coordonnées fixe dans l'espace, mais non pas par rapport à la matière mobile elle-même, parce que celle-ci entraîne dans son mouvement les lignes de force dont les extrémités constituent l'électricité et le magnétisme vrais. Si donc les deux causes agissent en même temps, le magnétisme vrai dans tous les cas et l'électricité vraie dans les isolants ne peuvent pas avoir de vitesse relative par rapport à la matière qui les comprend; l'électricité et le magnétisme se meuvent, dans les dites conditions, avec la matière dans laquelle ils se trouvent comme s'ils étaient des substances invariablement attachées au points matériels. Pour répéter cette pensée dans le langage des formules, différentions les équations (1) puis (1') par rapport à x, y, z et multiplions par l'élément $d\tau$ considéré comme fixe auquel répondent $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \ldots$ etc. Soit encore $d\tau'$ un élément d'espace qui embrassera à chaque époque la matière actuellement contenue dans $d\tau$; soient de', dm' les quantités d'électricité et de magnétisme proprement dit comprises dans l'élément $d\tau'$ et $\mathfrak{L}', \mathfrak{M}'$ etc. les valeurs de $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}$ etc. relatives à $d\tau'$. Nous obtenons alors

$$(3)\quad \begin{cases} \Big\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)+\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)+\beta\frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right) \\ \qquad +\gamma\frac{d}{dz}\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)+\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\Big\}d\tau \\ \qquad\qquad =\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{d\mathfrak{L}'}{dx}+\frac{d\mathfrak{M}'}{dy}+\frac{d\mathfrak{N}'}{dz}\right)d\tau'\right\}=4\pi\frac{dm'}{dt}=0, \end{cases}$$

$$(3')\quad \begin{cases} \Big\{\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)+\alpha\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)+\beta\frac{d}{dy}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right) \\ \qquad +\gamma\frac{d}{dz}\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)+\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\left(\frac{d\mathfrak{X}}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}}{dz}\right)\Big\}d\tau \\ \qquad =\frac{d}{dt}\left\{\left(\frac{d\mathfrak{X}'}{dx}+\frac{d\mathfrak{Y}'}{dy}+\frac{d\mathfrak{Z}'}{dz}\right)d\tau'\right\}=4\pi\frac{de'}{dt}=-4\pi\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right). \end{cases}$$

Ces équations comprennent nos énoncés et les complètent au point de vue des conducteurs. Si les vitesses α, β, γ sont assez petites pour que les états électrique et magnétique puissent rester à chaque instant infiniment voisins des états statiques, la proposition obtenue est suffisante, mais aussi nécessaire, pour déterminer la dépendance des états qui peuvent provenir les uns des autres. L'adjonction de cette proposition permet donc de remplacer, dans ces problèmes, les équations (1) et (1') complètes mais compliquées par les équations très simples relatives aux problèmes statiques dans les corps en repos et qui résultent des équations (1) et (1') en égalant à zéro les vitesses en tous les points de l'espace. Cette simplification n'est pas possible sans introduire l'idée d'électricité et de magnétisme vrais; c'est là surtout que me paraît fondée l'utilité trouvée dans ces idées pour l'électrostatique et l'étude des phénomènes magnétiques.

4. *Induction dans les circuits fermés.*

Dans les équations (1) et (1'), les vitesses α, β, γ sont multipliées par l'inverse de la vitesse de la lumière. Devant celle-ci, les plus grands vitesses que nous puissions donner aux corps sont tellement petites que les actions électrodynamiques proprement dites du mouvement ne sont perceptibles que dans le seul cas où ces actions consistent en un courant électrique induit dans un circuit métallique fermé. Pour déterminer, en ce cas, leur valeur, considérons dans l'intérieur de la matière considérée une portion de surface ω' quelconque, non fermée, et mobile avec les points du milieu où elle passe; soient s la longueur de la courbe qui limite cette surface, ζ' le nombre des lignes de force magnétiques qui la traversent. Les causes de variation de ζ' sont: d'abord les forces électriques, puis le mouvement de la matière. Si la première cause agissait seule, si par conséquent le système était fixe, la vitesse de changement de ζ' multipliée par A serait égale à l'intégrale de la force électrique prise le long du contour s, cette intégrale étant prise dans le sens des aiguilles d'une montre, pour un observateur situé suivant la normale positive. D'autre part le mouvement agissant seul n'aurait pas pour conséquence un changement de ζ' parce que, avec la surface ω', il entraînerait aussi les lignes de force qui la traversent. Ainsi donc, dans le cas réel de l'action simultanée des deux causes, l'intégrale de la force électrique le long de la courbe s égale la vitesse de changement du nombre des lignes de force qui traversent une surface ω' limitée par s, obéissant au mouvement, mais d'ailleurs quelconque. Cette proposition s'applique au cas très particulier, mais seul important pour l'expérience, où la courbe s forme le circuit d'un conducteur linéaire, et où le mouvement est suffisamment lent pour que les états puissent être regardés comme stationnaires, et le courant naissant comme d'intensité égale dans toutes les parties du circuit s.

Pour traduire notre pensée en formule, nommons n', x ; n', y ; n', z les angles que fait à chaque instant avec les axes, la normale à l'élément $d\omega'$ de la surface mobile ω'. Soient $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$ les valeurs de $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ sur cet élément. Soient encore, $d\omega$; n, x ; n, y ; n, z les valeurs de $d\omega'$; n', x ; n', y ; n', z dans la position origine. Nous remarquons que nous avons, pour des raisons purement géométriques,

$$\frac{d}{dt}(d\omega' . \cos n', x) = d\omega\left\{+\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n, x - \frac{d\beta}{dx}\cos n, y - \frac{d\gamma}{dx}\cos n, z\right\},$$

$$\frac{d}{dt}(d\omega' . \cos n', y) = d\omega\left\{-\frac{d\alpha}{dy}\cos n, x + \left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n, y - \frac{d\gamma}{dy}\cos n, z\right\},$$

$$\frac{d}{dt}(d\omega' . \cos n', z) = d\omega\left\{-\frac{d\alpha}{dz}\cos n, x - \frac{d\beta}{dz}\cos n, y + \left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\cos n, z\right\};$$

et nous obtenons alors:

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta'}{dt} &= \frac{d}{dt}\int(\mathfrak{L}'\cos n', x + \mathfrak{M}'\cos n', y + \mathfrak{N}'\cos n', z)d\omega' \\
&= \int\left(\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + \alpha\frac{d\mathfrak{L}}{dx} + \beta\frac{d\mathfrak{L}}{dy} + \gamma\frac{d\mathfrak{L}}{dz}\right)\cos n, x\,d\omega \\
&+ \int\left(\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + \alpha\frac{d\mathfrak{M}}{dx} + \beta\frac{d\mathfrak{M}}{dy} + \gamma\frac{d\mathfrak{M}}{dz}\right)\cos n, y\,d\omega \\
&+ \int\left(\frac{d\mathfrak{N}}{dt} + \alpha\frac{d\mathfrak{N}}{dx} + \beta\frac{d\mathfrak{N}}{dy} + \gamma\frac{d\mathfrak{N}}{dz}\right)\cos n, z\,d\omega
\end{aligned}$$

$$+\int\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n, x\,d\omega - \int\mathfrak{L}\frac{d\beta}{dx}\cos n, x\,d\omega - \int\mathfrak{L}\frac{d\gamma}{dx}\cos n, z\,d\omega$$

$$-\int\mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dy}\cos n, x\,d\omega + \int\mathfrak{M}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\gamma}{dz}\right)\cos n, y\,d\omega - \int\mathfrak{M}\frac{d\gamma}{dy}\cos n, z\,d\omega$$

$$-\int\mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz}\cos n, x\,d\omega - \int\mathfrak{N}\frac{d\beta}{dz}\cos n, y\,d\omega + \int\mathfrak{N}\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dy}\right)\cos n, z\,d\omega;$$

d'où, avec le secours des équations (1) et (1')

$$A\frac{d\zeta'}{dt}=\int\left\{\left(\frac{dZ}{dy}-\frac{dY}{dz}\right)\cos n,x+\left(\frac{dX}{dz}-\frac{dZ}{dx}\right)\cos n,y\right.$$
$$\left.+\left(\frac{dY}{dx}-\frac{dX}{dy}\right)\cos n,z\right\}d\omega=\int(Xdx+Ydy+Zdz),$$

la dernière intégrale étant prise le long du contour de la surface ω. Dans certains cas, la proposition obtenue se simplifie. S'il est possible de trouver un espace qui renferme complètement la courbe s et dans lequel ne se trouve pas de masse magnétique vraie, il est évidemment indifférent que la surface auxiliaire ω' suive le mouvement de la partie matérielle ou subisse un déplacement indépendant de celle-ci, pourvu qu'elle reste seulement à l'intérieur de cet espace et demeure limitée par la courbe s. Dans ce cas nous pouvons dire plus simplement: l'intégrale de la force électrique le long d'une courbe fermée s est égale à la vitesse multipliée par A du changement du nombre des lignes de force magnétiques qui sont embrassées par la courbe s. Si dans la même hypothèse la polarisation magnétique est constante en chaque point de l'espace malgré le déplacement de s, la force induite dans la courbe s est égale au nombre multipliée par A des lignes de force magnétiques que la courbe s, dans son déplacement, coupe dans un sens déterminé. Si les forces magnétiques sous l'influence desquelles se meut la courbe s proviennent uniquement d'un courant uniforme dans un circuit t, le nombre des lignes de forces qui traversent s est, comme nous l'avons montré,[1] le produit du potentiel mutuel (de NEUMANN) des courbes s et t par l'intensité du courant dans le circuit t. Dans ce cas, le changement multiplié par A du produit énoncé, calculé pour l'unité de temps, donne la force électromotrice agissante dans la courbe s.

Sous l'une ou l'autre forme, ces propositions embrassent tous les cas connus d'induction. Les lois de l'induction unipolaire peuvent elles aussi être déduites facilement des énoncés généraux. Les phénomènes d'induction dans les corps à trois dimensions n'ont été étudiés qu'incomplètement au point de vue quantitatif. Les équations par lesquelles JOCHMANN[2]

---

[1] H. HERTZ, l. c. p. 641.

[2] JOCHMANN, Journal für Mathematik, Bd. 63, p. 1. 1863.

et d'autres ont pu représenter l'ensemble des faits observés résultent immédiatement de nos équations générales en négligeant des termes qui s'évanouissent par suite de la nature spéciale du problème traité.

Nous ne voulons pas omettre de mentionner que la proposition générale de l'induction peut s'énoncer sous une autre forme très élégante si on consent à parler d'un mouvement propre des lignes de force et à considérer tout changement général de la polarisation magnétique comme conséquence d'un tel mouvement des lignes de force. Nous pouvons dès lors dire, en épuisant tous les cas possibles: la force électrique induite dans une courbe quelconque s est égale au nombre multiplié par A des lignes de force magnétique qui, dans l'unité de temps, sont coupées dans un sens déterminé par la courbe s. Cependant, bien que rien ne défende de faire un usage accidentel du mode de raisonnement qui est au fonds de cet énoncé, nous ferons mieux de l'éviter dans le présent mémoire. Car cette idée employée par FARADAY et développée par POYNTING,[1] que les lignes de force peuvent avoir une vitesse relative par rapport au milieu qu'elles traversent est certes tout à fait remarquable; mais elle est d'une nature absolument différente de la nôtre par laquelle les lignes de force représentent les divers états de la matière. Cela n'a pas de sens de parler d'un mouvement propre de pareils états.

5. *Surfaces de glissement.*

A la surface de séparation des corps de nature différente, les constantes électrodynamiques peuvent passer d'une manière discontinue d'une valeur à une autre sans que, en même temps, les composantes de la vitesse α, β, γ sur cette surface subissent des changements brusques. Comme surfaces de discontinuité de cette espèce, on doit considérer les surfaces de contact des corps solides contre les liquides ou des liquides entre eux; nous pouvons aussi supposer de cette nature la séparation des corps avec l'éther. L'intervention du mouvement continu à de telles surfaces de séparation ne donne lieu à aucune nouvelle considération; les états des parties matérielles des deux côtés de la surface sont liées par les relations connues pour les corps fixes.

---

[1] I. H. POYNTING, Philosophical Transactions, t. 2, p. 277. 1885.

Il en est autrement des surfaces où les composantes de la vitesse subissent des changements discontinus. Comme, d'après une remarque de l'introduction, la discontinuité ne peut affecter que les composantes parallèles aux surfaces de séparation, il convient d'appeler celles-ci surfaces de glissement. Elles peuvent se trouver chez les corps solides qui se touchent. Il est aussi quelquefois commode et permis par notre ignorance de la vérité de considérer la surface de séparation d'un corps avec l'éther comme une surface de glissement. Comme nous le remarquions aussi dans l'introduction, nous considérons une surface de glissement comme le cas limite d'une couche de passage dans laquelle les vitesses et peut-être aussi les constantes électrodynamiques peuvent passer, très vite il est vrai, mais d'une façon continue d'une valeur à une autre. Cette manière de voir rend applicable à un système où se trouvent des surfaces de glissement les propositions générales que nous avons obtenues jusqu'ici. La justification de cette méthode est qu'elle ne conduit pas à des contradictions avec l'expérience. Pour qu'elle suffise à déterminer les relations aux surfaces de glissement, la manière dont on passe à la limite doit être assujettie à certaines restrictions générales. Ces restrictions consistent à supposer qu'une suite de grandeurs reste finie dans la couche de passage. Nous faisons abstraction de l'existence des forces électromotrices à la surface de glissement. Nous choisissons l'origine des coordonnées en un point de l'élément considéré de la couche de passage, elle suivra ce point dans son mouvement; l'axe des z sera choisi et demeurera perpendiculaire à la surface de glissement. La couche de passage forme donc constamment le voisinage immédiat du plan xy. Nous supposons encore que dans la couche de passage les quantités

$$\begin{array}{llllll} X, & Y, & Z, & L, & M, & N, \\ \mathfrak{X}, & \mathfrak{Y}, & \mathfrak{Z}, & \mathfrak{L}, & \mathfrak{M}, & \mathfrak{N}, \\ u, & v, & w, & \alpha, & \beta, & \gamma \end{array}$$

restent finies ainsi que les dérivées de ces quantités parallèlement à la surface de séparation, c'est à dire par rapport à x et y, puis les dérivées de $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}, \mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ par rapport au temps t. Au contraire, nous ne pouvons pas exclure l'existence de dérivées infinies par rapport à z, à l'exception de $\frac{d\gamma}{dz}$ qui doit rester finie d'après une remarque mentionnée dans l'introduction. D'après cela, γ lui-même est évanouissant dans toute la couche de passage. Cela supposé, multiplions les deux premières de chaque groupe des équations (1) et (1') par dz, intégrons par rapport à z à travers la couche de passage et n'oublions pas que, à cause de la petitesse du champ de l'intégration, toute intégrale de quantités finies s'évanouit. En désignant par 1 et 2 les deux côtés de la surface de glissement, nous obtenons les 4 équations

$$(5)\qquad A\int_1^2 \mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dz}dz = Y_2 - Y_1, \qquad -A\int_1^2 \mathfrak{M}\frac{d\beta}{dz}dz = X_2 - X_1,$$

$$(5')\qquad -A\int_1^2 \mathfrak{E}\frac{d\alpha}{dz}dz = M_2 - M_1, \qquad A\int_1^2 \mathfrak{E}\frac{d\beta}{dz}dz = L_2 - L_1.$$

Elles donnent la relation qui lie les composantes tangentielles de la force de part et d'autre de la surface de glissement. Les composantes normales à la surface de séparation sont, ici comme dans les corps fixes, liées par la condition que la densité superficielle du magnétisme vrai dans les surfaces de contact ne peut changer d'autre façon que par convection, ni la densité superficielle de l'électricité d'autre façon que, soit par convection, soit par un courant proprement dit.

Si l'élément considéré de la couche de contact ne renferme pas d'éléctricité ou de magnétisme vrais, $\mathfrak{E}$ et $\mathfrak{M}$ sont constants à l'intérieur de la couche de passage; les égalités (5) et (5') prennent alors la forme plus simple

$$(5'')\qquad X_2 - X_1 = A\mathfrak{M}(\beta_1 - \beta_2), \qquad Y_2 - Y_1 = A\mathfrak{M}(\alpha_2 - \alpha_1),$$

$$(5''')\qquad L_2 - L_1 = A\mathfrak{E}(\beta_2 - \beta_1), \qquad M_1 - M_2 = A\mathfrak{E}(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Pour donner un exemple de l'application de ces équations, imaginons qu'un solide de révolution tourne autour de son axe dans l'espace creux d'un autre solide qui l'embrasse étroitement. Si ce système vient à être soumis à l'influence d'une distribution de forces magnétiques qui soit symétrique par rapport à l'axe de rotation, il n'y aura, d'après notre manière de voir, aucun motif d'apparition de force électrique dans l'intérieur des deux corps. De telles forces feront en effet défaut si l'excitation magnétique se borne entièrement à l'intérieur de l'un ou l'autre corps. Mais si les lignes de force traversent la surface suivant laquelle les deux corps se touchent, alors elles provoquent sur cette surface les forces électromotrices données par les équations (5''); ces forces se propagent à l'intérieur des corps et par conséquent y produisent les tensions et les courants électriques. Effectivement, l'expérience ne laisse pas de doute sur la naissance des courants dans ces conditions. Si les corps considérés ne sont pas conducteurs et si on les soumet à l'influence de forces électriques, distribuées symétriquement autour de l'axe de rotation et qui ne s'évanouissent pas à la surface de glissement, les équations (5''') montrent que le mouvement introduit des forces magnétiques dans le voisinage de cette surface. Sans doute ces actions n'ont pas encore été observées avec autant de certitude que les premières mentionnées, cependant une indication au moins de celles-ci se trouve dans les expériences de M. Röntgen.[1]

Dans le cas général où sur la surface de contact se trouve une couche d'électricité vraie et de magnétisme vrai, la connaissance seule de la densité superficielle de cette couche ne suffit pas pour trouver les intégrales des équations (5) et (5'); il faut connaître en outre de quelle manière l'électricité et le magnétisme participent au mouvement de l'un ou l'autre corps en contact dans la couche de passage. Cette indétermination réside dans la nature du sujet. Imaginons que, dans l'expérience de Rowland sur l'action magnétique de l'électricité en mouvement de convection, le disque électrisé tourne, non plus dans l'air, mais dans un isolateur solide qui l'entoure étroitement. L'action magnétique s'abaisserait évidemment jusqu'à s'évanouir, à mesure que l'électricité passerait de la surface du disque tournant sur la surface en contact du corps fixe.

6. *Conservation de l'énergie. Forces pondéromotrices.*

Pendant que le système passe de l'état primitif à l'état final, imaginons chaque élément de temps partagé en deux périodes. La première

[1] W. C. Röntgen, Wiedemann's Annalen, t. 35, p. 264. 1888.

fera passer les parties matérielles de la première à la dernière position et par suite entraînera les lignes de forces dans le mouvement des parties matérielles. Dans la deuxième période, l'action des forces électriques et magnétiques subsistantes interviennent pour amener les états électromagnetiques à leur état final. Le changement total de l'énergie électrodynamique du système est la somme des variations qu'elle éprouve dans les deux périodes. Dans la deuxième période, les choses se passent comme dans les corps fixes. Dans ce cas, nous savons déjà comment les variations de l'énergie électrodynamique sont compensées par d'autres formes d'énergie. Mais, pendant la première période, l'énergie électrodynamique de chaque partie du système change aussi. Il nous reste donc à montrer ce que devient l'énergie disparue, d'où vient l'énergie accumulée. Par l'expérience présente, on peut démontrer sans incertitude la rigueur de cet énoncé que, dans tout système électrodynamique complet, l'énergie en question est compensée par le travail mécanique exécuté, pendant le temps considéré, par les forces pondéromotrices électriques et magnétiques du système. Cet énoncé accepté comme absolument général ne suffit cependant pas encore pour déduire complètement et avec rigueur les forces pondéromotrices des changements calculables de l'énergie électrodynamique. Nous admettrons donc encore deux choses, nécessitées, non par l'expérience, mais par nos principes particuliers. La première, c'est que l'énoncé donné, et vérifié expérimentalement pour tout système électrodynamique complet, est applicable aussi à toute partie matérielle du système. La deuxième, c'est qu'une partie quelconque du système ne peut exercer sur la partie restante aucune autre force pondéromotrice que des pressions qui, à la surface commune, sont exercées par les éléments de la première partie sur les éléments en contact de la partie restante; ces forces, en chaque point de la surface de contact, dépendent seulement des états électromagnétiques du voisinage immédiat. La première hypothèse détermine les pressions exigées par la deuxième; nous allons en calculer les grandeurs et montrer qu'elles permettent d'expliquer les faits de l'observation immédiate. Quant au principe de la conservation de l'énergie, il est évident qu'il est satisfait par la façon même dont nous déterminons les forces de pression.

Considérons, pendant l'élément de temps dt, l'énergie magnétique d'un élément matériel et soient $d\tau'$ son volume variable, $d\tau$ la valeur de

$d\tau'$ au début de l'élément de temps dt. Pour simplifier, choisissons l'origine des coordonnées en un point matériel de $d\tau'$. Si $d\tau'$ se déplace comme un corps rigide pendant qu'il entraîne ses lignes de force avec lui, son énergie intérieure ne changera pas. Donc le changement de cette énergie est exclusivement une fonction des déformations qu'éprouve $d\tau'$ par suite du mouvement. Nous allons chercher la valeur de cette fonction. Il faut remarquer cependant que les déformations font varier non seulement les polarisations mais aussi les propriétés du support matériel de ces polarisations, c'est à dire les constantes magnétiques. Pour calculer ces variations, nous devons établir une suite de nouvelles notations. Nous définissons d'abord à côté des constantes μ, une suite de constantes μ' par la condition que l'on ait:

$$\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N = \mu_{11}L^2 + 2\mu_{12}LM + \ldots = \mu'_{11}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots$$

Les μ' sont donc les coefficients des $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ dans les fonctions linéaires de ces grandeurs qui sont égales aux forces L, M, N. Nous nommons ensuite ξ, η, ζ les déplacements éprouvés pendant le temps dt par le point dont les vitesses sont α, β, γ. Des lors les grandeurs

$$\frac{d\xi}{dx} = x_x, \qquad \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx} = x_y, \ \ldots$$ [1]

sont les composantes des déformations de l'élément $d\tau'$ dans lequel se trouvent les déplacements ξ, η, ζ. Les constantes μ' sont des fonctions de ces déformations; elles dépendent en outre des rotations ρ, σ, τ que le mouvement fait subir à cet élément. Comme pendant le temps dt, aussi bien les x_x, x_y, etc. que les ρ, σ, τ restent infiniment petits, la relation est linéaire; elle est connue dès qu'on donne les dérivées des μ' par rapport à $\rho, \sigma, \tau, x_x, x_y$, etc. Les dérivées par rapport à ρ, σ, τ sont calculables au moyen des valeurs des μ' elles-mêmes; mais, pour les dérivées par rapport à x_x, x_y, etc. il n'en est pas de même, et nous devons admettre qu'on nous donne d'autre part les grandeurs

$$\frac{d\mu'_{11}}{dx_x} = \mu'_{11\,11}, \qquad \frac{d\mu'_{11}}{dx_y} = \mu'_{11\,12}, \ldots, \qquad \frac{d\mu'_{12}}{dx_x} = \mu'_{12\,11}, \qquad \frac{d\mu'_{12}}{dx_y} = \mu'_{12\,12}, \ldots$$

[1] Vgl. G. Kirchhoff, *Mechanik*, p. 123. 1887.

Les 36 constantes ainsi définies correspondent évidemment à des propriétés magnétiques de la matière particulière qui remplit l'espace $d\tau'$ dans l'état instantané de sa déformation. Nous ne pouvons pour notre but laisser de côté aucune de ces constantes ni en calculer à priori aucune au moyen des propriétés magnétiques considérées jusqu'ici. Par une orientation convenable du système des coordonnées, on peut diminuer le nombre des constantes nécessaires; une diminution survient aussi si certaines conditions de symétrie sont réalisées par rapport au système de coordonnées. Dans le cas le plus simple, la substance est homogène au début et demeure homogène malgré les déformations qui surviennent; c'est le cas des fluides. Le nombre des constantes s'abaisse alors à une seule qui, avec la constante de magnétisation, définit d'une manière suffisante les propriétés magnétiques. Il semble possible d'ailleurs que, même dans le cas général, on puisse démontrer entre les constantes des relations nécessaires qui les réduiraient à un nombre moindre de constantes indépendantes.

Ces notations posées, nous obtenons successivement, pour la variation d'énergie de l'espace $d\tau'$ dans l'unité de temps, les deux expressions suivants:

$$
(6)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)d\tau'\right\}\\
&= \frac{1}{8\pi}\left\{d\tau\frac{d}{dt}(\mu'_{11}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots) + (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\frac{d}{dt}d\tau'\right\}\\
&= \frac{1}{8\pi}d\tau\left\{2\left(L\frac{d\mathfrak{L}}{dt} + M\frac{d\mathfrak{M}}{dt} + N\frac{d\mathfrak{N}}{dt}\right) + \left(\frac{d\mu'_{11}}{dt}\mathfrak{L}^2 + 2\frac{d\mu'_{12}}{dt}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots\right)\right.\\
&\qquad\left. + (\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right)\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous allons faire disparaître dans la dernière les dérivées par rapport au temps. Pour les grandeurs $\frac{d\mathfrak{L}}{dt}, \frac{d\mathfrak{M}}{dt}, \frac{d\mathfrak{N}}{dt}$, les équations (1') nous donnent, en tenant compte seulement de l'influence du mouvement et en annulant les vitesses α, β, γ en vertu du choix de notre système de coordonnées:

$$\frac{d\mathfrak{L}}{dt} = -\mathfrak{L}\left(\frac{d\beta}{dy} + \frac{d\gamma}{dz}\right) + \mathfrak{M}\frac{d\alpha}{dy} + \mathfrak{N}\frac{d\alpha}{dz},$$
$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = -\mathfrak{M}\left(\frac{d\gamma}{dz} + \frac{d\alpha}{dx}\right) + \mathfrak{N}\frac{d\beta}{dz} + \mathfrak{L}\frac{d\beta}{dx},$$
$$\frac{d\mathfrak{N}}{dt} = -\mathfrak{N}\left(\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\right) + \mathfrak{L}\frac{d\gamma}{dx} + \mathfrak{M}\frac{d\gamma}{dy}.$$

Ensuite nous avons pour la grandeur $\frac{d\mu'_{11}}{dt}$

$$\frac{d\mu'_{11}}{dt} = \frac{d\mu'_{11}}{dx_x}\frac{dx_x}{dt} + \frac{d\mu'_{11}}{dx_y}\frac{dx_y}{dt} + \ldots + \frac{d\mu'_{11}}{d\rho}\frac{d\rho}{dt} + \ldots$$
$$= \mu'_{11\,11}\frac{d\alpha}{dx} + \mu'_{11\,12}\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right) + \ldots + \frac{1}{2}\frac{d\mu'_{11}}{d\rho}\left(\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\beta}{dz}\right) + \ldots.$$

Nous obtenons des expressions analogues pour $\frac{d\mu'_{12}}{dt}, \ldots.$ Nous portons toutes ces valeurs dans la dernière expression (6); cette expression deviendra une fonction linéaire homogène des 9 dérivées de α, β, γ par rapport à x, y, z. Mais nous pouvons ordonner cette fonction de façon qu'elle se présente comme une fonction linéaire homogène des 6 vitesses de déformation $\frac{d\alpha}{dx}, \frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}, \ldots$ et des 3 vitesses de rotation $\frac{1}{2}\left(\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\beta}{dx}\right), \ldots.$ Nous remarquons ensuite que les coefficients des 3 vitesses de rotation doivent nécessairement disparaître, parce que si l'élement se déplace comme un corps solide, son énergie interne demeure constante. Ainsi, nous rejetons simplement les termes affectés de ces vitesses de rotation; nous réduisons à l'unité de volume en divisant par $d\tau$, et nous obtenons finalement:

$$\begin{aligned}\frac{1}{d\tau}\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{8\pi}(\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N)d\tau'\right\} = {} & \frac{1}{8\pi}\frac{d\alpha}{dx}\quad(\mathfrak{L}L - \mathfrak{M}M - \mathfrak{N}N + \mu'_{11\,11}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,11}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots)\\
& + \frac{1}{8\pi}\frac{d\beta}{dy}(-\mathfrak{L}L + \mathfrak{M}M - \mathfrak{N}N + \mu'_{11\,22}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,22}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots)\\
& + \frac{1}{8\pi}\frac{d\gamma}{dz}(-\mathfrak{L}L - \mathfrak{M}M + \mathfrak{N}N + \mu'_{11\,33}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,33}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots)\\
& + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\beta}{dz} + \frac{d\gamma}{dy}\right)(\mathfrak{N}M + \mathfrak{M}N + \mu'_{11\,23}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,23}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots)\\
& + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\alpha}{dz}\right)(\mathfrak{L}N + \mathfrak{N}L + \mu'_{11\,13}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,13}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots)\\
& + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\alpha}{dy} + \frac{d\beta}{dx}\right)(\mathfrak{M}L + \mathfrak{L}M + \mu'_{11\,12}\mathfrak{L}^2 + 2\mu'_{12\,12}\mathfrak{L}\mathfrak{M} + \ldots).\end{aligned}$$

Dans la fonction linéaire des vitesses de déformation que forme le second membre, le coefficient changé de signe de chacune de ces vitesses donne évidemment la composante de pression par laquelle la matière en perturbation magnétique tend à augmenter la déformation correspondante. Nommons en effet, suivant une notation usitée,[1] X_x, X_y, X_z les composantes de la pression que la matière de l'élément $d\tau$ fait subir à une surface perpendiculaire à l'axe x, et adoptons la même notation pour les autres axes; l'expression

$$X_x\frac{d\alpha}{dx}+Y_y\frac{d\beta}{dy}+Z_z\frac{d\gamma}{dz}+Y_z\left(\frac{d\beta}{dz}+\frac{d\gamma}{dy}\right)+X_z\left(\frac{d\gamma}{dx}+\frac{d\alpha}{dz}\right)+X_y\left(\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\beta}{dx}\right)$$

donne le travail mécanique dépensé par la matière de l'élément $d\tau$ dans la déformation, ce travail étant rapporté aux unités de temps et de volume. D'après notre hypothèse, ce travail mécanique est égal à l'énergie magnétique perdue par suite de la déformation. Comme cela a lieu pour toute déformation, il en résulte la démonstration de notre énoncé. Chacune des composantes de pression est une fonction quadratique homogène des 3 composantes de la force magnétique régnante, ou si on veut également, de la polarisation magnétique régnante. Par des considérations tout à fait analogues, on peut obtenir des expressions tout à fait analogues pour les pressions qui proviennent des perturbations électriques. La pression résultante est la somme des pressions électrique et magnétique.

Sur les valeurs trouvées des pressions pondéromotrices, nous ferons trois remarques. La première concerne la différence entre notre système de pressions et le système que MAXWELL a donné pour le cas général où les forces et les polarisations n'ont pas la même direction.[2] Les formules de MAXWELL sont d'abord plus simples parce que pour les établir il ne tient aucun compte de la déformation possible du milieu. Une différence beaucoup plus importante consiste en ce que les composantes de pression X_y et Y_x ont des valeurs différentes chez MAXWELL, et chez nous sont identiques. D'après notre système, chaque particule matérielle abandonnée à elle-même changera de forme en obéissant au principe des aires; d'après le système de MAXWELL elle prendra une rotation en même temps et

[1] G. KIRCHHOFF, *Mechanik.* Elfte Vorlesung.

[2] MAXWELL, *Treatise on electricity and magnetism.* 1873. Vol. 2, p. 254 (p. 313 de la traduction française de M. SELIGMANN-LUI).

n'obéira donc pas à ce principe. Les pressions de Maxwell ne peuvent donc pas devoir leur existence à ce qui se passe dans l'intérieur de l'élément, elles ne trouvent aucune place dans la théorie élaborée ici. Elles sont sans doute admissibles, si l'on part de cette hypothèse que, dans l'intérieur des corps en mouvement, l'éther demeure en repos et fournit le point d'appui nécessaire pour la rotation qui survient.

La deuxième remarque concerne la forme simple que prennent nos formules, quand on les applique aux corps qui, comme les fluides, sont isotropes et demeurent tels malgré la déformation. Le système de constantes μ' se réduit à une séule $\mu' = \frac{1}{\mu}$. Si nous désignons encore par σ la densité du fluide, nous avons

$$\mu'_{1111} = \mu'_{2222} = \mu'_{3333} = -\frac{d\frac{1}{\mu}}{d \log \sigma} = \frac{1}{\mu^2}\frac{d\mu}{d \log \sigma},$$

$$\mu'_{1211} = \ldots = 0.$$

Alors les composantes de la pression sont:

$$6') \left\{\begin{aligned}
X_x &= \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2),\\
Y_y &= \frac{\mu}{8\pi}\quad (L^2 - M^2 + N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2),\\
Z_z &= \frac{\mu}{\pi}\quad (L^2 + M^2 - N^2) - \frac{d\mu}{8\pi d \log \sigma}(L^2 + M^2 + N^2),\\
X_y &= -\frac{\mu}{4\pi} LM,\\
X_z &= -\frac{\mu}{4\pi} LN,\\
Y_z &= -\frac{\mu}{4\pi} MN.
\end{aligned}\right.$$

von Helmholtz[1] est déjà parvenu pour le même cas et par une voie semblable à un résultat tout à fait identique. Nos formules se trans-

[1] v. Helmholtz, Wiedemann's Annalen, t. 13, p. 400. 1881.

forment dans les siennes par un simple changement de notation. Il suffit de remplacer L, M, N, μ par $\frac{\lambda}{\vartheta}$, $\frac{\mu}{\vartheta}$, $\frac{\nu}{\vartheta}$, $1 + 4\pi\vartheta$ et de remarquer que le θ de HELMHOLTZ est égal à $\frac{d\vartheta}{d \log \sigma} = \frac{d\mu}{4\pi d \log \sigma}$.[1]

La troisième remarque concerne la question de savoir jusqu'à quel point les résultantes des pressions déduites de nos hypothèses concordent avec les forces mécaniques et les couples que nous observons effectivement dans les corps qui subissent une perturbation électromagnétique. Nous remarquons avant tout qu'en réalité nos expériences sont limitées aux systèmes infiniment voisins de l'état statique ou stationnaire. Mais, pour de tels systèmes, le principe de la conservation de l'énergie, à lui seul, suffit à déterminer complètement et sans ambiguité, par la perte d'énergie due au déplacement des corps, la force mécanique qui s'y oppose et on peut regarder comme déjà prouvé que les forces ainsi calculées sont d'accord avec l'observation. Comme les pressions que nous avons calculées forment un système de forces qui satisfait au principe de la conservation de l'énergie, elles coïncident avec le premier système de forces, calculé par le même principe et qui est d'accord avec l'expérience. Pour parvenir au même résultat à postériori, remarquons que dans les conditions de la réalité, les pressions électrodynamiques sont beaucoup trop faibles pour produire des déformations considérables des éléments de volume des corps solides. Celles de ces déformations qui sont dues à l'électricité constituent les phénomènes d'électrostriction; on a l'habitude de les séparer sous ce titre des phénomènes de l'électrodynamique proprement dite. Si donc nous faisons ici abstraction de cette classe de phénomènes délicats, il est équivalent pour la suite, ou de prendre pour les corps solides les pressions que nous avons calculées, ou de n'en prendre aucune, ou d'en prendre d'autres quelconques du même ordre de grandeur. Nous pouvons donc nous contenter, pour le cas général, des formules simples (6'). Dans ces formules, il faut entendre par μ, pour le cas des corps cristallisés, une constante quelconque du même ordre de grandeur que $\mu_{11}, \mu_{12}, \ldots$. Mais nous pouvons simplifier encore les formules (6') en négligeant les

---

[1] Les signes sont contraires, parce que, c'est la poussée que HELMHOLTZ et la pression que nous comptons positivement.

termes affectés de $\frac{d\mu}{d \log \sigma}$. Car ces termes représentent une pression uniforme et ne peuvent provoquer aucun déplacement fini dans les liquides, à cause de leur faible compressibilité: ils produiront seulement des phénomènes d'électrostriction et de magnétostriction. Dans les corps gazeux, ces termes disparaissent parce que la constante μ et la constante diélectrique ne changent pas sensiblement avec la densité σ. D'apres celà, les forces pondéromotrices qui provoquent les déplacements mesurables des corps les uns par rapport aux autres doivent être bien représentées par les résultantes du système suivant de pressions, adopté comme entièrement valable:

$$X_x = \frac{\mu}{8\pi}(-L^2 + M^2 + N^2), \qquad X_y = -\frac{\mu}{4\pi} LM,$$

$$Y_y = \frac{\mu}{8\pi} \quad (L^2 - M^2 + N^2), \qquad X_z = -\frac{\mu}{4\pi} NL,$$

$$Z_z = \frac{\mu}{8\pi} \quad (L^2 + M^2 - N^2), \qquad Y_z = -\frac{\mu}{4\pi} MN.$$

Ce système simplifié des pressions magnétiques est maintenant celui de MAXWELL.[1] MAXWELL a bien montré que ce système, joint à celui des pressions électriques correspondantes contient les forces pondéromotrices observées entre les aimants, les courants stationnaires et les corps électrisés. Nous pouvons nous rapporter à son exposition simple.

D'ailleurs, et cela ne paraît pas avoir été remarqué, le système calculé des pressions ne laisse en repos l'intérieur d'un corps homogène, en particulier de l'éther, que si les forces agissantes ont un potentiel, comme dans les états statiques ou stationnaires. Dans le cas d'une perturbation électromagnétique quelconque, les pressions trouvées doivent mettre en mouvement l'intérieur de l'éther, que nous avons expressément supposé mobile, avec des vitesses que nous pourrions calculer si nous avions une donnée sur la masse de l'éther. Ce résultat paraît peu vraisemblable. Cependant, à l'égard du présent travail, on n'est pas fondé à refuser la théorie à cause de lui, car il n'est en contradiction ni avec nos hypo-

---

[1] MAXWELL, *Treatrise on electricity and magnetism.* 1873. Vol. 2, p. 256 (p. 315 de la traduction française). Les signes sont ici changés parce que chez MAXWELL c'est une poussée et chez nous une pression qui est comptée positivement.

thèses, ni avec l'expérience. La faible masse d'air qui reste dans les espaces vides suffit par exemple bien entièrement à porter à une grandeur insensible les courants qui pourraient être excités dans cet espace.

Pour terminer, je désire insister encore sur ce point, que c'est seulement au point de vue de l'ordre systématique que j'attribue une valeur à la théorie exposée ici. Elle montre comment nous pouvons traiter entièrement les phénomènes électromagnétiques dans les corps mobiles sous certaines restrictions d'ailleurs arbitraires. Que ces restrictions répondent au cas de la nature, cela est peu vraisemblable. La théorie rigoureuse distinguerait plutôt les états de l'éther de ceux de la matière pondérable qui lui est mêlée. Mais l'établissement d'une théorie correspondante à cette considération me paraissait exiger des hypothèses plus nombreuses et plus arbitraires que celles qui font la base de la présente théorie.