SUR UN THÉORÈME DE M. BRUNS

PAR

SOPHIE KOWALEVSKI

À STOCKHOLM.

Dans son mémoire *De proprietate quadam functionis potentialis corporum homogeneorum*[1] M. BRUNS a démontré le théorème suivant: Soit T un corps solide homogène limité par une surface fermée S, définie par une équation analytique $W(x, y, z) = 0$. Si l'on désigne par V_a la fonction analytique qui coïncide avec le potentiel de T dans chaque point intérieur à ce corps, cette fonction peut être développée dans le voisinage de chaque point régulier x_1, y_1, z_1 de la surface S, en une série de puissances entières et positives de $x - x_1, y - y_1, z - z_1$. Il en résulte que cette fonction analytique V_a existe aussi a l'intérieur de T. Pour démontrer ce théorème important M. BRUNS démontre d'abord l'existence d'une fonction analytique U, satisfaisant à l'équation

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -4k\pi$$

et jouissant des propriétés suivantes:

1) Sur toute la surface S, on a

$$U = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$

2) Dans chaque point régulier de la surface S, U peut être développée suivant les puissances entières et positives de $x - x_1, y - y_1, z - z_1$.

[1] Dissertation inaugurale, Berlin 1871.

Dans la note présente je vais m'occuper d'une transformation de l'équation différentielle ΔU en un système de coordonnées curvilignes, qui fait ressortir immédiatement l'existence d'une pareille fonction U.

Soit x_1, y_1, z_1 les coordonnées d'un point quelconque de la surface S; ξ, η, ζ les cosinus des angles que la normale extérieure en ce point, s fait avec les axes de x, y, z, et posons

$$x = x_1 + \xi s,$$
$$y = y_1 + \eta s,$$
$$z = z_1 + \zeta s,$$

où la signification géométrique de s est évidente. Les coordonnées x_1, y_1, z_1 de chaque point de la surface S peuvent être représentées comme fonctions analytiques monodromes de deux variables u, v. La surface S n'ayant ni angles ni arêtes, ξ, η, ζ sont aussi des fonctions monodromes de u et de v.

x, y, z sont donc des fonctions monodromes de u, v, s. Le réciproque n'a pas en général lieu. Mais on peut toujours trouver deux surfaces fermées S_1 et S_2 dont l'une enveloppe la surface S et l'autre en est enveloppée, et telles qu'à chaque point de l'espace limité par S_1 et S_2 correspond toujours un, et seulement un système de valeurs u, v, s, dans lequel le module de s ne surpasse pas une certaine quantité positive δ.

Transformons l'expression à différences partielles ΔU dans ces nouvelles coordonnées u, v, s.

La formule bien connue pour cette transformation est la suivante:[1]

Si l'on pose

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Pdu^2 + Qdv^2 + Rds^2 + 2pdvds + 2qduds + 2rdudv,$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}, \qquad \begin{aligned} \Omega^2 E &= QR - p^2, & \Omega^2 e &= qr - pP, \\ \Omega^2 E_1 &= RP - q^2, & \Omega^2 e_1 &= rp - qQ, \\ \Omega^2 E_2 &= PQ - r^2, & \Omega^2 e_2 &= pq - rR, \end{aligned}$$

[1] Voir JACOBI, Gesammelte Werke, T. 2, p. 199.

on a les relations suivantes

$$\Omega^2 = PQR - Pp^2 - Qq^2 - Rr^2 + 2pqr,$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2 = E\left(\frac{\partial U}{\partial u}\right)^2 + E_1\left(\frac{\partial U}{\partial v}\right)^2 + E_2\left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)^2$$

$$+ 2e\frac{\partial U}{\partial v}\frac{\partial U}{\partial s} + 2e_1\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + 2e_2\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial v},$$

$$\Omega\left\{\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right\} = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\Omega\left(E\frac{\partial U}{\partial u} + e_2\frac{\partial U}{\partial v} + e_1\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\Omega\left(e_2\frac{\partial U}{\partial u} + E_1\frac{\partial U}{\partial v} + e\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Omega\left(e_1\frac{\partial U}{\partial u} + e\frac{\partial U}{\partial v} + E_2\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}.$$

Il s'agit donc de calculer les valeurs de P, Q, R, p, q, r.

On a

$$dx = dx_1 + s d\xi + \xi ds,$$

$$dy = dy_1 + s d\eta + \eta ds,$$

$$dz = dz_1 + s d\zeta + \zeta ds.$$

ξ, η, ζ étant les cosinus des angles que la normale extérieure au point x_1, y_1, z_1 fait avec les axes des coordonnées, on doit avoir

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0,$$

$$\xi dx_1 + \eta dy_1 + \zeta dz_1 = 0.$$

Par conséquent

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 + 2s(dx_1 d\xi + dy_1 d\eta + dz_1 d\zeta)$$

$$+ s^2(d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2) + ds^2.$$

En adoptant les désignations de GAUSS,[1] je pose

$$\frac{\partial x_1}{\partial u} = a, \qquad \frac{\partial x_1}{\partial v} = a', \qquad E = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial u} = b, \qquad \frac{\partial y_1}{\partial v} = b', \qquad F = aa' + bb' + cc', \qquad \omega = \sqrt{EG - F^2},$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial u} = c, \qquad \frac{\partial z_1}{\partial v} = c', \qquad G = a'^2 + b'^2 + c'^2,$$

$$\alpha = \frac{\partial a}{\partial u}, \qquad \alpha' = \frac{\partial a}{\partial v} = \frac{\partial a'}{\partial u}, \qquad \alpha'' = \frac{\partial a'}{\partial v},$$

$$\beta = \frac{\partial b}{\partial u}, \qquad \beta' = \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{\partial b'}{\partial u}, \qquad \beta'' = \frac{\partial b'}{\partial v},$$

$$\gamma = \frac{\partial c}{\partial u}, \qquad \gamma' = \frac{\partial c}{\partial v} = \frac{\partial c'}{\partial u}, \qquad \gamma'' = \frac{\partial c'}{\partial v}.$$

On a alors

$$dx_1 = a\,du + a'dv, \qquad dy_1 = b\,du + b'dv, \qquad dz_1 = c\,du + c'dv,$$

$$dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = Edu^2 + 2Fdudv + 2Gdv^2,$$

$$d\xi dx_1 + d\eta dy_1 + d\zeta dz_1 = -(\xi d^2x_1 + \eta d^2y_1 + \zeta d^2z_1);$$

mais

$$d^2x_1 = \alpha du^2 + 2\alpha' dudv + \alpha'' dv^2,$$

$$d^2y_1 = \beta du^2 + 2\beta' dudv + \beta'' dv^2,$$

$$d^2z_1 = \gamma du^2 + 2\gamma' dudv + \gamma'' dv^2,$$

et en posant

$$A = bc' - cb',$$

$$B = ca' - ac',$$

$$C = ab' - ba',$$

on a

$$\xi = \frac{A}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{A}{\omega},$$

$$\eta = \frac{B}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{B}{\omega},$$

$$\zeta = \frac{C}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{C}{\omega}.$$

[1] *Disquisitiones generales circa superficies curvas.*

Donc, en posant

$$D = A\alpha + B\beta + C\gamma\,,$$
$$D' = A\alpha' + B\beta' + C\gamma'\,,$$
$$D'' = A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'',$$

on a

$$\xi d^2x_1 + \eta d^2y_1 + \zeta d^2z_1 = \frac{Ddu^2 + 2D'uv + D''v^2}{\omega}.$$

Il reste à calculer en u, v l'expression de

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2.$$

Mais on a

$$d\xi = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)dA - A(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3},$$

$$d\eta = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)dB - B(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3},$$

$$d\zeta = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)dC - C(AdA + BdB + CdC)}{\omega^3}.$$

Par conséquent

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{(A^2 + B^2 + C^2)(dA^2 + dB^2 + dC^2) - (AdA + BdB + CdC)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}$$

$$= \frac{(BdC - CdB)^2 + (CdA - AdC)^2 + (AdB - BdA)^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

Mais on a

$$A = bc' - cb' \text{ etc.},$$

$$dA = (b\gamma' + c'\beta - c\beta' - b'\gamma)du + (b\gamma'' + c'\beta' - c\beta'' - b'\gamma')dv \text{ etc.}$$

Par conséquent

$$BdC - CdB = (D'a - Da)du + (D''a - D'a')dv,$$

$$CdA - AdC = (D'b - Db)du + (D''b - D'b')dv,$$

$$AdB - BdA = (D'c - Dc)du + (D''c - D'c')dv.$$

et en posant

$$L = ED'^2 - 2FDD' + GD^2,$$

$$L' = ED'D'' - F(DD'' + D'^2) + GDD',$$

$$L'' = ED''^2 - 2FD'D'' + GD'^2,$$

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = \frac{Ldu^2 + 2L'dudv + L''dv^2}{\omega^4}.$$

Tous les éléments qui entrent dans l'expression transformée de $dx^2 + dy^2 + dz^2$ sont maintenant calculés et l'on trouve en posant

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Pdu^2 + Qdv^2 + Rds^2 + 2pdvds + 2qdsdu + 2rdudv,$$

$$P = E - 2s\frac{D}{\omega} + s^2\frac{L}{\omega^4}, \qquad p = 0,$$

$$Q = G - 2s\frac{D''}{\omega} + s^2\frac{L''}{\omega^4}, \qquad q = 0,$$

$$R = 1, \qquad r = F - 2s\frac{D'}{\omega} + s^2\frac{L'}{\omega^4}.$$

En posant donc

$$\Omega^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial s} \end{vmatrix}^2 = PQR - Pp^2 - Qq^2 - Rr^2 + 2pqs,$$

et en définissant les quantités E, E_1, E_2, e, e_1, e_2 comme plus haut on a

$$\Omega^2\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left\{\Omega\left(E\frac{\partial U}{\partial u} + e_2\frac{\partial U}{\partial v} + e_1\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial v}\left\{\Omega\left(e_2\frac{\partial U}{\partial u} + E_1\frac{\partial U}{\partial v} + e\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial s}\left\{\Omega\left(e_1\frac{\partial U}{\partial u} + e\frac{\partial U}{\partial v} + E_2\frac{\partial U}{\partial s}\right)\right\}.$$

L'équation différentielle transformée $\Delta u = -4k\pi$ prend donc la forme suivante, (vu que $E_2 = 1$)

$$\Omega \frac{\partial^2 U}{\partial s^2} + A_1 \frac{\partial^2 U}{\partial u^2} + B_1 \frac{\partial^2 U}{\partial v^2} + a_1 \frac{\partial U}{\partial u} + b_1 \frac{\partial U}{\partial v} + c_1 \frac{\partial U}{\partial s} = -4k\pi\Omega^2.$$

Les quantités A_1, B_1, a_1, b_1, c_1 sont, comme on le voit immédiatement, des fonctions entières de second degré en s dont les coefficients sont des fonctions de u et de v qui dans le voisinage de chaque système de valeurs u_0, v_0 correspondant à un point x_1, y_1, z_1 de la surface S peuvent être développées en séries de puissances positives et entières de $u - u_0$, $v - v_0$.

La surface S est représentée dans les coordonnées que nous considérons par l'équation

$$s = 0.$$

La fonction U doit être égale à zéro dans chaque point de cette surface. Il en est de même de toutes ses dérivées de premier ordre.

Si le coefficient Ω de $\frac{\partial^2 U}{\partial s^2}$ dans l'équation différentielle transformée n'est pas égal à zéro pour aucun système de valeurs u_0, v_0 correspondant à un point de la surface S, il existera une seule fonction U satisfaisant à la condition

$$(U)_{s=0} = 0, \qquad \left(\frac{\partial U}{\partial s}\right)_{s=0} = 0,$$

et cette fonction pourra être représentée par une série convergente[1] procédant selon les puissances entières positives de $s, u - u_0, v - v_0$.

Cette fonction sera évidemment celle que nous cherchons. Il faut donc examiner plus attentivement la valeur de Ω.

On a

$$\Omega^2 = PQ - r^2 = \left(E - 2s\frac{D}{\omega} + s^2\frac{L}{\omega^4}\right)\left(G - 2s\frac{D''}{\omega} + s^2\frac{L''}{\omega^4}\right) - \left(F - 2s\frac{D'}{\omega} + s^2\frac{L'}{\omega^4}\right)^2$$

$$= EG - F^2 - \frac{2s}{\omega}(ED'' - 2FD' + GD) + \frac{s^2}{\omega^4}[EL'' - 2FL' + GL + 4\omega^2(DD'' - D'^2)]$$

$$- 2\frac{s^3}{\omega^5}(LD'' - 2L'D' + L''D) + \frac{s^4}{\omega^8}(LL'' - L'^2).$$

[1] Voir mon mémoire *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen,* Journal für Mathematik, T. 80.

En désignant par ρ_1 et ρ_2 les deux rayons de courbure dans le point de la surface dont les coordonnées sont x_1, y_1, z_1, on a

$$\frac{1}{\rho_1\rho_2} = \frac{DD'' - D'^2}{\omega^4}, \qquad \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{ED'' - 2FD' + GD}{\omega^3}.$$

On trouve de plus facilement les relations suivantes

$$EL'' - 2FL' + GL = (ED'' - 2FD' + GD)^2 - 2(EG - F^2)(DD'' - D'^2),$$

$$LD'' - 2L'D' + L''D = (ED'' - 2FD' + GD)(DD'' - D'^2),$$

$$LL'' - L'^2 = (EG - F^2)(DD'' - D'^2)^2.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de Ω on trouve

$$\Omega^2 = \omega^2\left[1 - 2s\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + s^2\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} + \frac{4}{\rho_1\rho_2}\right) - \frac{2s^3}{\rho_1\rho_2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right) + \frac{s^4}{\rho_1^2\rho_2^2}\right]$$
$$= \omega^2\left(1 - \frac{s}{\rho_1}\right)^2\left(1 - \frac{s}{\rho_2}\right)^2.$$

Ni la quantité $\omega = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, ni aucun des deux rayons de courbure ρ_1, ρ_2 ne peuvent être égaux à zéro dans un point de la surface pour lequel la direction de la normale est déterminée. Ω n'est donc point égal à zéro pour aucun système de valeurs s_0, u_0, v_0 tel que le module de s_0 est moindre qu'une certaine quantité δ, et qu'aux valeurs u_0, v_0 corresponde un point x_1, y_1, z_1 de la surface S. $\frac{1}{\Omega}$ peut donc être développé selon les puissances entières positives de $u - u_0$, $v - v_0$, $s - s_0$. Mais au système de valeurs s_0, u_0, v_0 correspond un point x, y, z compris dans l'espace θ limité par les surfaces S_1 et S_2. Vu que dans le voisinage de chacun de ces points les quantités $u - u_0$, $v - v_0$, $s - s_0$ peuvent être développées selon les puissances entières positives de $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$, la fonction U peut donc aussi être représentée par une série semblable.

C. Q. F. D.