ÜBER DIE GEOMETRISCHE BEDEUTUNG DER FLÄCHENTHEORETISCHEN FUNDAMENTALGLEICHUNGEN

VON

J. KNOBLAUCH
in BERLIN.

1. Die drei Gleichungen, welche zwischen den sechs Fundamentalgrössen erster und zweiter Ordnung einer Fläche stattfinden, haben folgende Form:

$$
(1)\qquad \begin{aligned}
\frac{LN-M^2}{EG-F^2} = -\frac{1}{2\sqrt{EG-F^2}}\Bigg\{&\frac{\partial}{\partial u}\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{1}{2}F\frac{\partial\log\frac{G}{E}}{\partial v}+\frac{\partial G}{\partial u}-\frac{\partial F}{\partial v}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{1}{2}F\frac{\partial\log\frac{E}{G}}{\partial u}+\frac{\partial E}{\partial v}-\frac{\partial F}{\partial u}\right)\Bigg\},
\end{aligned}
$$

$$
(2)\qquad \begin{cases}
\dfrac{\partial L}{\partial v}+MJ_1+NJ_2-\left(\dfrac{\partial M}{\partial u}+LJ_1'+MJ_2'\right)=0,\\[2ex]
\dfrac{\partial N}{\partial u}+LJ_1''+MJ_2''-\left(\dfrac{\partial M}{\partial v}+MJ_1'+NJ_2'\right)=0.
\end{cases}
$$

Hierin bedeuten $J_1, \ldots, J_2''$ die sechs, aus den Grössen E, F, G und ihren partiellen Ableitungen gebildeten CHRISTOFFEL'schen Verbindungen [CHRISTOFFEL, Journ. f. Math. 70 (1869); vgl. *Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen* (Leipzig 1888), § 28, 65]. Man deutet die Formel (1) gewöhnlich als den Satz von der Unveränderlichkeit des Krümmungsmasses bei allen Biegungen einer Fläche. Allein durch diesen Satz wird der Inhalt der GAUSS'schen Relation nur unvollständig wiedergegeben; denn er besagt blos, dass das Krümmungsmass K sich durch die Fundamentalgrössen erster Ordnung darstellen lässt, die Form der Abhängigkeit aber, d. h. der Ausdruck der Function auf der rechten Seite von (1), bleibt unberücksichtigt. Auch die Mehrzahl der mehr oder weniger eleganten Ausdrücke, welche seit Gauss für die Grösse K gegeben wurden, hilft diesem Mangel nicht ab. Denn sie sind meist algebraische Identitäten, während die durch die Gleichung (1) dargestellte Beziehung zwischen einer simultanen algebraischen Invariante zweier Differentialformen und der Gauss'schen Invariante einer von ihnen ihren Grund in den Bedingungen der Stetigkeit und Differentiirbarkeit hat, welchen die Cartesischen Coordinaten der Fläche unterworfen sind.

Von dem erwähnten Einwurf frei ist der Ausdruck des Krümmungsmasses, welchen O. Bonnet schon vor längerer Zeit angegeben hat [Journal de l'Ecole Polytechnique, Cah. 32 (1848), p. 54], welcher jedoch, vielleicht wegen der zu seiner Ableitung benutzten Methode, wenig bekannt geworden zu sein scheint. Es sei g_φ die geodätische Krümmung einer, auf der Fläche gezogenen Curve der Schaar $\varphi(u, v) = \text{const.}$, ferner $g_{\varphi\psi}$ die durch das Bogenelement der Linie $\psi(u, v) = \text{const.}$ dividirte Veränderung, welche g_φ beim Fortschreiten längs dieses Bogenelementes erfährt. Denkt man sich auf der Fläche irgend zwei orthogonale Curvenschaaren angenommen und wählt diese zu Coordinatenlinien, so geht (für $F = 0$) die Gleichung (1) über in

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\right)\right\}. \tag{3}$$

Nun ist für $F = 0$ ferner:

$$g_u = -\frac{1}{2G\sqrt{E}}\frac{\partial G}{\partial u}, \qquad g_v = -\frac{1}{2E\sqrt{G}}\frac{\partial E}{\partial v}, \tag{4}$$

mithin folgt:

$$\left\{\begin{aligned} g_{uv} &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial g_u}{\partial u} = g_u^2 - \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial G}{\partial u}\right) \\ g_{vu} &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial g_v}{\partial v} = g_v^2 - \frac{1}{2\sqrt{EG}}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial E}{\partial v}\right), \end{aligned}\right. \tag{5}$$

und durch Vergleichung mit (3):

$$K = g_{uv} + g_{vu} - g_u^2 - g_v^2. \tag{6}$$

Dies ist der von BONNET herrührende Wert, welcher in mannigfacher Weise modificirt werden könnte.

2. Ebenso wie die Gleichung (1), müssen auch die Formeln (2) Relationen zwischen geometrischen Grössen liefern, welche für jede Fläche Giltigkeit haben. Zur Deutung jener Gleichungen hat BOUR, welcher bekanntlich in seiner Abhandlung über die Abwickelung der Flächen einen ausgedehnten Gebrauch von ihnen macht, einen Weg angegeben [Journal de l'École Polytechnique, Cah. 39 (1862)]. Allein abgesehen davon, dass die Verfolgung desselben nur für das specielle, von BOUR benutzte System orthogonal-geodätischer Coordinaten verhältnismässig einfache Resultate ergibt, so würde sie auch die Hinzuziehung von Grössen nötig machen, welche bei sonstigen flächentheoretischen Untersuchungen von geringem Nutzen sind. Eine derartige Einführung wird vermieden, wenn man gleichzeitig mit der gegebenen Fläche auch ihre Krümmungsmittelpunktsfläche betrachtet. Mit den vier Hauptkrümmungsradien der Evolute (und den beiden Hauptkrümmungshalbmessern der Urfläche) steht jede andere geometrische Grösse, welche wie jene von den Differentialcoefficienten bis zur 3. Ordnung abhängt, notwendig in Beziehung. Es ist bei dem engen Zusammenhange, welcher zwischen Krümmungsmittelpunktsfläche und Krümmungslinien stattfindet, zweckmässig, die Krümmungen oder einfacher die geodätischen Krümmungen der letzteren in Rechnung zu ziehen. Die Fundamentalgleichungen (2) geben dann, wie leicht zu sehen, zwei Relationen zwischen diesen und den vorher genannten Grössen.

Bezeichnet man nämlich die, durch $EG - F^2$ dividirten linken Seiten der Formeln (2) mit α und β, ferner mit α' und β' die Ausdrücke, welche in analoger Weise unter Zugrundelegung eines zweiten Systems von Coordinaten p, q gebildet sind, so bestehen die Beziehungen:

$$\alpha = \alpha' \frac{\partial u}{\partial p} + \beta' \frac{\partial u}{\partial q}$$

$$\beta = \alpha' \frac{\partial v}{\partial p} + \beta' \frac{\partial v}{\partial q}$$

[WEINGARTEN, Festschrift der Technischen Hochschule zu Berlin, 1884]. Sie lassen erkennen, inwiefern die Gleichungen $\alpha' = 0, \beta' = 0$

für das Verschwinden von α und β notwendig und hinreichend sind, und dass es mithin genügt, die Bedeutung der in Rede stehenden Formeln für ein irgendwie specialisirtes Coordinatensystem anzugeben.

Nimmt man nun p und q als die Parameter der Krümmungslinien an, so wird

$$F = 0, \quad M = 0, \tag{7}$$

$$\begin{cases} J_2 = -\dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial E}{\partial q}, & J_1'' = -\dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial G}{\partial p}, \\ J_1' = \dfrac{1}{2E}\dfrac{\partial E}{\partial q}, & J_2' = \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial p}, \end{cases} \tag{8}$$

und die Fundamentalgleichungen lassen sich bei Einführung der Hauptkrümmungsradien

$$\rho_1 = \frac{E}{L}, \qquad \rho_2 = \frac{G}{N}, \tag{9}$$

in die Form setzen:

$$\begin{cases} G\rho_1^2\alpha' \equiv \dfrac{\rho_1}{2}\left(1 - \dfrac{\rho_1}{\rho_2}\right)\dfrac{\partial \log E}{\partial q} - \dfrac{\partial \rho_1}{\partial q} = 0, \\ E\rho_2^2\beta' \equiv \dfrac{\rho_2}{2}\left(1 - \dfrac{\rho_2}{\rho_1}\right)\dfrac{\partial \log G}{\partial p} - \dfrac{\partial \rho_2}{\partial p} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Aus den Ausdrücken der Cartesischen Coordinaten

$$x_1 = x + \rho_1 X, \qquad y_1 = y + \rho_1 Y, \qquad z_1 = z + \rho_1 Z$$

für die, zu ρ_1 gehörige Schale der Evolute ergeben sich ferner mit Berücksichtigung von (7, 9) folgende Werte der Fundamentalgrössen 1. und 2. Ordnung:

$$E_1 = \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial p}\right)^2, \qquad F_1 = \frac{\partial \rho_1}{\partial p}\frac{\partial \rho_1}{\partial q}, \quad G_1 = G\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial q}\right)^2, \tag{11}$$

$$L_1 = -\frac{\sqrt{E}}{\rho_1}\frac{\partial \rho_1}{\partial p}, \quad M_1 = 0, \qquad N_1 = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{\partial G}{\partial p}. \tag{12}$$

Summe und Produkt der Hauptkrümmungen der Evolute werden hieraus in bekannter Weise gebildet; die Resultate sind:

$$(13) \qquad H_1 = -\frac{\sqrt{E}\left[G\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial q}\right)^2\right]}{G\rho_1\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^2 \frac{\partial \rho_1}{\partial p}} - \frac{1}{2\sqrt{E}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)} \frac{\partial \log G}{\partial p},$$

$$(14) \qquad K_1 = \frac{1}{2\rho_1\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{\partial \rho_1}{\partial p}} \frac{\partial \log G}{\partial p}.$$

Hierin, sowie in (10) können die Ableitungen $\frac{\partial \log E}{\partial q}$ und $\frac{\partial \log G}{\partial p}$ durch die geodätischen Krümmungen g_1 und g_2 der Krümmungscurven $q = \text{const.}$, $p = \text{const.}$ vermöge der Gleichungen

$$(15) \qquad g_1 = -\frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial \log E}{\partial q}, \qquad g_2 = -\frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial \log G}{\partial p}$$

ersetzt werden. Eliminirt man diese Ableitungen, sowie $\frac{\partial \rho_1}{\partial p}$ und $\frac{\partial \rho_1}{\partial q}$ aus (13, 14, 15) und der ersten Gleichung (10), fügt dann der entstehenden Relation diejenige hinzu, welche in gleicher Weise bei Bevorzugung der zweiten Schale der Evolute sich ergeben würde, so erhält man:

$$(16) \qquad \begin{cases} [H_1(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 g_2]\rho_2 g_2 + K_1(\rho_1 - \rho_2)^2(1 + \rho_1^2 g_1^2) = 0, \\ [H_2(\rho_2 - \rho_1) + \rho_1 g_1]\rho_1 g_1 + K_2(\rho_1 - \rho_2)^2(1 + \rho_2^2 g_2^2) = 0. \end{cases}$$

Dies sind die gesuchten Gleichungen, welche für

$$r_k = \frac{1}{\rho_k} \qquad (k=1,2)$$

die Form annehmen:

$$(17) \qquad \begin{cases} r_1^3 g_2 [r_1 g_2 - H_1(r_1 - r_2)] + K_1(r_1 - r_2)^2(r_1^2 + g_1^2) = 0, \\ r_2^3 g_1 [r_2 g_1 - H_2(r_2 - r_1)] + K_2(r_1 - r_2)^2(r_2^2 + g_2^2) = 0. \end{cases}$$

3. Die Einführung der Hauptkrümmungshalbmesser der Evolute bewirkt, dass jede Flächenklasse, welche durch eine invariante partielle Differentialgleichung dritter Ordnung definirt wird, durch eine geometrische Relation gekennzeichnet werden kann. So ist von HALPHEN [Bulle-

tin de la Société mathématique de France, 4 (1876)] für die WEINGARTEN'schen Flächen die Gleichung

$$K_1 K_2 (H^2 - 4K)^2 - K^4 = 0 \tag{18}$$

gegeben worden. Im Allgemeinen ist es zur Vermeidung umständlicher Eliminationen vorteilhaft, anstatt der Grössen H_1, H_2 oder wenigstens gleichzeitig mit ihnen auch g_1 und g_2 zu verwerten. Denn die stets auftretenden Ableitungen von ρ_1 und ρ_2 oder r_1 und r_2 kommen in jenen quadratisch vor, während sie, durch g_1, g_2, K_1, K_2 ausgedrückt, aus (10, 15, 14) und der entsprechenden Gleichung für K_2 als ganze resp. gebrochene lineare Functionen erscheinen. Die Werte sind:

$$\tag{19} \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial r_1}{\partial p} = \dfrac{r_1^4}{r_1 - r_2} \dfrac{g_2}{K_1}, & \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial r_1}{\partial q} = (r_1 - r_2) g_1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{E}} \dfrac{\partial r_2}{\partial p} = (r_2 - r_1) g_2, & \dfrac{1}{\sqrt{G}} \dfrac{\partial r_2}{\partial q} = \dfrac{r_2^4}{r_2 - r_1} \dfrac{g_1}{K_2}. \end{array} \right.$$

Sie können z. B. dazu verwandt werden, eine charakteristische Eigenschaft der geradlinigen Flächen zu finden. Man definirt diese Flächen zweckmässig durch die Bedingung, dass die eine Schaar ihrer Asymptotencurven geodätisch ist. Bezeichnet nun

$$P du + Q dv = 0$$

die Differentialgleichung dieser Schaar, so drückt sich die gestellte Bedingung durch die Gleichung aus:

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{GP - FQ}{\sqrt{GP^2 - 2FPQ + EQ^2}} = \frac{\partial}{\partial v} \frac{FP - EQ}{\sqrt{GP^2 - 2FPQ + EQ^2}}.$$

Die krummlinigen Coordinaten seien die Parameter der Krümmungscurven, so kann gesetzt werden

$$P = \sqrt{L} = \sqrt{E r_1}, \qquad Q = \sqrt{-N} = \sqrt{-G r_2},$$

wenn von den beiden Hauptkrümmungen $r_1 > 0$, demnach $r_2 < 0$ angenommen wird. Die obige Bedingung wird alsdann

$$\frac{\partial}{\partial p} \sqrt{\frac{G r_1}{r_1 - r_2}} + \frac{\partial}{\partial q} \sqrt{\frac{-E r_2}{r_1 - r_2}} = 0 \tag{20}$$

und transformirt sich vermöge (15, 19) in

$$(21)\quad g_2\sqrt{r_1}\left[\frac{r_1^3 r_2}{K_1} + 3(r_1 - r_2)^2\right] + g_1\sqrt{-r_2}\left[\frac{r_2^3 r_1}{K_2} + 3(r_1 - r_2)^2\right] = 0.$$

Die beiden Vorzeichen von $\sqrt{\frac{-r_2}{r_1}}$ entsprechen den beiden Schaaren der Asymptotencurven.

Handelt es sich zweitens um die Bestimmung der GAUSS'schen Invariante der Differentialform

$$\mathrm{B} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

so setze man für die Parameter der Krümmungslinien

$$K_b = -\frac{1}{\sqrt{LN}}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{\sqrt{LN}}\frac{\partial N}{\partial p}\right) + \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{\sqrt{LN}}\frac{\partial L}{\partial q}\right)\right\},$$

entnehme aus (9) die Werte

$$L = Er_1, \qquad N = Gr_2$$

und benutze die Fundamentalgleichungen (3), (10), die letzteren in der Form

$$\frac{\partial r_1}{\partial q} + \frac{r_1 - r_2}{2E}\frac{\partial E}{\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial r_2}{\partial p} + \frac{r_2 - r_1}{2G}\frac{\partial G}{\partial p} = 0.$$

Dann liefert die Durchführung der Rechnung

$$(22)\qquad K_b = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$$
$$+ \frac{1}{4r_1^2 r_2^2}\left\{r_1 g_2^2\left(\frac{r_1^3 r_2}{K_1} + (r_1 - r_2)^2\right) + r_2 g_1^2\left(\frac{r_2^3 r_1}{K_2} + (r_1 - r_2)^2\right)\right\}.$$

Für die Annahme $K_b = 0$ ergibt sich eine Klasse von Flächen, deren Asymptotencurven durch Quadraturen bestimmbar sind.

4. Die Einführung geometrischer Grössen, wie sie im Vorhergehenden für die dritte Ordnung angedeutet worden ist, erweist sich als besonders nützlich, wenn es sich um die Angabe eines analytischen Kennzeichens für eine Flächenklasse handelt, welche durch eine vorgeschriebene Eigenschaft definirt wird. Denn sobald es gelingt, diese Eigenschaft in

eine metrische Relation umzusetzen, so ist damit der Weg zur Auffindung der gesuchten partiellen Differentialgleichung vorgezeichnet. In der oben erwähnten Abhandlung hat BONNET die, aus

$$F = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{E}{G}}{\partial p \partial q} = 0$$

leicht abzuleitende metrische Eigenschaft der Flächen mit isometrischen Krümmungscurven aufgestellt, deren partielle Differentialgleichung neuerdings auf einem ganz anderen Wege durch WEINGARTEN bestimmt worden ist (a. o. a. O.). Für diese, wie für andere interessante Flächenklassen, welche von partiellen Differentialgleichungen vierter Ordnung abhängen, reicht die Benutzung der auf die Krümmungslinien bezogenen Grössen $g_{\varphi\psi}$ aus. Es werde gesetzt:

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial g_1}{\partial p} = g_{11}, & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial g_1}{\partial q} = g_{12}, \\ \dfrac{1}{\sqrt{E}}\dfrac{\partial g_2}{\partial p} = g_{21}, & \dfrac{1}{\sqrt{G}}\dfrac{\partial g_2}{\partial q} = g_{22}. \end{cases}$$

Dann erhält man z. B. für die, der vorigen verwandte Klasse von Flächen, deren Krümmungslinien auf der GAUSS'schen Kugel ein isometrisches System entspricht [WEINGARTEN, Monatsb. d. Berl. Akad. 1886], aus

$$\mathfrak{F} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \log \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{G}}}{\partial p \partial q} = 0$$

die Gleichung

$$(24) \qquad \frac{g_1 g_2 r_1 r_2}{r_1 - r_2}\left(\frac{r_1}{K_1} + \frac{r_2}{K_2}\right) - \frac{r_2}{r_1} g_{11} + \frac{r_1}{r_2} g_{22} = 0.$$

Es sei die entsprechende Relation noch für die Flächen mit einer Schaar ebener Krümmungscurven zu bestimmen. Bezeichnet φ_1 den Winkel zwischen der Flächen-Normale und der Hauptnormale der Krümmungslinie q = const., so muss nach einem bekannten Satze

$$\varphi_1 = f(q) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} = 0$$

sein, wenn die Schaar $q =$ const. eben sein soll. Ferner hat man

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{g_1}{r_1},$$

und kann daher für die betrachtete Flächenklasse allgemein setzen:

$$\frac{\partial \frac{g_1}{r_1}}{\partial p} = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich mit Hilfe von (19, 23) in die gesuchte:

(25) $$(r_1 - r_2) K_1 g_{11} - r_1^3 g_1 g_2 = 0.$$

Berlin, September 1889.