ÜBER DIE
ALLGEMEINE FORM DER EINDEUTIGEN INTEGRALE DER LINEAREN HOMOGENEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN
MIT DOPPELTPERIODISCHEN COEFFICIENTEN

VON

E. A. STENBERG
in HELSINGFORS.

Von den zahlreichen Untersuchungen über lineare homogene Differentialgleichungen mit doppeltperiodischen Coefficienten, welche seit HERMITE's berühmter Behandlung der Lamé'schen Gleichung [1] und zwar durch sie angeregt, ausgeführt worden, nimmt neben den wichtigen Sätzen der Herren PICARD, MITTAG-LEFFLER und HALPHEN über das Verhalten der eindeutigen Integrale bei Veränderung des Arguments um eine Periode [2] die Untersuchung des Herrn FLOQUET über die analytische Form jener Integrale [3] durch ihre allgemeine Giltigkeit eine besonders hervorragende Stellung in der Theorie der betreffenden Differentialgleichungen ein.

---

[1] HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques,* premier fascicule. Paris, Gauthier-Villars 1885.

[2] PICARD, *Sur une classe d'équations différentielles linéaires.* Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. 19 Janvier 1880.

MITTAG-LEFFLER, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.* Comptes rendus de l'Académie des sciences de Paris. 16 Février 1880.

HALPHEN, *Mémoire sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables.* Tome 28 du Recueil dit des Savants étrangers.

[3] FLOQUET, *Sur les équations différentielles linéaires à coefficients doublement périodiques.* Annales scient. de l'école normale supérieure. Année 1884.

Acta mathematica. 15. Imprimé le 3 août 1891.

Von den erwähnten Sätzen ausgehend findet der letztgenannte Gelehrte dass die eindeutigen Integrale in Gruppen eingetheilt werden können von der Art dass, wenn $y_1, y_2, \ldots, y_m$ eine solche Gruppe bilden, so hat y_i die Form

$$a_{ii} + (b_{i0}u + b_{i1}u') + (c_{i0}u^2 + c_{i1}u'u + c_{i2}u'^2) + \ldots$$
$$+ (h_{i0}u^{i-1} + \ldots + h_{i,i-1}u'^{i-1}),$$

wo die Coefficienten $a, b, c, \ldots, h$ doppeltperiodische Functionen zweiter Gattung mit denselben Multiplicatoren und

$$u = \frac{2\omega\omega'}{\pi i}\left(\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} - \frac{\eta}{\omega}x\right), \qquad u' = -\frac{2\omega\omega'}{\pi i}\left(\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} - \frac{\eta'}{\omega'}x\right)$$

sind. Da diese analytische Form der Integrale eine auffallend grosse Menge verschiedener doppeltperiodischer Functionen enthält — ihre Anzahl ist z. B. in der obigen Gruppe $\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}$ — habe ich versucht Relationen zwischen ihren Coefficienten aufzufinden um somit eine Form aufzustellen, die in dieser Hinsicht einfacher wäre. In Betreff des Resultats meiner Untersuchung, die hier in den acht ersten Paragraphen folgt, verweise ich auf § 9, wo ich eine Form angegeben habe, welche sich dadurch von der Floquet'schen unterscheidet, dass die Anzahl der doppeltperiodischen Functionen derjenigen der Integrale selbst gleichkommt. In meiner Form treten aber ausser den doppeltperiodischen noch andere, von mir durch $A_{\mu,\nu}$ bezeichnete, Functionen auf, welche die Stelle der Potenzen von u und u' sowie ihrer Produkte einnehmen. Diese Functionen lassen sich doch, wie aus § 10 ersichtlich, eindeutig bestimmen, sobald die in § 9, Mom. 3, aufgestellten $m(m-1)$ Constanten bekannt sind.

1. Wenn eine homogene lineare Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten n linear unabhängige, eindeutige Integrale hat, kann man, wie bekannt, immer ein System von n linear unabhängigen eindeutigen Integralen $f_1, f_2, \ldots, f_n$ finden, welches sich so in Gruppen eintheilen lässt, dass wenn $f_\lambda(x), f_{\lambda+1}(x), \ldots, f_{\lambda+\mu}(x)$ die zu einer Gruppe gehörenden Integrale sind, so erleiden sie bei Vermehrung des Arguments um eine beliebige Periode 2ϖ folgende Veränderungen

$$f_\lambda(x+2\bar\omega) = cf_\lambda(x),$$

$$f_{\lambda+\tau}(x+2\bar\omega) = cf_{\lambda+\tau}(x) + l_\tau[f_\lambda(x), f_{\lambda+1}(x), \ldots, f_{\lambda+\tau-1}(x)], \quad {\scriptstyle(\tau=1,2,\ldots,\mu)}$$

wo c eine von x unabhängige Grösse und l_τ eine lineare algebraische Function der eingeklammerten Grössen ist. Ausserdem lässt sich eine homogene lineare Differentialgleichung $(\mu+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit doppeltperiodischen Coefficienten aufstellen, zu der die erwähnte Gruppe ein Fundamentalsystem von Integralen bildet. Hierdurch wird die Frage über die allgemeine Form der eindeutigen Integrale einer homogenen linearen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten auf die entsprechende einfachere Untersuchung der Integrale einer solchen Differentialgleichung zurückgeführt, deren sämmtliche Integrale eindeutig sind und zur selben Gruppe gehören. Eine Differentialgleichung dieser letzteren Art werde ich kurzweg

$$\mathfrak{P}_j = 0$$

bezeichnen, wobei j die Ordnungszahl bedeutet.

2. Es sei n eine gewisse positive ganze Zahl. Von jeder Differentialgleichung $\mathfrak{P}_{n-1} = 0$ setze ich nun folgende Eigenschaft voraus, welche bekanntlich jeder Differentialgleichung $\mathfrak{P}_2 = 0$ zukommt, nämlich dass sie ein Fundamentalsystem von Integralen von der Form

$$y_1 = \varphi(x),$$

$$y_\mu = \varphi(x)[A_{\mu,1} + A_{\mu,2}\varphi_{\mu,2}(x) + \ldots + A_{\mu,\mu-1}\varphi_{\mu,\mu-1}(x) + \varphi_{\mu,\mu}(x)],$$

$$\scriptstyle(\mu=2,3,\ldots,n-1)$$

hat, wo $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung, $\varphi_{\mu,2}(x)$, $\varphi_{\mu,3}(x), \ldots, \varphi_{\mu,\mu}(x)$ solche Functionen erster Gattung und $A_{\mu,\nu}$ ganze algebraische Functionen $(\mu-\nu)^{\text{ten}}$ Grades von x und $\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0)$ sind, wobei x_0 eine beliebig gewählte constante Grösse bedeutet, welche keinen Einfluss auf die Function $\varphi(x)$ hat, dagegen aber gewöhnlich als Unendlichkeitsstelle der Functionen $\varphi_{\mu,\nu}(x)$ auftritt. Ausserdem nehme ich von den Functionen $A_{\mu,\nu}$, welche ich unter Benutzung der kürzeren Bezeichnung

$$\psi = -\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0)$$

als Functionen zweier unabhängigen Variabelen x und ψ betrachte, an, erstens dass sie kein von den Veränderlichen unabhängiges Glied enthalten und zweitens dass es möglich ist gewisse Constanten

$$a_{\mu,\nu,\tau} \quad \text{und} \quad b_{\mu,\nu,\tau} \qquad {\scriptstyle (\tau=1,2,\ldots,\mu-\nu)}$$

aufzustellen, welche die Bedingungen

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{\mu,\nu} = a_{\mu,\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + a_{\mu,\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + a_{\mu,\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + a_{\mu,\nu,\mu-\nu},$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} A_{\mu,\nu} = b_{\mu,\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + b_{\mu,\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + b_{\mu,\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + b_{\mu,\nu,\mu-\nu}$$

für jeden Werth der Veränderlichen genügen.

Auch diese Eigenschaft kommt jeder Gleichung $\mathfrak{P}_2 = 0$ zu.

Auf diesen Voraussetzungen fussend werde ich im Folgenden beweisen dass auch jede Differentialgleichung n^{ter} Ordnung $\mathfrak{P}_n = 0$ und somit überhaupt jede Gleichung der betreffenden Art $\mathfrak{P}_j = 0$ die genannten Eigenschaften besitzt.

3. Durch eine Substitution $y = y_1 \int u dx$ kann die Gleichung $\mathfrak{P}_n = 0$ immer in eine Differentialgleichung $n - 1^{\text{ter}}$ Ordnung, *die auch von der mit* $\mathfrak{P}_j = 0$ *bezeichneten Art ist,* übergeführt werden, weil es immer eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung y_1 giebt, welche $\mathfrak{P}_n = 0$ integrirt. Die so erhaltene Differentialgleichung, die ich $\mathfrak{P}_{n-1}^{(1)} = 0$ bezeichnen werde, hat der Annahme nach ein Fundamentalsystem von Integralen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ von der Form

$$u_1 = \varphi^{(1)}(x),$$

$$u_\mu = \varphi^{(1)}(x)[A_{\mu,1}^{(1)} + A_{\mu,2}^{(1)}\varphi_{\mu,2}^{(1)}(x) + \ldots + A_{\mu,\mu-1}^{(1)}\varphi_{\mu,\mu-1}^{(1)}(x) + \varphi_{\mu,\mu}^{(1)}(x)], \qquad {\scriptstyle (\mu=2,3,\ldots,n-1)}$$

wo aber nicht nur $\varphi_{\mu,2}^{(1)}(x), \varphi_{\mu,3}^{(1)}(x), \ldots, \varphi_{\mu,\mu-1}^{(1)}(x)$ sondern auch $\varphi^{(1)}(x)$ doppeltperiodische Functionen *erster* Gattung sind.

Die hier vorkommenden Functionen

$$A_{\mu,\nu}^{(1)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\mu-\nu} \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-\nu-\lambda} C_{\lambda,\rho}^{(\mu,\nu)} \psi^\lambda x^\rho \qquad {\scriptstyle \left(\begin{smallmatrix}\mu=2,3,\ldots,n-1\\ \nu=1,2,\ldots,\mu-1\end{smallmatrix}\right)}$$

wo $C_{0,0}^{(\mu,\nu)} = 0$ ist, haben laut der Voraussetzung die Eigenschaft

$$\frac{\partial}{\partial x} A_{\mu,\nu}^{(1)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-\nu-1} a_{\mu,\nu,\tau}^{(1)} A_{\mu,\nu+\tau}^{(1)} + a_{\mu,\nu,\mu-\nu}^{(1)},$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi} A_{\mu,\nu}^{(1)} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-\nu-1} b_{\mu,\nu,\tau}^{(1)} A_{\mu,\nu+\tau}^{(1)} + b_{\mu,\nu,\mu-\nu}^{(1)}.$$

Um nun die Integration der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ zu bewerkstelligen, führe ich statt der doppeltperiodischen Functionen $\varphi_{2,2}^{(1)}(x), \varphi_{3,2}^{(1)}(x), \ldots, \varphi_{n-1,n-1}^{(1)}(x)$ andere elliptische Functionen ein, die ich $\Phi_{2,2}^{(1)}(x), \Phi_{3,2}^{(1)}(x), \ldots, \Phi_{n-1,n-1}^{(1)}(x)$ nennen werde. Vor dem ist es aber nöthig folgende Vorbemerkungen zu machen.

Jede elliptische Function $\Phi(x)$ kann als Summe zweier solchen Functionen $G(x)$ und $H(x)$ betrachtet werden, von denen die erstere die Eigenschaft hat, dass ihr Integral eine eindeutige Function ist, und die letztere nur Unendlichkeitsstellen *erster Ordnung* hat. Diese Functionen bestimme ich so, dass wenn

$$\Phi(x) = C + \sum C_\rho^{(0)} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \xi_\rho) + \Sigma C_\rho \wp(x - \xi_\rho) + \ldots$$

ist, so wird

$$H(x) = \sum C_\rho^{(0)} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \xi_\rho)$$

sein. Hierdurch ergiebt sich

$$\int G(x)\,dx = C.x + K.\psi + F(x),$$

wo

$$K = -\Sigma C_\rho$$

und $F(x)$ eine elliptische Function ist.

In analoger Weise werde ich die neuen Functionen $\Phi_{\mu,\nu}^{(1)}(x)$ als Summen von je zwei Functionen

$$\Phi_{\mu,\nu}^{(1)}(x) = G_{\mu,\nu}^{(1)}(x) + H_{\mu,\nu}^{(1)}(x)$$

und

$$\int G_{\mu,\nu}^{(1)}(x)\,dx = C_{\mu,\nu}^{(1)} x + K_{\mu,\nu}^{(1)} \psi + F_{\mu,\nu}^{(1)}(x)$$

schreiben können.

Unter Zugrundelegung dieser beiden Gleichungen stelle ich zur Bestimmung der einzuführenden elliptischen Functionen $\Phi^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ die Recursionsformel

$$\Phi^{(1)}_{\mu,\nu}(x)=\varphi^{(1)}(x).\varphi^{(1)}_{\mu,\nu}(x)-\sum_{\tau=1}^{\tau=\nu-1}[a^{(1)}_{\mu,\tau,\nu-\tau}+b^{(1)}_{\mu,\tau,\nu-\tau}\wp(x-x_0)]F^{(1)}_{\mu,\tau}(x) \qquad \binom{\mu=2,3,\ldots,n-1}{\nu=2,3,\ldots,\mu}$$

auf. Die hier vorkommende noch unbestimmte Function $F^{(1)}_{\mu,1}(x)$ ergibt sich durch die Gleichung

$$\Phi^{(1)}_{\mu,1}(x)=\varphi^{(1)}(x). \qquad (\mu=1,2,\ldots,n-1)$$

Durch Einführung dieser Functionen wird nun

$$u_\mu=\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu}A^{(1)}_{\mu,\nu}\Phi^{(1)}_{\mu,\nu}(x)+\sum_{\nu=2}^{\nu=\mu}A^{(1)}_{\mu,\nu}\sum_{\tau=1}^{\tau=\nu-1}f^{(1)}_{\mu,\nu,\tau}(x) \qquad (\mu=1,2,\ldots,n-1)$$

wo ich der Kürze wegen

$$A^{(1)}_{\mu,\mu}=1,$$

$$f^{(1)}_{\mu,\nu,\tau}(x)=[a^{(1)}_{\mu,\tau,\nu-\tau}+b^{(1)}_{\mu,\tau,\nu-\tau}\wp(x-x_0)]F^{(1)}_{\mu,\tau}(x)$$

geschrieben habe.

4. Durch theilweise Integration erhalte ich

$$\int A^{(1)}_{\mu,\nu}G^{(1)}_{\mu,\nu}(x)dx=A^{(1)}_{\mu,\nu}[C^{(1)}_{\mu,\nu}x+K^{(1)}_{\mu,\nu}\psi+F^{(1)}_{\mu,\nu}(x)]$$

$$-\int(C^{(1)}_{\mu,\nu}x+K^{(1)}_{\mu,\nu}\psi)\frac{d}{dx}A^{(1)}_{\mu,\nu}dx-\int\sum_{\tau=\nu+1}^{\tau=\mu}A^{(1)}_{\mu,\tau}f^{(1)}_{\mu,\tau,\nu}(x)dx$$

und da

$$\int(C^{(1)}_{\mu,\nu}x+K^{(1)}_{\mu,\nu}\psi)\frac{d}{dx}A^{(1)}_{\mu,\nu}dx=\sum_{\rho=2}^{\rho=\mu-\nu+1}\frac{\rho-1}{\rho}C^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{0,\rho-1}x^\rho$$

$$+\sum_{\lambda=2}^{\lambda=\mu-\nu+1}\frac{\lambda-1}{\lambda}K^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,0}\psi^\lambda+\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu}\sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\nu-\lambda+1}\left(C^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda,\rho-1}+\frac{\lambda-1}{\lambda}K^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho}\right)\psi^\lambda.x^\rho$$

$$-\int R^{(1)}_{\mu,\nu}dx,$$

$$R^{(1)}_{\mu,\nu}=\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu}\sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-\nu-\lambda}\left(C^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda,\rho}-\frac{\rho+1}{\lambda}K^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho+1}\right)\psi^\lambda.x^\rho,$$

ergibt sich

$$\int A^{(1)}_{\mu,\nu} G^{(1)}_{\mu,\nu}(x)dx = B^{(1)}_{\mu,\nu} + A^{(1)}_{\mu,\nu} F^{(1)}_{\mu,\nu}(x) + \int R^{(1)}_{\mu,\nu} dx$$

$$- \int dx \sum_{\tau=\nu+1}^{\tau=\mu} A^{(1)}_{\mu,\tau} f^{(1)}_{\mu,\tau,\nu}(x),$$

$$B^{(1)}_{\mu,\nu} = \sum_{\rho=2}^{\rho=\mu-\nu+1} \frac{1}{\rho} C^{(1)}_{\mu,\nu} c^{(\mu,\nu)}_{0,\rho-1} x^\rho + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu+1} \frac{1}{\lambda} \psi^\lambda \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-\nu-\lambda+1} K^{(1)}_{\mu,\nu} c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho} x^\rho,$$

und

$$\int \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} A^{(1)}_{\mu,\nu} G^{(1)}_{\mu,\nu}(x)dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} [B^{(1)}_{\mu,\nu} + A^{(1)}_{\mu,\nu} F^{(1)}_{\mu,\nu}(x)] + \int dx \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} R^{(1)}_{\mu,\nu}$$

$$- \int dx \sum_{\nu=2}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} \sum_{\tau=1}^{\tau=\nu-1} f^{(1)}_{\mu,\nu,\tau}(x).$$

Zufolge dieser Gleichung erhält man bei der Integration der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ das Resultat

$$\int u_\mu dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} B^{(1)}_{\mu,\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} F^{(1)}_{\mu,\nu}(x) + \int dx \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} R^{(1)}_{\mu,\nu} + \int dx \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$$
$$(\mu=1, 2, \ldots, n-1),$$

wo

$$B^{(1)}_{\mu,\mu} = C^{(1)}_{\mu,\mu} x + K^{(1)}_{\mu,\mu} \psi$$

zu setzen ist.

Die in dieser Formel noch zu integrirenden Functionen $\sum R^{(1)}_{\mu,\nu}$ und $\sum A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ werden, wie sich aus den unmittelbar bevorstehenden Untersuchungen ergeben wird, durch die Anforderung, dass die Integrale der Functionen $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ eindeutig sein müssen, identisch verschwinden.

5. Dieser Anforderung kann nur dadurch Genüge geleistet werden dass die Function $\sum A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ in der Umgebung jeder dem Werthe x_0 incongruenten Stelle den Character einer ganzen Function hat.

Es sei

$$H^{(1)}_{\mu,\nu}(x) = \sum_\rho \alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu} \frac{\sigma'}{\sigma}(x - \xi_\rho) - \frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0) \sum_\rho \alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu} \qquad (\nu=1, 2, \ldots, \mu)$$

so muss also die Gleichung

$$\alpha^{(\rho)}_{\mu,1} A^{(1)}_{\mu,1} + \alpha^{(\rho)}_{\mu,2} A^{(1)}_{\mu,2} + \ldots + \alpha^{(\rho)}_{\mu,\mu-1} A^{(1)}_{\mu,\mu-1} + \alpha^{(\rho)}_{\mu,\mu} = 0$$

erfüllt werden, wenn für x ein beliebiger dem Werthe ξ_ρ congruenter Werth substituirt wird. Hieraus ergiebt sich aber dass diese Gleichung in Beziehung auf ϕ und x eine Identität sein muss, denn eine ganze algebraische Function von x und $\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)$ kann nicht ohne identisch zu verschwinden für sämmtliche Werthe des Argumentes x, welche einem gewissen Werthe congruent sind, Null werden.[1]

---

[1] Jede solche Function

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \sum_{\rho=0}^{\rho=m-\lambda} \beta_{\lambda,\rho} \left(\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)\right)^{\lambda} x^{\rho}$$

geht nämlich durch die Substitution $x = \xi + 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$ in eine ganze algebraische Function von 2ν über, deren Coefficienten ganze algebraische Functionen von $\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'$ und $\eta + \frac{\nu'}{\nu}\eta'$ sind. Von diesen hat speziell der Coefficient der höchsten Potenz von 2ν das Aussehen

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \beta_{\lambda,m-\lambda}\left(\eta + \frac{\nu'}{\nu}\eta'\right)^{\lambda}\left(\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'\right)^{m-\lambda} = \left(\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'\right)^{m} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m} \beta_{\lambda,m-\lambda}\left(\frac{\eta + \frac{\nu'}{\nu}\eta'}{\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'}\right)^{\lambda}.$$

Wenn nun die ursprüngliche Function für jeden Werth $x = \xi + 2\nu\omega + 2\nu'\omega'$, wo ν und ν' beliebige ganzzahlige Werthe haben, Null wird, müssen sämmtliche Coefficienten der letzteren Function für jeden rationalen Werth der Grösse $\frac{\nu'}{\nu}$ verschwinden. Hieraus folgt, da der Bruch

$$\frac{\eta + \frac{\nu'}{\nu}\eta'}{\omega + \frac{\nu'}{\nu}\omega'} = \frac{\eta}{\omega} - \frac{\pi i}{2\omega} \cdot \frac{1}{\omega' + \frac{\nu}{\nu'}\omega}$$

ist und also für verschiedene Werthe der Grösse $\frac{\nu'}{\nu}$ verschiedene Werthe annimmt, dass in der ursprünglichen Function sämmtliche Glieder von der Dimension m fehlen, und so ergiebt sich schliesslich dass diese Function identisch Null ist.

Wären nun die Functionen $A^{(1)}_{\mu,1}$, $A^{(1)}_{\mu,2}$, ..., $A^{(1)}_{\mu,\mu-1}$ sämmtlich von verschiedener Ordnung müsste jeder Coefficient $\alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu}$ Null sein und somit jede Function $H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ identisch verschwinden. Sind aber nicht alle $A^{(1)}_{\mu,\nu}$ von verschiedener Ordnung und giebt es unter den Coefficienten $\alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu}$ solche, die nicht Null sind, so kann man wie aus der folgenden Auseinandersetzung hervorgeht immer die Summe $\Sigma A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ gleich einer anderen

$$\Sigma \overline{A}_{\mu,\nu} \overline{H}_{\mu,\nu}(x)$$

setzen, in der die elliptischen Functionen $\overline{H}_{\mu,\nu}(x)$ dieselbe Form wie $H^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$ haben müssen, die ganzen algebraischen Functionen von ψ und x $\overline{A}_{\mu,\nu}$ aber sämmtlich von verschiedener Ordnung sind, was das identische Verschwinden der Functionen $\overline{H}_{\mu,\nu}(x)$ und somit auch der betreffenden Summe zur Folge hat.

Ich nenne $\alpha^{(\rho)}_{\mu,k}$ diejenige unter den nicht verschwindenden Grössen $\alpha^{(\rho)}_{\mu,\nu}$, welche den kleinsten zweiten Zeiger hat und nehme an dass es $r + 1$ Functionen $A^{(1)}_{\mu,k}$, $A^{(1)}_{\mu,k+1}$, ..., $A^{(1)}_{\mu,k+r}$ von derselben Ordnung m_k giebt. Nun bilde ich die elliptischen Functionen

$$\overline{H}^{(1)}_{\mu,k+\tau}(x) = H^{(1)}_{\mu,k+\tau}(x) - \frac{\alpha^{(\rho)}_{\mu,k+\tau}}{\alpha^{(\rho)}_{\mu,k}} H^{(1)}_{\mu,k}(x) \qquad (\tau=1,2,\ldots,\mu-k)$$

und erhalte, da

$$A^{(1)}_{\mu,k} = -\sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-k} \frac{\alpha^{(\rho)}_{\mu,k+\tau}}{\alpha^{(\rho)}_{\mu,k}} A^{(1)}_{\mu,k+\tau},$$

die Gleichung

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x) = \sum_{\nu=1}^{\nu=k-1} A^{(1)}_{\mu,\nu} H^{(1)}_{\mu,\nu}(x) + \sum_{\nu=k+1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} \overline{H}^{(1)}_{\mu,\nu}(x).$$

Durch Einführung dieser Functionen habe ich also einen Ausdruck gefunden, welcher statt $r + 1$ nur r Functionen $A^{(1)}_{\mu,\nu}$ von der Ordnung m_k enthält.

6. Damit $\int u_\mu dx$ eindeutig sei ist es nunmehr nöthig und hinreichend dass in der für die Umgebung der Unendlichkeitsstelle $x_0 + 2\varpi$ geltenden Reihenentwicklung der Function $\Sigma R^{(1)}_{\mu,\nu}$

$$M_{\mu-1}.(x - x_0 - 2\varpi)^{-(\mu-1)} + \ldots + M_1.(x - x_0 - 2\varpi)^{-1} + M_0 + \ldots$$

der Coefficient M_1 Null ist welche Periode 2ϖ auch sein mag.

Der Kürze wegen schreibe ich

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} R_{\mu,\nu}^{(1)} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-1} \psi^\lambda . g_\lambda(x),$$

$$g_\lambda(x) = \sum_{\rho=0}^{\rho=\mu-\lambda-1} \gamma_{\lambda,\rho} x^\rho,$$

$$\gamma_{\lambda,\rho} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-\lambda-\rho} \left(C_{\mu,\nu}^{(1)} c_{\lambda,\rho}^{(\mu,\nu)} - \frac{\rho+1}{\lambda} K_{\mu,\nu}^{(1)} c_{\lambda-1,\rho+1}^{(\mu,\nu)} \right)$$

sowie die für die Umgebung der Stelle x_0 geltende Reihenentwickelung der λ^{ten} Potenz der Function ψ unter der Form

$$\psi^\lambda = \sum_{\tau=0}^{\tau=\lambda-1} h_{\lambda,\tau} . (x - x_0)^{-(\lambda-\tau)} + G(x - x_0),$$

wo $G(x - x_0)$ nur positive Potenzen des Argumentes enthält, und der erste Coefficient $h_{\lambda,0}$ den Werth $(-1)^\lambda$ hat. In der Umgebung der Stelle $x_0 + 2\bar{\omega}$ bestehen alsdann die Entwickelungen

$$\psi^\lambda = \sum_{\tau=1}^{\tau=\lambda} (x - x_0 - 2\bar{\omega})^{-\tau} \sum_{\chi=\tau}^{\chi=\lambda} \frac{\underline{|\lambda}}{\underline{|\chi} \, \underline{|\lambda-\chi}} h_{\chi,\chi-\tau} . (-2\bar{\eta})^{\lambda-\chi} + G(x - x_0 - 2\bar{\omega}),$$

$$g_\lambda(x) = \sum_{k=0}^{k=\mu-\lambda-1} (x - x_0 - 2\bar{\omega})^k \sum_{\rho=k}^{\rho=\mu-\lambda-1} \frac{\underline{|\rho}}{\underline{|k} \, \underline{|\rho-k}} \gamma_{\lambda,\rho} . (x_0 + 2\bar{\omega})^{\rho-k}$$

und somit wird M_1 eine ganze algebraische Function von $x_0 + 2\bar{\omega}$ und $2\bar{\eta}$. Anstatt diese Functionen vollständig aufzustellen suche ich nur die Glieder derselben auf, welche in Beziehung auf diese Grössen von der höchsten Dimension sind. Das Produkt $\psi^\lambda . g_\lambda(x)$ enthält nur ein solches Glied, nämlich das, welches den Werthen $\tau = 1$, $\chi = 1$, $k = 0$ und $\rho = \mu - \lambda - 1$ entspricht, folglich ist die Summe der betreffenden Glieder der Function M_1 gleich

$$- \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-1} \lambda . \gamma_{\lambda,\mu-\lambda-1} (-2\bar{\eta})^{\lambda-1} (x_0 + 2\bar{\omega})^{\mu-\lambda-1}.$$

Die obige Bedingung dass M_1 für jede Periode $2\bar{\omega}$ gleich Null sein muss kann nur in der Art erfüllt werden, dass M_1 identisch verschwindet (s. § 5). Es ist also

$$\gamma_{\lambda,\mu-\lambda-1} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, \mu-1)$$

d. h. in der Function $\Sigma R^{(1)}_{\mu,\nu}$ fehlen die Glieder der höchsten Dimension gänzlich. Hieraus folgt aber dass jeder Coefficient dieser Function

$$\gamma_{\lambda,\rho} = 0 \qquad \left(\begin{smallmatrix}\lambda=1,2,\ldots,\mu-1\\ \rho=0,1,\ldots,\mu-\lambda-1\end{smallmatrix}\right)$$

ist.

7. Es ist also nun

$$\int u_\mu dx = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} B^{(1)}_{\mu,\nu} + \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} A^{(1)}_{\mu,\nu} F^{(1)}_{\mu,\nu}(x)$$

und somit erhalten wir ein Fundamentalsystem von Integralen der Gleichung $\mathfrak{P}_n = 0$, welche die Form

$$y_1 = \varphi(x),$$

$$y_\mu = \varphi(x)[A_{\mu,1} + A_{\mu,2}\varphi_{\mu,2}(x) + \cdots + A_{\mu,\mu-1}\varphi_{\mu,\mu-1}(x) + \varphi_{\mu,\mu}(x)] \qquad (\mu=2,3,\ldots,n)$$

haben, wo $\varphi(x)$ eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung, $\varphi_{2,2}(x)$, $\varphi_{3,2}(x), \ldots, \varphi_{n,n}(x)$ solche erster Gattung und die Coefficienten $A_{\mu,\nu}$ ganze algebraische Functionen $(\mu-\nu)^{\text{ten}}$ Grades von x und $\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0)$ sind, wenn wir

$$A_{\mu,1} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu-1} B^{(1)}_{\mu-1,\nu},$$

$$A_{\mu,\nu} = A^{(1)}_{\mu-1,\nu-1}, \qquad (\nu=2,3,\ldots,\mu-1)$$

$$\varphi_{\mu,\nu}(x) = F^{(1)}_{\mu-1,\nu-1}(x) \qquad (\nu=2,3,\ldots,\mu)$$

schreiben.

Vergleicht man die Ausdrücke $A^{(1)}_{\mu,\nu}$, $B^{(1)}_{\mu,\nu}$ und $R^{(1)}_{\mu,\nu}$, findet man dass

$$\frac{\partial B^{(1)}_{\mu,\nu}}{\partial x} = C^{(1)}_{\mu,\nu} A^{(1)}_{\mu,\nu} - R^{(1)}_{\mu,\nu},$$

$$\frac{\partial B^{(1)}_{\mu,\nu}}{\partial \psi} = K^{(1)}_{\mu,\nu} A^{(1)}_{\mu,\nu}$$

wenn x und ψ als von einander unabhängig betrachtet werden; hieraus folgt, da $\Sigma R^{(1)}_{\mu,\nu} = 0$ ist,

$$\frac{\partial}{\partial x}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} B^{(1)}_{\mu,\nu} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} C^{(1)}_{\mu,\nu} A^{(1)}_{\mu,\nu},$$

$$\frac{\partial}{\partial \psi}\sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} B^{(1)}_{\mu,\nu} = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} K^{(1)}_{\mu,\nu} A^{(1)}_{\mu,\nu}.$$

Die Functionen $A_{\mu,\nu}$ haben also wie die Functionen $A^{(1)}_{\mu,\nu}$ die Eigenschaft

$$\frac{\partial A_{\mu,\nu}}{\partial x} = a_{\mu,\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + a_{\mu,\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + a_{\mu,\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + a_{\mu,\nu,\mu-\nu},$$

$$\frac{\partial A_{\mu,\nu}}{\partial \psi} = b_{\mu,\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + b_{\mu,\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + b_{\mu,\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + b_{\mu,\nu,\mu-\nu}, \quad \left(\begin{smallmatrix}\mu=2,3,\ldots,n\\ \nu=1,2,\ldots,\mu-1\end{smallmatrix}\right)$$

und zwar ist hier

$$a_{\mu,1,\tau} = C^{(1)}_{\mu-1,\tau}, \qquad b_{\mu,1,\tau} = K^{(1)}_{\mu-1,\tau}, \qquad (\tau=1,2,\ldots,\mu-1)$$

$$a_{\mu,\nu,\tau} = a^{(1)}_{\mu-1,\nu-1,\tau}, \qquad b_{\mu,\nu,\tau} = b^{(1)}_{\mu-1,\nu-1,\tau}. \qquad \left(\begin{smallmatrix}\nu=2,3,\ldots,\mu-1\\ \tau=1,2,\ldots,\mu-\nu\end{smallmatrix}\right)$$

8. Wie aus der Differentialgleichung $\mathfrak{P}_n = 0$ eine andere $\mathfrak{P}^{(1)}_{n-1} = 0$ abgeleitet wurde, kann man von der Gleichung $\mathfrak{P}_n = 0$ ausgehend ein System von Differentialgleichungen von der mit $\mathfrak{P}_j = 0$ bezeichneten Art

$$\mathfrak{P}_n = 0, \quad \mathfrak{P}^{(1)}_{n-1} = 0, \quad \mathfrak{P}^{(2)}_{n-2} = 0, \quad \ldots, \quad \mathfrak{P}^{(n-1)}_1 = 0$$

aufstellen, worin $\mathfrak{P}^{(\lambda)}_{n-\lambda} = 0$ durch die Substitution von $\varphi^{(\lambda-1)}(x)\int y dx$ statt der abhängig Veränderlichen y aus der Gleichung $\mathfrak{P}^{(\lambda-1)}_{n-\lambda+1} = 0$ abgeleitet worden ist, wenn $\varphi^{(\lambda-1)}(x)$ ein doppeltperiodisches Integral letzterer Gleichung darstellt.

Aus der vorhergehenden Untersuchung folgt dass jede Gleichung $\mathfrak{P}^{(\lambda)}_{n-\lambda} = 0$ ein Fundamentalsystem von der im § 2 angegebenen Form

$$y_1 = \varphi^{(\lambda)}(x),$$
$$y_\mu = \varphi^{(\lambda)}(x)[A^{(\lambda)}_{\mu,1} + A^{(\lambda)}_{\mu,2}\varphi^{(\lambda)}_{\mu,2}(x) + \ldots + A^{(\lambda)}_{\mu,\mu-1}\varphi^{(\lambda)}_{\mu,\mu-1}(x) + \varphi^{(\lambda)}_{\mu,\mu}(x)] \quad (\mu=2,3,\ldots,n-\lambda)$$

besitzt, und zwar ist hier $\varphi^{(\lambda)}(x)$ eine doppeltperiodische Function *erster* Gattung. Mit Hilfe der in den Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x} A^{(\lambda)}_{\mu,\nu} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-\nu} a^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\tau} A^{(\lambda)}_{\mu,\nu+\tau}, \qquad \frac{\partial}{\partial \psi} A^{(\lambda)}_{\mu,\nu} = \sum_{\tau=1}^{\tau=\mu-\nu} b^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\tau} A^{(\lambda)}_{\mu,\nu+\tau}$$

vorkommenden Grössen $a^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\tau}$ und $b^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\tau}$ baue ich nun wie in § 3 die elliptischen Functionen $\Phi^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x)$ mittels der Recursionsformel

$$\Phi^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) = \varphi^{(\lambda)}(x).\varphi^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) - \sum_{\tau=1}^{\tau=\nu-1} [a^{(\lambda)}_{\mu,\tau,\nu-\tau} + \wp(x-x_0)] F^{(\lambda)}_{\mu,\tau}(x) \quad \left(\begin{smallmatrix}\mu=2,3,\ldots,n-\lambda\\ \nu=2,3,\ldots,\mu\end{smallmatrix}\right)$$

auf, indem ich

$$\Phi^{(\lambda)}_{\mu,1}(x) = \varphi^{(\lambda)}(x),$$

$$\Phi^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) = G^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) + H^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x) \qquad (\mu=1,2,\dots,n-\lambda)$$

und

$$\int G^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x)dx = C^{(\lambda)}_{\mu,\nu}x + K^{(\lambda)}_{\mu,\nu}\psi + F^{(\lambda)}_{\mu,\nu}(x)$$

schreibe. Es ergiebt sich sodann aus den Formeln des § 7

$$\varphi^{(\lambda-1)}_{\mu,\nu}(x) = F^{(\lambda)}_{\mu-1,\nu-1}(x)$$

und

$$a_{\mu,\nu,\tau} = a^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda,\tau} = C^{(\nu)}_{\mu-\nu,\tau}, \qquad b_{\mu,\nu,\tau} = b^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda,\tau} = K^{(\nu)}_{\mu-\nu,\tau}$$

sowie

$$A_{\mu,\nu} = A^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda} = A^{(\nu-1)}_{\mu-\nu+1}.$$

Weil

$$\Phi^{(\lambda)}_{1,1}(x) = \Phi^{(\lambda)}_{2,1}(x) = \dots = \Phi^{(\lambda)}_{n-\lambda,1}(x) = \varphi^{(\lambda)}(x)$$

und also

$$C^{(\lambda)}_{1,1} = C^{(\lambda)}_{2,1} = \dots = C^{(\lambda)}_{n-\lambda,1}, \qquad K^{(\lambda)}_{1,1} = K^{(\lambda)}_{2,1} = \dots = K^{(\lambda)}_{n-\lambda,1},$$

$$F^{(\lambda)}_{1,1}(x) = F^{(\lambda)}_{2,1}(x) = \dots = F^{(\lambda)}_{n-\lambda,1}(x)$$

erhält man einerseits

$$a^{(\lambda)}_{\nu+1,\nu,1} = a^{(\lambda)}_{\nu+2,\nu,1} = \dots = a^{(\lambda)}_{n-\lambda,\nu,1}, \qquad b^{(\lambda)}_{\nu+1,\nu,1} = b^{(\lambda)}_{\nu+2,\nu,1} = \dots = b^{(\lambda)}_{n-\lambda,\nu,1}$$

und andererseits

$$\varphi^{(\lambda)}_{2,2}(x) = \varphi^{(\lambda)}_{3,2}(x) = \dots = \varphi^{(\lambda)}_{n-\lambda,2}(x)$$

für $\lambda = 0, 1, \dots, n-\lambda$, wobei man unter $a^{(0)}_{\mu,\nu,\tau}$, $b^{(0)}_{\mu,\nu,\tau}$ und $\varphi^{(0)}_{\mu,\nu}(x)$ die Grössen $a_{\mu,\nu,\tau}$, $b_{\mu,\nu,\tau}$ und $\varphi_{\mu,\nu}(x)$ zu verstehen hat. Wir können also schreiben

$$a^{(\lambda)}_{\mu,\nu,1} = a^{(\lambda)}_{\nu,1}, \qquad b^{(\lambda)}_{\mu,\nu,1} = b^{(\lambda)}_{\nu,1},$$

$$\varphi^{(\lambda)}_{\mu,2}(x) = \varphi^{(\lambda)}_{2}(x).$$

Ich setze nun voraus dass wenn der Zeiger ρ kleiner als die ganze Zahl r ist, so finden die Gleichungen

$$a^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\rho} = a^{(\lambda)}_{\nu,\rho}, \qquad b^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\rho} = b^{(\lambda)}_{\nu,\rho},$$

$$\varphi^{(\lambda)}_{\mu,\rho+1}(x) = \varphi^{(\lambda)}_{\rho+1}(x)$$

statt. Da der letzten Gleichung auch die Form

$$F^{(\lambda)}_{\rho,\rho}(x) = F^{(\lambda)}_{\rho+1,\rho}(x) = \ldots = F^{(\lambda)}_{n-\lambda,\rho}(x)$$

gegeben werden kann, und

$$\Phi^{(\lambda)}_{\mu,r}(x) = \varphi^{(\lambda)}(x) \cdot \varphi^{(\lambda)}_{\mu,r}(x) - \sum_{\tau=1}^{\tau=r-1} [a^{(\lambda)}_{\mu,\tau,r-\tau} + b^{(\lambda)}_{\mu,\tau,r-\tau}\wp(x-x_0)] F^{(\lambda)}_{\mu,r-\tau}(x),$$

so ergiebt diese Voraussetzung

$$\Phi^{(\lambda)}_{r,r}(x) = \Phi^{(\lambda)}_{r+1,r}(x) = \ldots = \Phi^{(\lambda)}_{n-\lambda,r}(x),$$

und also auch

$$C^{(\lambda)}_{r,r} = C^{(\lambda)}_{r+1,r} = \ldots = C^{(\lambda)}_{n-\lambda,r}, \qquad K^{(\lambda)}_{r,r} = K^{(\lambda)}_{r+1,r} = \ldots = K^{(\lambda)}_{n-\lambda,r},$$

$$F^{(\lambda)}_{r,r}(x) = F^{(\lambda)}_{r+1,r}(x) = \ldots = F^{(\lambda)}_{n-\lambda,r}(x).$$

Hieraus erhält man aber

$$a^{(\lambda)}_{\nu+r,\nu,r} = a^{(\lambda)}_{\nu+r+1,\nu,r} = \ldots = a^{(\lambda)}_{n-\lambda,\nu,r}, \qquad b^{(\lambda)}_{\nu+r,\nu,r} = b^{(\lambda)}_{\nu+r+1,\nu,r} = \ldots = b^{(\lambda)}_{n-\lambda,\nu,r},$$

$$\varphi^{(a)}_{r+1,r+1}(x) = \varphi^{(\lambda)}_{r+2,r+1}(x) = \ldots = \varphi^{(\lambda)}_{n-\lambda,r+1}(x),$$

d. h. es bestehen die obigen drei Gleichungen auch wenn $\rho = r$ ist und somit im Allgemeinen.

9. Zusammengefasst ergeben die bisher gefundenen Resultate den Satz:

Die zu derselben Gruppe gehörenden eindeutigen Elemente eines Fundamentalsystems von Integralen einer linearen homogenen Differentialgleichung mit doppeltperiodischen Coefficienten haben die Form

$$\begin{aligned}
y_1 &= \varphi(x),\\
y_2 &= \varphi(x)[A_{2,1} + \varphi_2(x)],\\
y_3 &= \varphi(x)[A_{3,1} + A_{3,2}\varphi_2(x) + \varphi_3(x)],\\
y_4 &= \varphi(x)[A_{4,1} + A_{4,2}\varphi_2(x) + A_{4,3}\varphi_3(x) + \varphi_4(x)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_m &= \varphi(x)[A_{m,1} + A_{m,2}\varphi_2(x) + A_{m,3}\varphi_3(x) + A_{m,4}\varphi_4(x) + \ldots\\
&\qquad \ldots + A_{m,m-1}\varphi_{m-1}(x) + \varphi_m(x)],
\end{aligned}$$

wo

1) $\varphi(x)$ *eine doppeltperiodische Function zweiter Gattung bedeutet,*

2) $\varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots, \varphi_m(x)$ *doppeltperiodische Functionen erster Gattung sind, und*

3) *die Grössen* $A_{\mu,\nu}$ *ganze algebraische Functionen von* x *und* $\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)$ *von höchstens* $(\mu - \nu)^{\text{tem}}$ *Grade darstellen, wobei die Constante* x_0 *beliebig gewählt werden kann, und haben diese Functionen die Eigenschaft, dass wenn* $-\frac{\sigma'}{\sigma}(x - x_0)$ *als eine von* x *unabhängige Veränderliche* ψ *betrachtet wird, so giebt es* $m(m - 1)$ *Constanten*

$$\begin{array}{ll}
a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,m-2}, a_{1,m-1}, & b_{1,1}, b_{1,1}, \ldots, b_{1,m-2}, b_{1,m-1}, \\
a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,m-2}, & b_{2,1}, b_{2,2}, \ldots, b_{2,m-2}, \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
a_{m-1,1}, & b_{m-1,1},
\end{array}$$

welche die $m(m - 1)$ *Gleichungen des Systems*

$$\left\{\begin{array}{l}
\frac{\partial}{\partial x} A_{\mu,\nu} = a_{\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + a_{\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + a_{\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + a_{\nu,\mu-\nu}, \\
\frac{\partial}{\partial \psi} A_{\mu,\nu} = b_{\nu,1} A_{\mu,\nu+1} + b_{\nu,2} A_{\mu,\nu+2} + \ldots + b_{\nu,\mu-\nu-1} A_{\mu,\mu-1} + b_{\nu,\mu-\nu},
\end{array}\right.$$
$$\binom{\mu=2,3,\ldots,m}{\nu=1,2,\ldots,\mu-1}$$

in Identitäten überführen.

10. Die in dieser Gruppe auftretenden $\frac{m(m-1)}{2}$ Function $A_{\mu,\nu}$ werden durch die (§ 9, 3) genannten $m(m - 1)$ constanten Grössen eindeutig bestimmt.

Zu diesem Zwecke bezeichne ich mit $s_{\mu,\nu,\rho}$ die Summe sämmtlicher Glieder der Function $A_{\mu,\nu}$, welche in Beziehung auf x und ψ von ρ^{ter} Dimension sind, und mit $s^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\rho}$ die Summe der entsprechender Glieder der Function $A^{(\lambda)}_{\mu,\nu}$. Es wird also

$$A_{\mu,\nu} = s_{\mu,\nu,1} + s_{\mu,\nu,2} + \ldots + s_{\mu,\nu,\mu-\nu},$$
$$A^{(\lambda)}_{\mu,\nu} = s^{(\lambda)}_{\mu,\nu,1} + s^{(\lambda)}_{\mu,\nu,2} + \ldots + s^{(\lambda)}_{\mu,\nu,\mu-\nu}.$$

Durch Einführung dieser Bezeichnung erhält der in § 4 definirte Ausdruck $B^{(1)}_{\mu,\nu}$ das Aussehen

$$B^{(1)}_{\mu,\nu} = (C^{(1)}_{\mu,\nu}x + K^{(1)}_{\mu,\nu}\psi)\sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\nu}\frac{s^{(1)}_{\mu,\nu,\rho}}{\rho+1}$$

$$-\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-\nu}\sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\nu-\lambda+1}\frac{\psi^\lambda . x^\rho}{\lambda+\rho}\left(C^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda,\rho-1} - \frac{\rho}{\lambda}K^{(1)}_{\mu,\nu}c^{(\mu,\nu)}_{\lambda-1,\rho}\right)$$

und somit wird unter Benutzung der in § 6 aufgestellten Coefficienten $\gamma_{\lambda,\rho}$

$$\sum_{k=1}^{k=\mu-1} B^{(1)}_{\mu,k} = \sum_{k=1}^{k=\mu-1}(C^{(1)}_{\mu,k}x + K^{(1)}_{\mu,k}\psi)\sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-k}\frac{s^{(1)}_{\mu,k,\rho}}{\rho+1} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\mu-1}\sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\lambda}\frac{\gamma_{\lambda,\rho-1}}{\lambda+\rho}\psi^\lambda . x^\rho.$$

Da aber nach demselben § 6 diese Coefficienten Null sind verschwindet auf der rechten Seite die letztere Summe, und man erhält unter Beachtung der Formeln der §§ 7 und 8

$$A_{\mu,1} = \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-2}\frac{1}{\rho+1}\sum_{k=1}^{k=\mu-\rho-1}(a_{1,k}x + b_{1,k}\psi)s_{\mu,k+1,\rho} + a_{1,\mu-1}x + b_{1,\mu-1}\psi$$

denn aus $A_{\mu,\nu} = A^{(\lambda)}_{\mu-\lambda,\nu-\lambda}$ folgt $s_{\mu,\nu,\rho} = s^{(\lambda)}_{\mu\ \lambda,\nu-\lambda,\rho}$.

Aus der letzten Gleichung und der Formel $A_{\mu,\nu} = A^{(\nu-1)}_{\mu-\nu+1,1}$ ergiebt sich nun

$$A_{\mu,\nu} = \sum_{\rho=1}^{\rho=\mu-\nu-1}\sum_{k=1}^{k=\mu-\nu-\rho}\frac{1}{\rho+1}(a_{\nu,k}x + b_{\nu,k}\psi)s_{\mu,\nu+k,\rho} + a_{\nu,\mu-\nu}x + b_{\nu,\mu-\nu}\psi,$$

und es ist also

$$s_{\mu,\nu,1} = a_{\nu,\mu-\nu}x - b_{\nu,\mu-\nu}\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0),$$

$$s_{\mu,\nu,\rho} = \sum_{k=1}^{k=\mu-\nu-\rho+1}\frac{1}{\rho}\left(a_{\nu,k}x - b_{\nu,k}\frac{\sigma'}{\sigma}(x-x_0)\right)s_{\mu,\nu+k,\rho-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{k=\mu-\nu-\rho+1}\frac{1}{\rho}s_{\nu+k,\nu,1}\,s_{\mu,\nu+k,\rho-1}. \qquad (\rho=2,3,\ldots,\mu-\nu)$$

11. Als Beispiel wähle ich die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\text{(I)} \qquad \frac{d^3y}{dx^3} - [3a + 6\wp(x)]\frac{dy}{dx} - [b + 6\wp'(x)]y = 0.$$

Sie gehört zu der Classe von Gleichungen, welche keine scheinbar singulären Stellen besitzen, und deren allgemeines Integral eindeutig ist und nur eine Unendlichkeitsstelle $x = 2\varpi$ von höchstens *zweiter* Ordnung im Periodenparallelogramme haben kann. Diese Classe enthält nur vier Gleichungen dritter Ordnung, den vier Gruppen von Wurzeln der determinirenden Gleichung $-2, 2, 3$; $-2, 1, 4$; $-2, 0, 5$ und $-2, -1, 6$ entsprechend, und unter ihnen ist die obenstehende die der ersten dieser Wurzelgruppen entsprechende.

Diese Gleichung hat das doppeltperiodische Integral

$$y = \frac{\sigma(x - x_1)\sigma(x - x_2)}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma^2(x)} e^{\left(\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)}\right)x},$$

wo x_1 und x_2 durch die Gleichungen

$$\wp(x_1) + \wp(x_2) = a,$$
$$\wp'(x_1) + \wp'(x_2) = b$$

bestimmt werden. Schreiben wir

$$\wp(x_1) = \frac{a + \xi^{\frac{1}{2}}}{2}, \qquad \wp(x_2) = \frac{a - \xi^{\frac{1}{2}}}{2}$$

wird ξ eine Wurzel der Gleichung

$$\xi^3 - 2\alpha\xi^2 + (\alpha^2 - 6ab^2)\xi + b^4 - 2b^2(a^3 - g_2 a - 2g_3) = 0,$$

wo

$$\alpha = g_2 - 3a^2.$$

Da es sich hier nur um die analytische Form der zur selben Gruppe gehörenden Integrale handelt, werde ich keine anderen Fälle untersuchen als die, in welchen sämmtliche Integrale eine einzige Gruppe bilden. Damit dieses stattfindet ist es nöthig und genügend dass die letztere Gleichung nur eine Wurzel hat, d. h. dass die Constanten a und b den Bedingungen

$$18ab^2 + \alpha^2 = 0,$$

$$b\left(81a^4 - 18g_2a^2 + 24g_3a - \frac{1}{3}g_2^2\right) = 0$$

genügen. Die beiden Fälle: $b = 0$ und $b \neq 0$ können gleichzeitig behandelt werden.

Das einzige doppeltperiodische Integral y_1 hat die oben angegebene Form, wo x_1 und x_2 durch die Gleichungen

$$\wp(x_1) = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a}{6}}, \qquad \wp(x_2) = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a}{6}},$$

$$\wp'(x_1) + \wp'(x_2) = b$$

eindeutig bestimmt sind. Seine Multiplicatoren sind dritte Wurzeln der Einheit, es bestehen also die Relationen

$$x_1 + x_2 = \frac{2}{3}(\nu\omega + \nu'\omega'), \qquad \frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)} = \frac{2}{3}(\nu\eta + \nu'\eta'),$$

wo ν und ν' gewisse ganze Zahlen sind.

Die Gleichung

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 3\left(\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)} + \frac{\sigma'(x - x_1)}{\sigma(x - x_1)} + \frac{\sigma'(x - x_2)}{\sigma(x - x_2)} - 2\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\right)\frac{dz}{dx}$$

$$+ 3\left[2a + \frac{b}{\wp(x_1) - \wp(x_2)}\left(\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} - \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)} + \frac{\sigma'(x - x_1)}{\sigma(x - x_1)} - \frac{\sigma'(x - x_2)}{\sigma(x - x_2)}\right) + 4\wp(x)\right]z = 0,$$

welche durch die Substitution $y = y_1 \int z dx$ erhalten wird, hat das doppeltperiodische Integral

$$z_1 = \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_2)\right)\wp(x - x_1) + \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_1)\right)\wp(x - x_2) + \frac{g_2}{3} - 3a^2$$

und geht durch die Substitution

$$z = z_1 \int u dx$$

in

$$\frac{du}{dx} - \left(3\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + 3\frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)} - 2\frac{\sigma'(x + x_1 + x_2)}{\sigma(x + x_1 + x_2)} + \frac{\sigma'(x - x_1)}{\sigma(x - x_1)} + \frac{\sigma'(x - x_2)}{\sigma(x - x_2)}\right)u = 0$$

über. Diese Gleichung hat das Integral

$$u_1 = \wp(x + x_1 + x_2) + \frac{g_2}{12a} - \frac{3}{4}a.$$

In der allgemeinen Form des Fundamentalsystems von Integralen der Gleichung (I)

$$y_1 = \varphi(x),$$
$$y_2 = \varphi(x)[A_{2,1} + \varphi_2(x)],$$
$$y_3 = \varphi(x)[A_{3,1} + A_{3,2}\varphi_2(x) + \varphi_3(x)]$$

treten also folgende Functionen auf, wenn wir der Einfachheit wegen die beliebige Grösse x_0 gleich $-(x_1 + x_2)$ feststellen,

$$\varphi(x) = \frac{\sigma(x - x_1)\sigma(x - x_2)}{\sigma(x_1)\sigma(x_2)\sigma^2(x)} e^{\left(\frac{\sigma'(x_1)}{\sigma(x_1)} + \frac{\sigma'(x_2)}{\sigma(x_2)}\right)x},$$

$$\varphi_2(x) = 4a\frac{\sigma'(x + x_1 + x_2)}{\sigma(x + x_1 + x_2)} - \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_2)\right)\frac{\sigma'(x - x_1)}{\sigma(x - x_1)} - \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_1)\right)\frac{\sigma'(x - x_2)}{\sigma(x - x_2)},$$

$$\varphi_3(x) = 2a\wp(x + x_1 + x_2),$$

$$A_{2,1} = \left(\frac{g_2}{3} - 3a^2\right)x - 4a\frac{\sigma'(x + x_1 + x_2)}{\sigma(x + x_1 + x_2)},$$

$$A_{3,1} = \frac{1}{8a}A_{2,1}^2 + C_1 x + C_2\frac{\sigma'(x + x_1 + x_2)}{\sigma(x + x_1 + x_2)},$$

$$C_1 = \left(\wp(x_2) - \frac{a}{2}\right)\wp'(2x_1 + x_2) + \left(\frac{3}{4}a - \frac{g_2}{12a}\right)C_2,$$

$$C_2 = \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_2)\right)\frac{\sigma'(2x_1 + x_2)}{\sigma(2x_1 + x_2)} + \left(\frac{3}{2}a + \wp(x_1)\right)\frac{\sigma'(x_1 + 2x_2)}{\sigma(x_1 + 2x_2)},$$

$$A_{3,2} = \frac{1}{4a}A_{2,1}.$$

In dem speziellen Falle, dass $b = 0$ und also auch $\alpha = 0$ ist, gehen diese Functionen, weil $x_1 = -x_2$ wird, in folgende einfachere über:

$$\varphi(x) = \wp(x) - \frac{a}{2},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{\sigma'(x + x_1)}{\sigma(x + x_1)} + \frac{\sigma'(x - x_1)}{\sigma(x - x_1)} - 2\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)},$$

$$\varphi_3(x) = \wp(x),$$

$$A_{2,1} = ax + 2\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)},$$

$$A_{3,1} = \frac{1}{4}A_{2,1}^2,$$

$$A_{3,2} = \frac{1}{2}A_{2,1}.$$