SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA DES INTÉGRALES DOUBLES

PAR

GUSTAF KOBB
à STOCKHOLM.

Dans ses leçons sur le Calcul des Variations M. WEIERSTRASS a exposé une nouvelle méthode pour la recherche des maxima et des minima des intégrales simples, qui est aussi élégante que rigoureuse. Dans ce mémoire j'ai voulu essayer d'appliquer cette méthode aux intégrales doubles, en me fondant sur les admirables travaux de M. PICARD, concernant la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre. Je me borne comme M. WEIERSTRASS à considérer le cas où la fonction sous les signes sommes ne contient que des dérivées du premier ordre.

Il sera facile de voir que la méthode que je vais exposer peut être étendue aux intégrales multiples.

Une méthode analogue a aussi été employée par M. SCHWARZ dans ses beaux travaux sur les surfaces minima.[1]

---

[1] *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung* von H. A. SCHWARZ. Ges. Abhand. I Band.

I Partie.

Sur la première variation.

Soit

$$F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')$$

une fonction régulaire des 9 variables x, y, z

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad y' = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad z' = \frac{\partial z}{\partial u}, \qquad x'' = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad y'' = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad z'' = \frac{\partial z}{\partial v}$$

qui, par rapport aux 6 dernières variables, soit bien définie pour toutes valeurs réelles et, par rapport aux 3 premières, au moins pour des valeurs entre certaines limites.

Considérons l'intégrale double

$$(1) \qquad I = \iint F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')\,du\,dv$$

l'intégration étant étendue à tous les points dans l'intérieur d'une certaine courbe fermée

$$F(u, v) = 0$$

et supposons donnée une succession de valeurs de x, y, z sur cette courbe, nous nous proposons de déterminer x, y, z comme des fonctions uniformes de u et v, de manière que cette intégrale soit un maximum ou un minimum, et que x, y, z prennent sur la courbe des limites les valeurs données.

Nous pouvons aussi formuler notre question de la manière suivante:

»Determinez une surface

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

de façon que l'intégrale (1) étendue sur cette surface, en cas d'un maximum, soit plus grande, et en cas d'un minimum, soit plus petite que la même intégrale, étendue sur toute autre surface ayant les mêmes limites, et qui n'est qu'une variation infiniment petite de celle-là.»

Nous disons avec M. WEIERSTRASS que deux surfaces sont des variations infiniment petites l'une de l'autre, si à chaque point de la première correspond un seul point de l'autre, et vice-versa, et si la distance entre deux points correspondants est infiniment petite.

De cette dernière forme de notre problème nous pouvons déduire une propriété importante de la fonction F. Nous observons que la valeur de l'intégrale (1) dépend seulement de la forme de la surface et pas du tout de la manière dont nous nous sommes servis pour exprimer les coordonnées x, y, z.

Supposons que u et v soient des fonctions uniformes de u_1 et v_1 et aussi que u_1 et v_1 soient des fonctions uniformes de u et v; si nous remplaçons les variables u et v par u_1 et v_1, l'intégrale (1) doit conserver la même valeur. Ainsi en appellant C la courbe

$$F(u, v) = 0$$

et C' celle, que devient C en remplaçant u et v par u_1 et v_1 on doit avoir

$$(2) \qquad \iint_C F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')\,du\,dv$$
$$= \iint_{C'} F(x, y, z, x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1'')\,du_1\,dv_1$$

où

$$x_1' = \frac{\partial x}{\partial u_1}, \qquad y_1' = \frac{\partial y}{\partial u_1}, \qquad z_1' = \frac{\partial z}{\partial u_1},$$
$$x_1'' = \frac{\partial x}{\partial v_1}, \qquad y_1'' = \frac{\partial y}{\partial v_1}, \qquad z_1'' = \frac{\partial z}{\partial v_1}.$$

La relation la plus générale entre u et v et u_1 et v_1 serait

$$\begin{aligned} u &= ku_1 + k_1 v_1 + (u_1, v_1)_2 + \cdots \\ v &= lu_1 + l_1 v_1 + (u_1, v_1)_2 + \cdots \end{aligned} \qquad kl_1 - k_1 l \gtrless 0$$

mais il suffit de considérer les termes linéaires.

Il faut maintenant exprimer $x', y', z', x'', y'', z''$ par $x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1''$. On a

$$\begin{aligned} u_1 &= \lambda_1 u + \varkappa_1 v, \\ v_1 &= \lambda u + \varkappa v, \end{aligned} \qquad \varkappa\lambda_1 - \lambda\varkappa_1 = (kl_1 - k_1 l)^{-1}$$

et par conséquent

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u_1}\cdot\lambda_1 + \frac{\partial x}{\partial v_1}\cdot\lambda = \lambda_1 x_1' + \lambda x_1'',$$

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial u_1}\cdot\varkappa_1 + \frac{\partial x}{\partial v_1}\cdot\varkappa = \varkappa_1 x_1' + \varkappa x_1''$$

etcet.

Considérons maintenant le premier membre de (2) comme fonction de u_1 et v_1, nous aurons

$$I = (kl_1 - k_1 l)\iint_C F(x\,, y\,, z\,, x', y', z', x'', y'', z'')\,du_1 dv_1$$

ou en exprimant $x', y', z', x'', y'', z''$ par $x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1''$

$$I = \frac{1}{\varkappa\lambda_1 - \varkappa_1\lambda}\iint_C F(x\,, y\,, z\,, \lambda_1 x_1' + \lambda x_1''\,, \ldots, \varkappa_1 x_1' + \varkappa x_1''\,, \ldots)\,du_1 dv_1$$

et, par conséquent, en vertu de (2)

$$\iint_C F(x\,, y\,, z\,, x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1'')\,du_1 dv_1$$

$$= \frac{1}{\varkappa\lambda_1 - \varkappa_1\lambda}\iint_C F(x\,, y\,, z\,, \lambda_1 x_1' + \lambda x_1'', \ldots, \varkappa_1 x_1' + \varkappa x_1'', \ldots)\,du_1 dv_1.$$

Pour que cette égalité ait lieu, il faut et il suffit que les éléments des deux intégrales deviennent égaux. Ainsi en supprimant les accents

$$(3)\qquad (\varkappa\lambda_1 - \varkappa_1\lambda)F(x\,, y\,, z\,, x', y', z', x'', y'', z'')$$
$$= F(x\,, y\,, z, \lambda_1 x' + \lambda x'', \ldots, \varkappa_1 x' + \varkappa x'', \ldots).$$

Cette relation doit avoir lieu pour toutes les valeurs de $\lambda, \lambda_1, \varkappa, \varkappa_1$, qui remplissent la condition

$$\varkappa\lambda_1 - \varkappa_1\lambda \gtrless 0.$$

Supposons donc

$$\lambda_1 = 1 + \tau_1, \qquad \varkappa_1 = \varepsilon_1,$$
$$\lambda = \tau, \qquad \varkappa = 1 + \varepsilon$$

et développons les deux membres de (3) suivant des puissances de $\tau, \tau_1, \varepsilon, \varepsilon_1$, nous aurons en égalant les coefficients de $\tau, \tau_1, \varepsilon, \varepsilon_1$ les relations importantes

$$(4) \quad \begin{cases} F = x' \dfrac{\partial F}{\partial x'} + y' \dfrac{\partial F}{\partial y'} + z' \dfrac{\partial F}{\partial z'}, \\ 0 = x'' \dfrac{\partial F}{\partial x'} + y'' \dfrac{\partial F}{\partial y'} + z'' \dfrac{\partial F}{\partial z'}, \\ 0 = x' \dfrac{\partial F}{\partial x''} + y' \dfrac{\partial F}{\partial y''} + z' \dfrac{\partial F}{\partial z''}, \\ F = x'' \dfrac{\partial F}{\partial x''} + y'' \dfrac{\partial F}{\partial y''} + z'' \dfrac{\partial F}{\partial z''}. \end{cases}$$

Ces relations joueront un rôle capital dans toute la théorie suivante.

Reprenons l'étude de l'intégrale (1) et cherchons la variation, que subit sa valeur, si nous étendons l'intégration sur une nouvelle surface déterminée par les coordonnées

$$\bar{x} = x + \xi, \qquad \bar{y} = y + \eta, \qquad \bar{z} = z + \zeta$$

où nous supposons d'abord ξ, η, ζ des fonctions régulaires des variables u et v. La différence entre les deux valeurs de l'intégrale devient

$$\Delta I = \iint\limits_C \Big\{ F\Big(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, x' + \frac{\partial \xi}{\partial u}, \dots, x'' + \frac{\partial \xi}{\partial v}, \dots\Big) \\ - F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'') \Big\} du\, dv$$

et la première variation

$$\delta I = \iint\limits_C \Big\{ \frac{\partial F}{\partial x} \xi + \frac{\partial F}{\partial y} \eta + \frac{\partial F}{\partial z} \zeta + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial x''} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \dots \Big\} du\, dv.$$

On a ensuite les identités

$$\frac{\partial}{\partial u}\Big(\xi \frac{\partial F}{\partial x'}\Big) = \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial \xi}{\partial u} + \xi \frac{\partial}{\partial u}\Big(\frac{\partial F}{\partial x'}\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\Big(\xi \frac{\partial F}{\partial x''}\Big) = \frac{\partial F}{\partial x''} \frac{\partial \xi}{\partial v} + \xi \frac{\partial}{\partial v}\Big(\frac{\partial F}{\partial x''}\Big)$$

etcet.

Alors en intégrant par partie, nous aurons

$$(5)\quad \delta I = \iint\limits_{C} \left\{ \left[\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) \right] \xi + \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) \right] \eta \right.$$

$$\left. + \left[\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) \right] \zeta \right\} du\, dv$$

$$+ \int\limits_{C} \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z'} \right] dv - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z''} \right] du \right\}.$$

Dans la dernière intégrale, l'intégration est effectuée le long du contour C. Nous avons supposé que les limites de l'intégrale (1), ainsi que les valeurs de x, y, z aux limites soient determinées. Donc les variations s'annulent aux limites; l'intégrale simple disparait, et la première variation se réduit à l'intégrale double.

Nous allons transformer celle-ci, mais dans ce but, il faut étudier les équations (4).

En différentiant ces équations par rapport à $x'y'z'\ x''y''z''$ nous aurons:

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= x' \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'}, \\ \frac{\partial F}{\partial x''} &= x' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x''} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x''}, \\ 0 &= x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'}, \\ 0 &= x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x''} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x''} + \frac{\partial F}{\partial x'}; \\ \frac{\partial F}{\partial x'} &= x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x'} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'}, \\ 0 &= x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x''} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x''}, \\ 0 &= x' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x'} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'} + \frac{\partial F}{\partial x''}, \\ 0 &= x' \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x''} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x''}, \end{aligned} \right.$$

$$
(6)\qquad\left\{
\begin{aligned}
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'},\\
\frac{\partial F}{\partial y''} &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y''} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y''},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y''} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y''} + \frac{\partial F}{\partial y'},\\
\frac{\partial F}{\partial y'} &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y''},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'} + \frac{\partial F}{\partial y''},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y''},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2},\\
\frac{\partial F}{\partial z''} &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z''} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z''},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z''} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z''} + \frac{\partial F}{\partial z'},\\
\frac{\partial F}{\partial z'} &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z'},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z''} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z'} + \frac{\partial F}{\partial z''},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z''} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}.
\end{aligned}
\right.
$$

Entre ces 24 équations on peut d'abord éliminer les dérivées de F du premier ordre; il reste 18 équations, qui se partagent en trois groupes de 6 équations entre les dérivées du second ordre.

$$
(7)\left\{\begin{array}{l}
0 = x' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'}, \quad 0 = x'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x'} + z'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'}, \\[2ex]
0 = x' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} + y' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + z' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y'}, \quad 0 = x'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} + y'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'^2} + z'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y'}, \\[2ex]
0 = x' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z'} + y' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} + z' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'^2}, \quad 0 = x'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z'} + y'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} + z'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'^2}, \\[1ex]
\hline \\[1ex]
0 = x' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x''^2} + y' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x''} + z' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x''}, \quad 0 = x'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x''^2} + y'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x''} + z'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x''}, \\[2ex]
0 = x' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y''} + y' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y''^2} + z' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y''}, \quad 0 = x'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y''} + y'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y''^2} + z'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y''}, \\[2ex]
0 = x' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z''} + y' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z''} + z' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z''^2}, \quad 0 = x'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z''} + y'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z''} + z'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z''^2}, \\[1ex]
\hline \\[1ex]
2x' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''} + x' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x''} \right) + z' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x''} \right) = 0, \\[2ex]
x' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y''} \right) + 2y' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y''} + z' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y'} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y''} \right) = 0, \\[2ex]
x' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z'} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z''} \right) + y' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z'} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z''} \right) + 2z' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''} = 0, \\[2ex]
2x'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x'} + y'' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x''} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} \right) + z'' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x''} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'} \right) = 0, \\[2ex]
x'' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y''} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'} \right) + 2y'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial y'} + z'' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y''} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y'} \right) = 0, \\[2ex]
x'' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z''} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z'} \right) + y'' \left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z''} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z'} \right) + 2z'' \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z'} = 0.
\end{array}\right.
$$

On observe, que les coefficients de ces systèmes sont les mêmes; seulement les dérivées sont différentes. Il suffit donc de résoudre le premier système pour que les autres s'en déduisent immédiatement.

Considérons ainsi les 6 premières équations, et éliminons entre eux les dérivées

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}.$$

On aura

$$(x'y'' - x''y')\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + (x'z'' - x''z')\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'} = 0,$$

$$(y'z'' - y''z')\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} + (y'x'' - y''x')\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'} = 0,$$

$$(z'x'' - z''x')\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'} + (z'y'' - z''y')\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y'} = 0$$

On voit aisément que ces équations sont satisfaites en posant

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} = F_1 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'} = F_1 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'} = F_1 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}$$

où F_1 est un certain facteur commun. En substituant les valeurs de $\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}$ dans la première des équations (7), nous aurons

$$x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = -F_1 \left\{ y' \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z' \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \right\},$$

ou

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = F_1 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2.$$

D'une manière analogue nous trouverons

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \text{ et } \frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}.$$

Ayant ainsi résolu les équations (7), nous abordons le système de très importantes formules

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} = F_1 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2, &\qquad& \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'} = F_1 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} = F_1 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}^2, && \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z'} = F_1 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2} = F_1 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2, && \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x'} = F_1 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x''^2} = F_2 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2, && \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y''} = F_2 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2} = F_2 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}^2, && \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z''} = F_2 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2} = F_2 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2, && \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x''} = F_2 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''} = F_3 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2, && \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} = 2F_3 \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y''} = F_3 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}^2, && \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z'} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y'} = 2F_3 \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\
&\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z''} = F_3 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2, && \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z'} = 2F_3 \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}.
\end{aligned}
\right.
$$

F_2 et F_3 sont d'autres facteurs communs.

Reprenons maintenant notre intégrale double (5) et étudions l'expression

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right).$$

De la première des équations (4) nous tirons, en différentiant par rapport à x,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x}$$

ensuite on a, en éffectuant les différentiations,

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x} x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}\frac{\partial y'}{\partial u}$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''}\frac{\partial x''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y''}\frac{\partial y''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z''}\frac{\partial z''}{\partial u},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x} x'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z} z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x'}\frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'}\frac{\partial y'}{\partial v}$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z'}\frac{\partial z'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\frac{\partial x''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y''}\frac{\partial y''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z''}\frac{\partial z''}{\partial v}.$$

Suivant les définitions des quantités

$$x', y', z', x'', y'', z''$$

on a évidemment

$$\frac{\partial x''}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y''}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z''}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial v}.$$

Ainsi

$$-\left\{\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right\}$$

$$= y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}\right) + z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x}\right) + x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z}$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}\frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\frac{\partial x''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y''}\frac{\partial y''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z''}\frac{\partial z''}{\partial v}$$

$$+ 2\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''}\frac{\partial x'}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'}\right)\frac{\partial y'}{\partial v} + \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z'}\right)\frac{\partial z'}{\partial v}.$$

Maintenant nous employons les formules (8) et substituons les valeurs de $\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y'}$ etc.

On aura donc,

$$
\begin{aligned}
&-\left\{\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right\} \\
&=y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)+z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)+x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z} \\
&\quad+\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\left\{F_1\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial u}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial u}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial u}\right]\right. \\
&\qquad+F_2\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial v}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y''}{\partial v}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z''}{\partial v}\right] \\
&\qquad\left.+2F_3\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial v}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial v}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial v}\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

On peut montrer que la première partie de cette expression est aussi divisible par

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}.$$

En ce but, nous différentions les équations (4) par rapport à x, y, z. Nous aurons donc

$$
(9)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x}&=x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}, & 0&=x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}, \\
\frac{\partial F}{\partial y}&=x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}, & 0&=x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}, \\
\frac{\partial F}{\partial z}&=x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z}, & 0&=x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z}, \\
\frac{\partial F}{\partial x}&=x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}, & 0&=x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}, \\
\frac{\partial F}{\partial y}&=x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y}, & 0&=x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial y}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y}, \\
\frac{\partial F}{\partial z}&=x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z}, & 0&=x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial z}.
\end{aligned}\right.
$$

Entre les 6 premières équations nous éliminons

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z}$$

en multipliant la première par x'' et en retranchant la seconde multipliée par x'; ensuite, la troisième par y'' et la quatrième par y'; et enfin, la cinquième par z'' et la sixième par z'. Ainsi

$$x'' \frac{\partial F}{\partial x} = (x''y' - x'y'') \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + (x''z' - x'z'') \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x},$$

$$y'' \frac{\partial F}{\partial y} = (y''z' - y'z'') \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y} + (y''x' - y'x'') \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y},$$

$$z'' \frac{\partial F}{\partial z} = (z''x' - z'x'') \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} + (z''y' - z'y'') \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z}$$

et en ajoutant ces équations

$$(10) \qquad -\left[x'' \frac{\partial F}{\partial x} + y'' \frac{\partial F}{\partial y} + z'' \frac{\partial F}{\partial z}\right]$$
$$= (x''y' - x'y'')\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}\right) + (x''z' - x'z'')\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x}\right)$$
$$+ (z''y' - z'y'')\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z}\right).$$

On aura aussi de la $7^{\text{ième}}$, $9^{\text{ième}}$ et $11^{\text{ième}}$ des équations (9)

$$(11) \qquad x'' \frac{\partial F}{\partial x} + y'' \frac{\partial F}{\partial y} + z'' \frac{\partial F}{\partial z}$$
$$= x''\left[x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z}\right] + y''\left[y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial y} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z} + x'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x}\right]$$
$$+ z''\left[z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z} + x'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y}\right]$$

et ainsi de la $8^{\text{ième}}$, $10^{\text{ième}}$ et $12^{\text{ième}}$

$$(12) \qquad 0 = x'\left[x'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z}\right]$$
$$+ y'\left[y'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial y} + z'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z} + x'' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x}\right] + z'\left[z'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z} + x'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x} + y'' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y}\right].$$

Considérons enfin les expressions

$$y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right) + z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right) + x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} = A,$$

$$z'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}\right) + x'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right) + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z} + x''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} = B,$$

$$x'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right) + y'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}\right) + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z} + x''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y} = C.$$

En multipliant la première par x', la seconde par y' et la troisième par z', nous aurons en les ajoutant et en tenant compte à l'équation (12).

$$Ax' + By' + Cz' = 0$$

et d'une manière analogue en vertu des équations (10) et (11)

$$Ax'' + By'' + Cz'' = 0$$

d'où suit immédiatement

$$A = G_1\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \qquad B = G_1\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \qquad C = G_1\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

et par conséquent

$$(13) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)$$

$$= -\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\left\{G_1 + F_1\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial u} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial u} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial u}\right]\right.$$

$$+ F_2\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial v} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y''}{\partial v} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z''}{\partial v}\right]$$

$$\left. + 2F_3\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial v} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial v} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial v}\right]\right\}.$$

D'après le même procédé, formons les expressions

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right).$$

Alors nous trouverons que la quantité entre les $\{\}$ reste la même, ce qui était à attendre, parce que cette quantité est invariable par la substitution circulaire

$$(x, y, z).$$

C'est seulement le premier facteur qui est changé en

$$\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

Nous introduisons maintenant la notation

$$(14)\quad \begin{aligned} G = -\Bigg\{ G_1 &+ F_1\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial u}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial u}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial u}\right] \\ &+ F_2\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x''}{\partial v}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y''}{\partial v}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z''}{\partial v}\right] \\ &+ 2F_3\left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\frac{\partial x'}{\partial v}+\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}\frac{\partial y'}{\partial v}+\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\frac{\partial z'}{\partial v}\right]\Bigg\} \end{aligned}$$

et nous aurons ainsi

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) &= \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} G, \\ \frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) &= \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} G, \\ \frac{\partial F}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) &= \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} G. \end{aligned}\right.$$

En substituant ces expressions dans la formule (5) celle-ci devient

$$\delta I = \iint G \left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \eta + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \zeta \right] du dv.$$

Telle est la forme définitive, que nous pouvons donner à la première variation.

Parmi toutes les variations, que la surface peut subir, ils s'en trouvent certainement de la forme

$$\xi = k\xi_1, \qquad \eta = k\eta_1, \qquad \zeta = k\zeta_1$$

où ξ_1, η_1, ζ_1 sont des fonctions arbitraires et k un constant également arbitraire. Dans ce cas, la variation totale ΔI de l'intégrale (1) prend la forme

$$(16) \quad \Delta I = k \iint G \left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \xi_1 + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \eta_1 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \zeta_1 \right] du dv$$
$$+ k^2(\ldots)_2 + \ldots.$$

Nous pouvons toujours choisir k si petite afin que le signe du second membre ne dépende que du signe du premier terme et du signe du k; or si ΔI conserve toujours le même signe indépendant de k, il faut que l'intégrale double soit nulle

$$\iint G \left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \xi_1 + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \eta_1 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \zeta_1 \right] du dv = 0$$

ou en introduisant une notation, qui sera conservée

$$w = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \xi + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \eta + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \zeta$$

$$(17) \qquad \iint G w du dv = 0.$$

Considérons maintenant une intégrale double

$$\iint \varphi(u, v) \psi(u, v) du dv$$

étendue sur tous les points dans l'intérieur de la courbe fermée

$$f(u, v) = 0.$$

Il n'est pas nécessaire que la limite soit une seule courbe; elle peut aussi être composée de plusieurs parties. Supposons que φ et ψ soient des fonctions continues et cherchons les conditions nécessaires, pour que l'intégrale (17) soit nulle, si $\psi(u, v)$ est complètement arbitraire.

Il est evident que l'on doit avoir

$$\varphi(u, v) = 0$$

pour tous les points dans l'intérieur de la courbe

$$f(u, v) = 0,$$

car dans l'autre cas, nous pourrions choisir le signe de $\psi(u, v)$ égal au signe de $\varphi(u, v)$, de sorte que l'intégrale devienne une somme des quantités positives, qui ne soit pas nulle. Il est facile de voir, que cette condition existe encore, si la fonction $\psi(u, v)$ s'annule aux limites. En effet posons

$$\psi(u, v) = f(u, v)\psi_1(u, v),$$
$$\varphi_1(u, v) = f(u, v)\,\varphi(u, v).$$

Alors l'intégrale devient

$$\iint \varphi_1(u, v)\psi_1(u, v) = 0,$$

d'où nous trouvons

$$\varphi_1(u, v) = 0$$

pour tous les points intérieurs. Mais de cette équation et de l'équation

$$\varphi_1(u, v) = f(u, v)\varphi(u, v)$$

il s'en suit que

$$\varphi(u, v) = 0,$$

et parce que $\varphi(u, v)$ est supposée continue, que l'équation subsiste même aux limites.

Nous appliquons ces considérations à l'intégrale

$$(17) \qquad \iint G w \, du \, dv = 0.$$

Ici w est la fonction arbitraire, parce que elle renferme les variations ξ, η, ζ. G au contraire est indépendante des variations. Après le théorème récemment démontré nous trouverons

$$(18) \qquad G = 0$$

pour tous les points situés dans l'intérieur et sur la courbe

$$f(u, v) = 0,$$

qui forme les limites de l'intégrale.

La condition

$$G = 0$$

nous donne une équation aux dérivées partielles du second ordre, déterminant les surfaces, qui peuvent rendre l'intégrale double (1) un maximum ou un minimum.

Il nous reste à étudier les solutions de cette équation, et à voir si elles donnent un signe invariable à la variation totale

$$\Delta I$$

mais avant de faire ces recherches nous devons nous rendre compte des restrictions, que nous avons faites pour transformer l'intégrale δI.

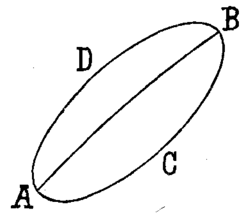
Nous avons employé dans ce but l'identité

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\xi \frac{\partial F}{\partial x'}\right) = \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial \xi}{\partial u} + \xi \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)$$

que nous avons integrée pour parvenir à la forme (5). Mais, même pour des variations continues, nous sommes obligés de supposer que les variables

$$x, y, z, x', y', z', x'', y'', z''$$

sont continues. Supposons également que x, y, z soient continues, mais que $x', y', z', x'', y'', z''$ cessent de l'être et, par conséquent, qu'il existe des lignes de discontinuité sur la surface. Soit AB une telle ligne et traçons autour de AB un certain contour fermé CD sur la surface de façon que dans l'intérieur de ce contour il n'existe pas d'autre ligne de discontinuité. Maintenant nous pouvons faire varier la surface de manière que la partie au dehors de CD ne soit pas changée. Ensuite nous partageons l'intégrale (1) en deux parties; dans l'une l'intégration est étendue sur la partie ABD de la surface, dans l'autre sur la partie ABC. Dans chaque partie la surface est régulière et nous pouvons, par conséquent, effectuer la transformation de l'intégrale à la forme (5). Ainsi:



$$\delta I = \iint\limits_{ABD} G w\,du\,dv + \iint\limits_{ABC} G w\,du\,dv + \int\limits_{ABDA} H + \int\limits_{ACBA} H,$$

$$H = \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z'}\right] dv - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z''}\right] du.$$

Mais il est évident, que l'on doit avoir

$$G = 0$$

pour toute partie régulière de la surface.

Ensuite, les variations ξ, η, ζ s'annulent au contour CD. Alors δI se réduit à

$$\delta I = \int\limits_{AB} H + \int\limits_{BA} H = \int\limits_{AB} (\overset{+}{H} - \overset{-}{H}),$$

si nous désignons par $\overset{+}{H}$ et $\overset{-}{H}$ les valeurs de H aux deux côtés de la ligne de discontinuité.

$$\begin{aligned}\delta I = \int\limits_{AB} \Bigg\{ & \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_-\right)\frac{dv}{ds} - \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)_-\right)\frac{du}{ds}\right]\xi \\ & + \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_-\right)\frac{dv}{ds} - \left(\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_-\right)\frac{du}{ds}\right]\eta \\ & + \left[\left(\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_-\right)\frac{dv}{ds} - \left(\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_-\right)\frac{du}{ds}\right]\zeta \Bigg\} ds,\end{aligned}$$

ds étant l'élément de l'arc.

Par les mêmes considérations qu'au paravant nous trouverons, pour que

$$\delta I = 0$$

que suivant la ligne de discontinuité

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_-\right]\frac{dv}{ds} - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)_-\right]\frac{du}{ds} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_-\right]\frac{dv}{ds} - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_-\right]\frac{du}{ds} = 0,$$

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right)_-\right]\frac{dv}{ds} - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_+ - \left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)_-\right]\frac{du}{ds} = 0$$

ou en d'autres mots, que les quantités

$$(19) \qquad \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial F}{\partial x''}\frac{du}{ds}, \quad \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial F}{\partial y''}\frac{du}{ds}, \quad \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{dv}{ds} - \frac{\partial F}{\partial z''}\frac{du}{ds}$$

doivent rester toujours continues suivant chaque courbe tracée sur la surface, pour que l'intégrale (1) puisse être un maximum ou un minimum.

Nous avons trouvé comme condition nécessaire à l'existence d'un maximum ou d'un minimum, que la surface ou au moins chaque partie régulière de la surface, doit satisfaire à l'équation aux dérivées partielles

$$G = 0.$$

Il faut, maintenant, étudier les solutions de cette équation et distinguer celles, qui pour toute variation possible donnent à ΔI un signe invariable.

II Partie.

Sur l'équation $G = 0$.

Etant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0$$

on peut se demander s'il peut se présenter qu'une intégrale de cette équation soit déterminée seulement par la condition de passer par un certain contour fermé de l'espace. L'équation de LAPLACE

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

en donne l'exemple, mais est elle la seule? M. PICARD [1] a résolu cette question pour les équations linéaires, et il a donné des criteriums avec lesquels on peut, d'avance, sans avoir intégré l'équation proposée, juger s'il existe ou non une seule intégrale passant par le contour.

En nous appuyant sur les résultats de M. PICARD nous allons étudier la même question pour les équations non linéaires. Nous nous bornerons, pourtant, aux équations qui sont linéaires par rapport aux dérivées du second ordre. Soit

$$(1) \qquad \Phi(x) = A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + 2B\frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} + C\frac{\partial^2 x}{\partial v^2} + F\left(u, v, x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}\right) = 0$$

l'équation proposée. A, B et C sont aussi des fonctions de $u, v, x,$ $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}$. Soit

$$x, \ x + \xi$$

deux intégrales de cette équation qui passent par le contour donné, on a, évidemment,

$$(2) \qquad \Delta\Phi = \Phi(x + \xi) - \Phi(x) = 0.$$

[1] Journal de Math. 4 série, tome 6, pag. 145. *Sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives.*

Considérons l'intégrale double

$$\iint \xi[\Phi(x+\xi)-\Phi(x)]\,du\,dv. \tag{3}$$

L'intégration est étendue sur tous les points dans l'intérieur de la courbe fermée

$$f(u\,,v)=0,$$

qui est la projection dans le plan $(u\,,v)$ du contour donné. En vertu de (2) l'intégrale double (3) est nulle. On voit ensuite, immédiatement, que ξ s'annulle sur la courbe

$$f(u\,,v)=0.$$

Développons, maintenant, la différence (2) suivant la formule de TAYLOR. On aura, en s'arrêtant aux termes du second ordre

$$\Phi(x+\xi)-\Phi(x) \tag{4}$$
$$=A\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}+2B\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}+C\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}+\frac{\partial\Phi}{\partial x'}\frac{\partial\xi}{\partial u}+\frac{\partial\Phi}{\partial x''}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\frac{\partial\Phi}{\partial x}\xi+H_1$$

où H_1 renferme les termes du second ordre. Comme Φ est linéaire par rapport aux dérivées du second ordre, il n'y a pas de termes de la forme

$$\left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\right)^2,\ \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}\right)^2,\ \left(\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}\right)^2.$$

Alors, on peut écrire

$$\xi H_1=\Sigma A'_{\lambda\mu}\tau_\lambda\tau_\mu$$

où τ_λ et τ_μ sont les trois quantités $\xi\,,\frac{\partial\xi}{\partial u}\,,\frac{\partial\xi}{\partial v}$ et les $A'_{\lambda\mu}$ sont des fonctions linéaires de ξ et de ses dérivées du premier et du second ordre.

Nous substituons la valeur donnée par (4) de la différence (2) dans l'intégrale (3) et intégrons par partie les termes

$$A\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}\,,\ 2B\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}\,,\ C\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}$$

en observant que ξ s'annulle aux limites. Par cette intégration par partie les termes sous les signes sommes, qui proviennent des termes du premier ordre de la différence (4) deviennent aussi une forme quadratique des variables τ_λ, τ_μ

$$H = \sum A_{\lambda\mu} \tau_\lambda \tau_\mu$$

mais, où les $A_{\lambda\mu}$ sont indépendantes de ξ et de ses dérivées. L'intégrale double (3) prend ainsi la forme

$$\iint \{ \sum [A_{\lambda\mu} + A'_{\lambda\mu}] \tau_\lambda \tau_\mu \} du\, dv = 0. \tag{5}$$

Supposons que

$$x = x(u, v)$$

soit une intégrale de l'équation (1). Substituons cette valeur dans les coefficients $A_{\lambda\mu}$ et $A'_{\lambda\mu}$. Alors, si la forme quadratique

$$H = \sum A_{\lambda\mu} \tau_\lambda \tau_\mu$$

dans la région considérée du plan est une forme définie, on peut toujours fixer des limites supérieures de ξ et de ses dérivées du premier est du second ordre, de façon que la forme quadratique

$$\sum [A_{\lambda\mu} + A'_{\lambda\mu}] \tau_\lambda \tau_\mu$$

sera aussi une forme définie. Mais, si la forme sous les signes sommes est définie, l'équation (5) est impossible, sauf pour

$$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0 \quad \text{ou} \quad \xi = \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \xi}{\partial v} = 0.$$

Cela veut dire, que l'on peut entourer le contour donné d'une aire telle que dans cette aire il n'existe pas d'autres intégrales de l'équation (1), qui passent par le contour donné, et qui différent très peu de l'intégrale déjà trouvée. Ainsi pour démontrer l'existence d'une telle aire, il suffit d'établir, que la forme quadratique

$$H = \sum A_{\lambda\mu} \tau_\lambda \tau_\mu$$

qui provient des termes du premier ordre de la différence

$$\Delta \Phi = \Phi(x + \xi) - \Phi(x)$$

soit une forme définie.

Ces résultats peuvent, facilement, être étendus à une équation du second ordre avec un nombre quelconque de variables dépendantes et indépendantes, ainsi qu'à un système d'équations. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse du système:

$$\Phi_1(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_2(x, y, z) = 0, \qquad \Phi_3(x, y, z) = 0.$$

Alors, on considère l'intégrale double

$$\iint \{\xi \Delta \Phi_1 + \eta \Delta \Phi_2 + \zeta \Delta \Phi_3\} du dv = 0.$$

Il y a, pourtant, une simplification importante, qu'on doit observer. Nous avons supposé l'existence d'un certain système d'intégrales

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

et nous voulons savoir s'il existe un autre

$$x + \xi, \; y + \eta, \; z + \zeta$$

qui passe par le même contour. Mais alors, il n'est pas nécessaire que les trois fonctions ξ, η et ζ soient indépendantes. En effet, cela revient, au fond, à la question de faire correspondre à une surface primitive une autre, qui en est infiniment voisine. Cela peut se faire d'une infinité de manières, mais, si la surface primitive est régulaire il suffit, évidemment, de poser

$$\xi = al, \qquad \eta = bl, \qquad \zeta = cl$$

où a, b, c, sont des cosinus directeurs de la normale de la surface primitive au point (x, y, z). Alors, la quantité sous les signes sommes devient une forme quadratique de l et de ses premières dérivées, sur laquelle nous pouvons employer notre méthode précédente.

Nous allons employer ces principes sur notre équation

$$G = 0$$

mais, il vaut mieux considérer le système équivalent I (15)

$$\Gamma_1 = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) = 0,$$

$$\Gamma_2 = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = 0,$$

$$\Gamma_3 = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) = 0.$$

Notre intégrale double sera alors

$$\iint \{\xi\Delta\Gamma_1 + \eta\Delta\Gamma_2 + \zeta\Delta\Gamma_3\} du dv$$

ou, en nous bornant aux termes linéaires,

$$(6) \qquad \iint \{\xi\partial\Gamma_1 + \eta\partial\Gamma_2 + \zeta\partial\Gamma_3\} du dv.$$

En vertu de la forme spéciale des coefficients des dérivées du second ordre on peut aussi intégrer par partie les termes de H_1, qui contiennent les secondes dérivées de ξ, η et ζ. Les fonctions $A'_{\lambda\mu}$ ne contiennent pas donc ces dérivées et, par conséquent, il suffit de fixer des limites supérieures de ξ, η, ζ et de leurs *premières* dérivées seulement.

Pour montrer cela il suffit de considérer les termes de la forme

$$\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2}, \quad \text{etc.}$$

car les autres termes sont immédiatement intégrables. On a

$$\Gamma_1 = -\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} - \dots$$

et, par conséquent

$$\Delta\Gamma_1 = -\frac{\partial^3 F}{\partial y'\partial x'^2}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} - \frac{\partial^3 F}{\partial x'^2\partial y'}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \dots$$

ou

$$\Delta\Gamma_1 = -\frac{\partial^3 F}{\partial y'\partial x'^2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial u}\right) - \dots.$$

De la même manière on peut traiter tous les termes de cette forme. On voit donc qu'ils sont intégrables.

Il s'agit ensuite de former l'expression

$$\xi\delta\Gamma_1 + \eta\delta\Gamma_2 + \zeta\delta\Gamma_3.$$

Dans ce but partons des formules données I (15)

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} G = \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right) = \Gamma_1,$$

$$\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} G = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right) = \Gamma_2,$$

$$\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} G = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right) = \Gamma_3.$$

On aura

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \delta G + \delta \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} G = \delta\Gamma_1,$$

$$\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \delta G + \delta \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} G = \delta\Gamma_2,$$

$$\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \delta G + \delta \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} G = \delta\Gamma_3.$$

En multipliant la première équation par ξ, la seconde par η, la troisième par ζ et en les ajoutant on trouvera, parce que

$$G = 0$$

$$\left\{\xi \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + \zeta \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}\right\} \delta G = \xi\delta\Gamma_1 + \eta\delta\Gamma_2 + \zeta\delta\Gamma_3$$

ou en employant la notation déjà introduite

$$w\delta G = \xi\delta\Gamma_1 + \eta\delta\Gamma_2 + \zeta\delta\Gamma_3.$$

Calculons en l'expression

$$\xi\delta\Gamma_1$$

$$\xi\delta\Gamma_1 = \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x}\xi^2 + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y}\xi\eta + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z}\xi\zeta + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x'}\xi\frac{\partial\xi}{\partial u} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y'}\xi\frac{\partial\eta}{\partial u} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z'}\xi\frac{\partial\zeta}{\partial u}$$

$$+ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x''}\xi\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y''}\xi\frac{\partial\eta}{\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z''}\xi\frac{\partial\zeta}{\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x_1'}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y_1'}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z_1'}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2}$$

$$+ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x_{11}''}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y_{11}''}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z_{11}''}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial x_{11}'}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial y_{11}'}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial v} + \frac{\partial\Gamma_1}{\partial z_{11}'}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v}$$

où on a

$$x_1' = \frac{\partial x'}{\partial u}, \qquad x_{11}'' = \frac{\partial x''}{\partial v},$$

$$x_{11}' = x_1'' = \frac{\partial x'}{\partial v} = \frac{\partial x''}{\partial u}$$

etcet.

Le calcul des coefficients de cette expression se fait facilement; seulement il faut observer que

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)\right] = \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\right)$$

etcet.

mais que

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)\right] = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)$$

etcet.

On trouvera ainsi

$$\xi\delta\Gamma_1 = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\right)\right]\xi^2$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}\right)\right]\xi\eta + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}\right)\right]\xi\zeta$$

$$+ \left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}\right)\right]\xi\frac{\partial\xi}{\partial u} + \left[-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\right)\right]\xi\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\right]\xi\frac{\partial\eta}{\partial u}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z'} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\right]\xi\frac{\partial\zeta}{\partial u}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y''} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''}\right)\right]\xi\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z''} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''}\right)\right]\xi\frac{\partial\zeta}{\partial v}$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''}\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial v^2}$$

$$-2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u\partial v} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\xi\frac{\partial^2\zeta}{\partial u\partial v}.$$

Multiplions les deux membres par $dudv$ et intégrons par partie les termes qui contiennent les dérivées du second ordre. On a, parce que ξ, η et ζ s'annulent aux limites

$$-\iint\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u^2}dudv = \iint\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\right)\xi\frac{\partial\xi}{\partial u}\right\}dudv,$$

$$-\iint\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\xi\frac{\partial^2\eta}{\partial u^2}dudv = \iint\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\right)\xi\frac{\partial\eta}{\partial u}\right\}dudv,$$

$$-\iint\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\xi\frac{\partial^2\xi}{\partial u\partial v}dudv = \iint\left\{\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\right)\xi\frac{\partial\xi}{\partial v}\right\}dudv,$$

$$-\iint \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''}\,\xi\,\frac{\partial^2 \xi}{\partial u \partial v}\,du\,dv = \iint \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''}\,\frac{\partial \xi}{\partial v}\,\frac{\partial \xi}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x''}\right)\xi\,\frac{\partial \xi}{\partial u} \right\} du\,dv,$$

$$-\iint \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'} \right\} \xi\,\frac{\partial^2 \eta}{\partial u \partial v}\,du\,dv = \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'}\right)\frac{\partial \xi}{\partial u}\,\frac{\partial \eta}{\partial v} \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'}\right)\xi\,\frac{\partial \eta}{\partial v} \right\} du\,dv$$

etcet.

En traitant de la même manière les deux autres expressions

$$\eta\,\delta\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right\}, \qquad \zeta\,\delta\left\{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\right\}$$

et en les ajoutant à la première, nous aurons enfin

$$\iint w\,\delta G\,du\,dv \tag{7}$$

$$= \iint \left\{ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x}\right)\right]\xi^2 + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial y}\right)\right]\eta^2 \right.$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z}\right)\right]\zeta^2$$

$$+ \left[2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x}\right)\right]\xi\eta$$

$$+ \left[2\,\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x}\right)\right]\xi\zeta$$

$$+ \left[2\,\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y}\right)\right]\eta\zeta$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'}\right)\right]\xi\,\frac{\partial \eta}{\partial u} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'}\right)\right]\eta\,\frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y'}\right)\right]\xi\,\frac{\partial \eta}{\partial v} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x} + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x'}\right)\right]\eta\,\frac{\partial \xi}{\partial v}$$

$$+ \left[\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z'}\right)\right]\xi\,\frac{\partial \zeta}{\partial u} + \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} - \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x'}\right)\right]\zeta\,\frac{\partial \xi}{\partial u}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\right]\xi\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)\right]\zeta\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}\right)\right]\eta\frac{\partial\zeta}{\partial u}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)\right]\zeta\frac{\partial\eta}{\partial u}$$

$$+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}\right)\right]\eta\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y}+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)\right]\zeta\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial u}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z'}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial u}$$

$$+\frac{\partial^2 F}{\partial z'^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial x''^2}\left(\frac{\partial\xi}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y''}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial v}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z''}\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''^2}\left(\frac{\partial\eta}{\partial v}\right)^2$$

$$+2\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z''}\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''^2}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\xi}{\partial v}+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\eta}{\partial u}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}\right)\left(\frac{\partial\xi}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial\xi}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)+2\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial y''}\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}\right)\left(\frac{\partial\eta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}+\frac{\partial\eta}{\partial v}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\right)+2\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial z''}\frac{\partial\zeta}{\partial u}\frac{\partial\zeta}{\partial v}\right\}du\,dv\cdot$$

Transformons cette intégrale: En premier lieu on a, évidemment, les identités suivantes

$$0=\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial u}(\xi\eta)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial v}(\xi\eta)\right\}du\,dv,$$

$$0=\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial u}(\xi\zeta)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)\frac{\partial}{\partial v}(\xi\zeta)\right\}du\,dv,$$

$$0=\frac{1}{2}\iint\left\{\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)\frac{\partial}{\partial u}(\eta\zeta)-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}+\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)\frac{\partial}{\partial v}(\eta\zeta)\right\}du\,dv.$$

En ajoutant ces identités à notre intégrale (7), les termes renfermant les produits des variations avec leurs dérivées prennent une forme plus symmétrique, savoir

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\right]\xi\frac{\partial\eta}{\partial u}$$

$$-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\right]\eta\frac{\partial\xi}{\partial u},$$

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\right]\xi\frac{\partial\eta}{\partial v}$$

$$-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\right]\eta\frac{\partial\xi}{\partial v}$$

etcet.

Il faut, maintenant, calculer les expressions

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right),\qquad \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right),\ \text{etcet.}$$

et, dans ce but, nous partons des quatre équations suivantes, qui se trouvent parmi les équations I (6)

$$\frac{\partial F}{\partial x'}=x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'},$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x''}=x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'},$$

$$-\frac{\partial F}{\partial x'}=x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x''}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x''},$$

$$\frac{\partial F}{\partial x''}=x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x''}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x''}.$$

Multiplions la première par $+z'$, la seconde par $-z''$, la troisième $-z'$, la quatrième par $+z''$ et ajoutons. Nous trouverons donc

$$2\left(z'\frac{\partial F}{\partial x'}+z''\frac{\partial F}{\partial x''}\right)=(y''z'-y'z'')\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}+(y'z''-y''z')\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}$$

ou en introduisant les notations

$$y'z''-y''z'=\alpha,\qquad z'x''-z''x'=\beta,\qquad x'y''-x''y'=\gamma,$$

$$(8)\qquad \frac{1}{2}\alpha\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)=z'\frac{\partial F}{\partial x'}+z''\frac{\partial F}{\partial x''}.$$

En différentiant (8) par rapport à v

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)=z'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)+z''\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)+\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial z'}{\partial v}$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x''}\frac{\partial z''}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right),$$

or les valeurs de x, y et z satisfont à l'équation

$$\frac{\partial F}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)=0,$$

par conséquent

$$z''\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x''}\right)=z''\frac{\partial F}{\partial x}-z''\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right),$$

ainsi

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)=z''\frac{\partial F}{\partial x}+z'\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)-z''\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)+\frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial z'}{\partial v}+\frac{\partial F}{\partial x''}\frac{\partial z''}{\partial v}$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right).$$

Parmi les formules I (6) et I (9) on trouve les suivantes

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x},\\
\frac{\partial F}{\partial x'} &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'},\\
\frac{\partial F}{\partial x''} &= -x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}-y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}-z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'},\\
0 &= x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}+y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}+z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'},\\
0 &= x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}+y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x'}+z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x'}.
\end{aligned}\right.$$

On a ensuite

$$\frac{\partial x''}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y''}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z''}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial v}.$$

En différentiant directement $\frac{\partial F}{\partial x'}$ par rapport à u et v, on a en vertu des relations (9)

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)$$

$$= z''\left[x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right] - z'\left[x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right]$$

$$+ z'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}x'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}z'' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial v}\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial x''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial v}\right] - \frac{\partial z'}{\partial v}\left[x'\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\right]$$

$$- z''\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\frac{\partial z'}{\partial u}\right.$$

$$\left.+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial x''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y''}\frac{\partial y''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z''}\frac{\partial z''}{\partial u}\right] + \frac{\partial z'}{\partial u}\left[x''\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z'}\right]$$

$$+ \frac{\partial z'}{\partial v}\left[x''\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'} + y''\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + z''\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right] - \frac{\partial z''}{\partial v}\left[x'\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'} + y'\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'} + z'\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right]$$

$$- \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)$$

$$= \alpha\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x} - \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right] + \frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\left(z'\frac{\partial x''}{\partial u} + x''\frac{\partial z'}{\partial u} - x'\frac{\partial z''}{\partial u} - z''\frac{\partial x'}{\partial u}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\left(z'\frac{\partial y''}{\partial u} + y''\frac{\partial z'}{\partial u} - y'\frac{\partial z''}{\partial u} - z''\frac{\partial y'}{\partial u}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\left(z'\frac{\partial x''}{\partial v} + x''\frac{\partial z'}{\partial v} - x'\frac{\partial z''}{\partial v} - z''\frac{\partial x'}{\partial v}\right)$$

$$+ \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\left(z'\frac{\partial y''}{\partial v} + y''\frac{\partial z'}{\partial v} - y'\frac{\partial z''}{\partial v} - z''\frac{\partial y'}{\partial v}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial \alpha}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'} - \frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)$$

ou en tenant compte des valeurs de α et β

$$\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)$$
$$=\alpha\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right]+\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}\frac{\partial\beta}{\partial u}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}\frac{\partial\alpha}{\partial u}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x''}\frac{\partial\beta}{\partial v}-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial v},$$

mais suivant I (8)

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'^2}=F_1\alpha^2,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y'}=F_1\alpha\beta,$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x'}=F_3\alpha^2,\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}+\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}=2F_3\alpha\beta$$

et par conséquent

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}+F_1\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial u}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)+F_3\left(\alpha\frac{\partial\beta}{\partial v}-\beta\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right).$$

De la même manière, on trouvera

$$(10)\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right)&=-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right]+F_2\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\alpha\frac{\partial\beta}{\partial v}\right)\\
&\qquad+F_3\left(\beta\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\alpha\frac{\partial\beta}{\partial u}\right),\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)&=\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}+F_1\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial u}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial u}\right)\\
&\qquad+F_3\left(\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial v}\right),\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z'}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x'}\right)&=-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}-\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}\right]+F_2\left(\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial v}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\\
&\qquad+F_3\left(\gamma\frac{\partial\alpha}{\partial u}-\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right),\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)&=\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial z}+F_1\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial u}-\gamma\frac{\partial\beta}{\partial u}\right)\\
&\qquad+F_3\left(\beta\frac{\partial\gamma}{\partial v}-\gamma\frac{\partial\beta}{\partial v}\right),\\
\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z'}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial y'}\right)&=-\left[\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial z}\right]+F_2\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial v}-\beta\frac{\partial\gamma}{\partial v}\right)\\
&\qquad+F_3\left(\gamma\frac{\partial\beta}{\partial u}-\beta\frac{\partial\gamma}{\partial u}\right).
\end{aligned}\right.$$

Nous introduisons maintenant ces valeurs dans les coefficients de notre intégrale (7) en employant les abréviations

$$\alpha' = \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \qquad \alpha'' = \frac{\partial \alpha}{\partial v}, \qquad \beta' = \frac{\partial \beta}{\partial u}, \qquad \beta'' = \frac{\partial \beta}{\partial v} \quad \text{etcet.}$$

$$\xi' = \frac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad \xi'' = \frac{\partial \xi}{\partial v}, \qquad \eta' = \frac{\partial \eta}{\partial u}, \qquad \eta'' = \frac{\partial \eta}{\partial v} \quad \text{etcet.}$$

Les termes contenant les dérivées des variations peuvent être écrits de la manière suivante, si nous nous servons des formules I (8)

$$\begin{aligned} U = & -[F_1(\alpha\beta' - \beta\alpha') + F_3(\alpha\beta'' - \beta\alpha'')]\xi\eta' \\ & + [F_1(\alpha\beta' - \beta\alpha') + F_3(\alpha\beta'' - \beta\alpha'')]\eta\xi' \\ & - [F_2(\alpha\beta'' - \beta\alpha'') + F_3(\alpha\beta' - \beta\alpha')]\xi\eta'' \\ & + [F_2(\alpha\beta'' - \beta\alpha'') + F_3(\alpha\beta' - \beta\alpha')]\eta\xi'' \\ & - [F_1(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + F_3(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')]\xi\zeta' \\ & + [F_1(\alpha\gamma' - \gamma\alpha') + F_3(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'')]\zeta\xi' \\ & - [F_2(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + F_3(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')]\xi\zeta'' \\ & + [F_2(\alpha\gamma'' - \gamma\alpha'') + F_3(\alpha\gamma' - \gamma\alpha')]\zeta\xi'' \\ & - [F_1(\beta\gamma' - \gamma\beta') + F_3(\beta\gamma'' - \gamma\beta'')]\eta\zeta' \\ & + [F_1(\beta\gamma' - \gamma\beta') + F_3(\beta\gamma'' - \gamma\beta'')]\zeta\eta' \\ & - [F_2(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') + F_3(\beta\gamma' - \gamma\beta')]\eta\zeta'' \\ & + [F_2(\beta\gamma'' - \gamma\beta'') + F_3(\beta\gamma' - \gamma\beta')]\zeta\eta'' \\ & + F_1(\alpha^2\xi'^2 + \beta^2\eta'^2 + \gamma^2\zeta'^2 + 2\alpha\beta\xi'\eta' + 2\alpha\gamma\xi'\zeta' + 2\beta\gamma\eta'\zeta') \\ & + F_2(\alpha^2\xi''^2 + \beta^2\eta''^2 + \gamma^2\zeta''^2 + 2\alpha\beta\xi''\eta'' + 2\alpha\gamma\xi''\zeta'' + 2\beta\gamma\eta''\zeta'') \\ & + 2F_3(\alpha^2\xi'\xi'' + \beta^2\eta'\eta'' + \gamma^2\zeta'\zeta'' + \alpha\beta(\xi'\eta'' + \xi''\eta') + \alpha\gamma(\xi'\zeta'' + \xi''\zeta') \\ & \qquad + \beta\gamma(\eta'\zeta'' + \eta''\zeta'). \end{aligned}$$

On voit immédiatement, que les trois derniers termes sont

$$\begin{aligned} & F_1(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')^2 + F_2(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')^2 \\ & + 2F_3(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta''). \end{aligned}$$

Nous allons ensuite former l'expression

$$W = F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v},$$

où w à la même signification qu'auparavant savoir

$$w = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta,$$

alors

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta' + \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta,$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'' + \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta$$

et ensuite

$$\begin{aligned} F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 = {} & F_1(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')^2 + 2F_1(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta) \\ & + F_1(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 = {} & F_2(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')^2 + 2F_2(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta) \\ & + F_2(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} = {} & 2F_3(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'') \\ & + 2F_3(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta) \\ & + 2F_3(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta) \\ & + 2F_3(\alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta)(\alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W = {} & F_1(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')^2 + F_2(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'')^2 \\ & + 2F_3(\alpha\xi' + \beta\eta' + \gamma\zeta')(\alpha\xi'' + \beta\eta'' + \gamma\zeta'') \\ & + \xi\xi'[2F_1\alpha\alpha' + 2F_3\alpha\alpha''] + \eta\eta'[2F_1\beta\beta' + 2F_3\beta\beta''] + \zeta\zeta'[2F_1\gamma\gamma' + 2F_3\gamma\gamma''] \\ & + \xi\xi''[2F_2\alpha\alpha'' + 2F_3\alpha\alpha'] + \eta\eta''[2F_2\beta\beta'' + 2F_3\beta\beta'] + \zeta\zeta''[2F_2\gamma\gamma'' + 2F_3\gamma\gamma'] \\ & + \xi\eta'[2F_1\beta\alpha' + 2F_3\beta\alpha''] + \eta\xi'[2F_1\alpha\beta' + 2F_3\alpha\beta''] \\ & + \xi\eta''[2F_2\beta\alpha'' + 2F_3\beta\alpha'] + \eta\xi''[2F_2\alpha\beta'' + 2F_3\alpha\beta'] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \xi\zeta'[2F_1\gamma\alpha' + 2F_3\gamma\alpha''] + \zeta\xi'[2F_1\alpha\gamma' + 2F_3\alpha\gamma''] \\
&+ \xi\zeta''[2F_2\gamma\alpha'' + 2F_3\gamma\alpha'] + \zeta\xi''[2F_2\alpha\gamma'' + 2F_3\alpha\gamma'] \\
&+ \eta\zeta'[2F_1\gamma\beta' + 2F_3\gamma\beta''] + \zeta\eta'[2F_1\beta\gamma' + 2F_3\beta\gamma''] \\
&+ \eta\zeta''[2F_2\gamma\beta'' + 2F_3\gamma\beta'] + \zeta\eta''[2F_2\beta\gamma'' + 2F_3\beta\gamma'] \\
&+ W_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W_1 = \xi^2[F_1\alpha'^2 + F_2\alpha''^2 + 2F_3\alpha'\alpha''] &+ \eta^2[F_1\beta'^2 + F_2\beta''^2 + 2F_3\beta'\beta''] \\
&+ \zeta^2[F_1\gamma'^2 + F_2\gamma''^2 + 2F_3\gamma'\gamma''] \\
&+ \xi\eta[2F_1\alpha'\beta' + 2F_2\alpha''\beta'' + 2F_3(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta')] \\
&+ \xi\zeta[2F_1\alpha'\gamma' + 2F_2\alpha''\gamma'' + 2F_3(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma')] \\
&+ \eta\zeta[2F_1\beta'\gamma' + 2F_2\beta''\gamma'' + 2F_3(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma')].
\end{aligned}$$

Formons maintenant la différence

$$W - U.$$

On trouve que dans cette différence les coefficients de $\xi\eta'$ et de $\eta\xi'$, de $\xi\zeta'$ et de $\zeta\xi'$ etcet. deviennent égaux et, par conséquent, que la différence peut s'écrire

$$W - U =$$

$$\begin{aligned}
&[F_1\alpha\alpha' + F_3\alpha\alpha'']\frac{\partial}{\partial u}(\xi^2) + [F_1\beta\beta' + F_3\beta\beta'']\frac{\partial}{\partial u}(\eta^2) + [F_1\gamma\gamma' + F_3\gamma\gamma'']\frac{\partial}{\partial u}(\zeta^2) \\
&+ [F_2\alpha\alpha'' + F_3\alpha\alpha']\frac{\partial}{\partial v}(\xi^2) + [F_2\beta\beta'' + F_3\beta\beta']\frac{\partial}{\partial v}(\eta^2) + [F_2\gamma\gamma'' + F_3\gamma\gamma']\frac{\partial}{\partial v}(\zeta^2) \\
&+ \left[F_1\frac{\partial}{\partial u}(\alpha\beta) + F_3\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\beta)\right]\frac{\partial}{\partial u}(\xi\eta) + \left[F_2\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\beta) + F_3\frac{\partial}{\partial u}(\alpha\beta)\right]\frac{\partial}{\partial v}(\xi\eta) \\
&+ \left[F_1\frac{\partial}{\partial u}(\alpha\gamma) + F_3\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial u}(\xi\zeta) + \left[F_2\frac{\partial}{\partial v}(\alpha\gamma) + F_3\frac{\partial}{\partial u}(\alpha\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial v}(\xi\zeta) \\
&+ \left[F_1\frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma) + F_3\frac{\partial}{\partial v}(\beta\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial u}(\eta\zeta) + \left[F_2\frac{\partial}{\partial v}(\beta\gamma) + F_3\frac{\partial}{\partial u}(\beta\gamma)\right]\frac{\partial}{\partial v}(\eta\zeta) \\
&+ W_1.
\end{aligned}$$

En intégrant par partie on aura

$$\iint (W - U)\,du\,dv$$

$$= \iint \Big\{ \xi^2 \Big[F_1 \alpha'^2 + F_2 \alpha''^2 + 2F_3 \alpha'\alpha'' - \frac{\partial}{\partial u}(F_1 \alpha\alpha' + F_3 \alpha\alpha'') - \frac{\partial}{\partial v}(F_2 \alpha\alpha'' + F_3 \alpha\alpha') \Big]$$

$$+ \eta^2 \Big[F_1 \beta'^2 + F_2 \beta''^2 + 2F_3 \beta'\beta'' - \frac{\partial}{\partial u}(F_1 \beta\beta' + F_3 \beta\beta'') - \frac{\partial}{\partial v}(F_2 \beta\beta' + F_3 \beta\beta') \Big]$$

$$+ \zeta^2 \Big[F_1 \gamma'^2 + F_2 \gamma''^2 + 2F_3 \gamma'\gamma'' - \frac{\partial}{\partial u}(F_1 \gamma\gamma' + F_3 \gamma\gamma'') - \frac{\partial}{\partial v}(F_2 \gamma\gamma'' + F_3 \gamma\gamma') \Big]$$

$$+ \xi\eta \Big[2F_1 \alpha'\beta' + 2F_2 \alpha''\beta'' + 2F_3(\alpha'\beta'' + \alpha''\beta') - \frac{\partial}{\partial u}[F_1(\alpha\beta' + \alpha'\beta) + F_3(\alpha\beta'' + \alpha''\beta)]$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}[F_2(\alpha\beta'' + \alpha''\beta) + F_3(\alpha\beta' + \alpha'\beta)] \Big]$$

$$+ \xi\zeta \Big[2F_1 \alpha'\gamma' + 2F_2 \alpha''\gamma'' + 2F_3(\alpha'\gamma'' + \alpha''\gamma') - \frac{\partial}{\partial u}[F_1(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma) + F_3(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma)]$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}[F_2(\alpha\gamma'' + \alpha''\gamma) + F_3(\alpha\gamma' + \alpha'\gamma)] \Big]$$

$$+ \eta\zeta \Big[2F_1 \beta'\gamma' + 2F_2 \beta''\gamma'' + 2F_3(\beta'\gamma'' + \beta''\gamma') - \frac{\partial}{\partial u}[F_1(\beta\gamma' + \beta'\gamma) + F_3(\beta\gamma'' + \beta''\gamma)]$$

$$- \frac{\partial}{\partial v}[F_2(\beta\gamma'' + \beta''\gamma) + F_3(\beta\gamma' + \beta'\gamma)] \Big] \Big\} du\,dv.$$

Nous introduisons maintenant les notations

$$(12) \qquad \begin{cases} A = \dfrac{\partial}{\partial u}(F_1 \alpha' + F_3 \alpha'') + \dfrac{\partial}{\partial v}(F_2 \alpha'' + F_3 \alpha'), \\[2ex] B = \dfrac{\partial}{\partial u}(F_1 \beta' + F_3 \beta'') + \dfrac{\partial}{\partial v}(F_2 \beta'' + F_3 \beta'), \\[2ex] C = \dfrac{\partial}{\partial u}(F_1 \gamma' + F_3 \gamma'') + \dfrac{\partial}{\partial v}(F_2 \gamma'' + F_3 \gamma'). \end{cases}$$

Alors on trouve, après avoir effectué les différentiations

$$\iint (W - U)\,du\,dv$$

$$= -\iint [\xi^2 A\alpha + \eta^2 B\beta + \zeta^2 C\gamma + \xi\eta(A\beta + B\alpha) + \xi\zeta(A\gamma + C\alpha) + \eta\zeta(B\gamma + C\beta)]\,du\,dv$$

et, par conséquent,

$$\iint U du dv = \iint \left\{ F_1 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + \xi^2 A\alpha + \eta^2 B\beta + \zeta^2 C\gamma \right.$$
$$\left. + \xi\eta(A\beta + B\alpha) + \xi\zeta(A\gamma + C\alpha) + \eta\zeta(B\gamma + C\beta) \right\} du dv.$$

Mais

$$\iint U du dv$$

est la partie de l'intégrale (7), qui contient les dérivées des variations. En introduisant les notations suivantes notre intégrale double (7) peut s'écrire

$$(13)\begin{cases} L_{11} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x}\right) + A\alpha, \\ L_{22} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial y}\right) + B\beta, \\ L_{33} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial z}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial z}\right) + C\gamma, \\ L_{12} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial y} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x}\right) + \dfrac{1}{2}(A\beta + B\alpha), \\ L_{13} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x' \partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x}\right) + \dfrac{1}{2}(A\gamma + C\alpha), \\ L_{23} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y' \partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z' \partial y}\right) - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial z} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial y}\right) + \dfrac{1}{2}(B\gamma + C\beta), \end{cases}$$

$$\iint w \delta G du dv$$
$$= \iint \left\{ F_1 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + L_{11}\xi^2 + L_{22}\eta^2 + L_{33}\zeta^2 \right.$$
$$\left. + 2L_{12}\xi\eta + 2L_{13}\xi\zeta + 2L_{23}\eta\zeta \right\} du dv.$$

Cette forme de l'intégrale (7) se simplifie encore. Nous pouvons démontrer que, les coefficients L ont la forme

$$L_{11} = F_4\alpha^2, \qquad L_{22} = F_4\beta^2, \qquad L_{33} = F_4\gamma^2,$$
$$L_{12} = F_4\alpha\beta, \qquad L_{13} = F_4\alpha\gamma, \qquad L_{23} = F_4\beta\gamma,$$

où F_4 est un certain facteur commun.

Pour démontrer cela il suffit évidemment de démontrer que les coefficients L satisfont au système suivant des équations linéaires

$$
(14) \qquad \begin{cases}
x'L_{11} + y'L_{12} + z'L_{13} = 0, \\
x''L_{11} + y''L_{12} + z''L_{13} = 0, \\
x'L_{12} + y'L_{22} + z'L_{23} = 0, \\
x''L_{12} + y''L_{22} + z''L_{23} = 0, \\
x'L_{13} + y'L_{23} + z'L_{33} = 0, \\
x''L_{13} + y''L_{23} + z''L_{33} = 0.
\end{cases}
$$

C'est le même système que nous avons déjà résolu et dont la solution se trouve parmi les formules I (8).

Pour déduire ces équations par exemple la première, partons des deux équations

$$
\frac{\partial F}{\partial x} = x' \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x},
$$

$$
0 = x' \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x} + y' \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x} + z' \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x}
$$

qui se trouvent parmi les formules I (9). Différentions la première par rapport à u, la seconde par rapport à v et ajoutons. On trouve

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} x' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} z' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x'} \frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} \frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z'} \frac{\partial z'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x''} \frac{\partial x''}{\partial u} \\
&+ \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y''} \frac{\partial y''}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z''} \frac{\partial z''}{\partial u} = x' \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x} \right) + y' \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} \right) + z' \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x} \right) \\
&+ \frac{\partial^2 F}{\partial x' \partial x} \frac{\partial x'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial x} \frac{\partial y'}{\partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial z' \partial x} \frac{\partial z'}{\partial u} + x' \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x} \right) + y' \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x} \right) + z' \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x} \right) \\
&+ \frac{\partial^2 F}{\partial x'' \partial x} \frac{\partial x'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'' \partial x} \frac{\partial y'}{\partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial z'' \partial x} \frac{\partial z}{\partial v}.
\end{aligned}
$$

En observant que

$$
\frac{\partial x''}{\partial u} = \frac{\partial x'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y''}{\partial u} = \frac{\partial y'}{\partial v}, \qquad \frac{\partial z''}{\partial u} = \frac{\partial z'}{\partial v},
$$

on aura

$$x'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\right)\right]+y'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right)\right]$$
$$+z'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right)\right]=0.$$

Les coefficients de y' et z' peuvent s'écrire

$$(15)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right)$$
$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right).$$

Parmi les formules (10) nous trouvons les relations suivantes

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}=F_1(\alpha\beta'-\beta\alpha')+F_3(\alpha\beta''-\beta\alpha'')-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right),$$
$$\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}=F_2(\alpha\beta''-\beta\alpha'')+F_3(\alpha\beta'-\beta\alpha')+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y'}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x'}\right).$$

Différentions la première par rapport à u, la seconde par rapport à v et ajoutons

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right)$$
$$=\frac{\partial}{\partial u}[F_1(\alpha\beta'-\beta\alpha')+F_3(\alpha\beta''-\beta\alpha'')]+\frac{\partial}{\partial v}[F_2(\alpha\beta''-\beta\alpha'')+F_3(\alpha\beta'-\beta\alpha')].$$

En effectuant les différentiations on aura

$$\frac{\partial}{\partial u}[F_1(\alpha\beta'-\beta\alpha')+F_3(\alpha\beta''-\beta\alpha'')]=\alpha\frac{\partial}{\partial u}(F_1\beta'+F_3\beta'')-\beta\frac{\partial}{\partial u}(F_1\alpha'+F_3\alpha''),$$

$$\frac{\partial}{\partial v}[F_2(\alpha\beta''-\beta\alpha'')+F_3(\alpha\beta'-\beta\alpha')]=\alpha\frac{\partial}{\partial v}(F_2\beta''+F_3\beta')-\beta\frac{\partial}{\partial v}(F_2\alpha''+F_3\alpha').$$

Ainsi avec les notations (12)

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}-\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}\right)=B\alpha-A\beta.$$

On trouvera de la même manière

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}-\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}\right)=C\alpha-A\gamma.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions (15) notre équation linéaire prend la forme

$$\begin{aligned}(16)\qquad & x'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\right)\right]\\
&+y'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}\right)+\frac{1}{2}(B\alpha-A\beta)\right]\\
&+z'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}\right)+\frac{1}{2}(C\alpha-A\gamma)\right]=0.\end{aligned}$$

Ensuite on a l'identité

$$x'\alpha+y'\beta+z'\gamma=0$$

ou de même

$$Ax'\alpha+Ay'\beta+Az'\gamma=0.$$

En ajoutant cette identité à l'équation (16) on aura

$$\begin{aligned}& x'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial x}\right)+A\alpha\right]\\
&+y'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial y}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial y''\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial y}\right)+\frac{1}{2}(B\alpha+A\beta)\right]\\
&+z'\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial z}-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z'\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x'\partial z}\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z''\partial x}+\frac{\partial^2 F}{\partial x''\partial z}\right)+\frac{1}{2}(C\alpha+A\gamma)\right]=0\end{aligned}$$

ou après les notations (13)

$$x'L_{11}+y'L_{12}+z'L_{13}=0.$$

D'une manière tout à fait analogue, on peut déduire les autres équations (14).

Alors

$$L_{11}\xi^2 + L_{22}\eta^2 + L_{33}\zeta^2 + 2L_{12}\xi\eta + 2L_{13}\xi\zeta + 2L_{23}\eta\zeta$$
$$= F_4(\alpha^2\xi^2 + \beta^2\eta^2 + \gamma^2\zeta^2 + 2\alpha\beta\xi\eta + 2\alpha\gamma\xi\zeta + 2\beta\gamma\eta\zeta) = F_4(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)^2$$
$$= F_4 w^2.$$

En substituant ce résultat dans l'expression de

$$\iint w\,\delta\,G du dv$$

cette intégrale double prend la forme très simple

$$(17) \qquad \iint w\delta G du dv = \iint \left\{ F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2 \right\} du dv.$$

Les coefficients F_1, F_2, F_3, F_4 sont des fonctions connues de x, y, z et de leurs dérivées, mais ils ne dépendent point des variations ξ, η, ζ.

Supposons que nous ayons intégré l'équation

$$G = 0$$

par les fonctions

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

et que la surface représentée par ces équations passe par les limites données. En substituant ces valeurs de x, y, z dans les coefficients F_1, F_2, F_3, F_4 ces derniers deviennent des fonctions de u et v.

Il s'agit de trouver si pour ces valeurs de x, y, z la forme quadratique sous les signes sommes de (17)

$$F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2$$

est une forme définie.

Cette expression peut s'écrire

$$\frac{1}{F_1}\left\{ \left(F_1\frac{\partial w}{\partial u} + F_3\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + (F_1F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + F_1F_4w^2 \right\}.$$

Maintenant nous pouvons suivre la marche indiquée par M. Picard dans son mémoire déjà cité.

On voit immédiatement, que la forme est définie, si

$$(18)\qquad \begin{aligned} F_1F_2 - F_3^2 > 0, \\ F_1F_3 > 0. \end{aligned}$$

La première de ces conditions est nécessaire.

Dans le cas, où la seconde n'est pas remplie, il peut pourtant se présenter que la forme peut être transformée d'une telle façon, qu'elle sera définie.

En effet, on a, quelles que soient les fonctions réelles et continues B et B_1 de u et v,

$$\iint \left\{ \frac{\partial(Bw^2)}{\partial u} + \frac{\partial(B_1w^2)}{\partial v} \right\} du\,dv = 0,$$

l'intégration étant étendue sur tous les points dans l'intérieur du contour donné C. En ajoutant cette identité à l'intégrale (17) nous aurons

$$\iint w\,\delta G\,du\,dv = \iint \left\{ F_1\left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2\left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3\frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial w}{\partial v} + 2Bw\frac{\partial w}{\partial u} + 2B_1w\frac{\partial w}{\partial v} \right.$$
$$\left. + w^2\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) \right\} du\,dv.$$

La forme entre les crochets sera définie si l'on a

$$F_1F_2 - F_3^2 > 0$$

et ensuite s'il est possible de déterminer B et B_1 de façon que

$$(19)\quad F_1\left\{ (F_1F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) - F_1B_1^2 + 2F_3B_1B - F_2B^2 \right\} > 0.$$

M. Picard a montré que cela est toujours possible si le contour est suffisamment petit. Si

$$F_1F_4 > 0,$$

on peut évidemment poser

$$B = B_1 = 0$$

et on retombe ainsi aux conditions (18).

Si ces conditions sont remplies, l'équation

$$\iint w\partial G du dv = 0$$

n'a pas d'autre solution que

$$w = 0$$

ou

$$\xi \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \eta \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + \zeta \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = 0.$$

Cela veut dire, que la projection à la normale de la surface donnée de la distance au point correspondant de la surface variée est nulle, ou que la surface variée coincide avec la surface donnée.

Les conditions (19) remplies, d'après le théorème démontré au commencement de ce chapitre, il est toujours possible de construire une aire autour du contour donné dans l'espace, de façon que dans cette aire il n'existe pas d'autres intégrales de l'équation

$$G = 0,$$

qui passent par le contour donné et dont les variations des dérivées du *premier* ordre des coordonnées des points correspondants sont infiniment petites.

Dans ce sens nous disons qu'il n'existe qu'une seule surface, donnée par l'équation

$$G = 0,$$

qui passe par le contour donné, ou bien que l'intégrale trouvée est unique.

Nous pouvons en tirer une conséquence extrèmement importante. Les quantités

$$F_1, F_2, F_3, F_4$$

sont des fonctions continues de x, y, z et de leurs dérivées. Par conséquent, si les conditions (19) sont remplies pour la surface primitive, elle le sont aussi pour toute autre surface qui diffère très peu de celle-là. Ainsi on peut construire autour de la surface primitive une aire telle que les conditions (19) soient remplies pour chaque surface dans l'intérieur de cette aire qui diffère très peu de la surface primitive. Prenons ensuite dans cette aire un contour fermé complètement arbitraire. Alors nous pouvons énoncer le théorème suivant:

»S'il existe une surface ou une intégrale de l'équation

$$G = 0$$

qui passe par ce contour, et si, en outre, la surface est située tout à fait dans l'aire susdite et diffère très peu de la surface primitive, il n'en existe qu'une seule.»

Nous verrons plus tard l'extrême importance de ce résultat.

Il est facile de voir qu'il est nécessaire pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum que la forme quadratique sous les signes sommes de (17) soit une forme définie. En effet, nous avons pour des variations spéciales.

$$\Delta I = k\delta I + \frac{k^2}{\underline{|2}}\delta^2 I + \frac{k^3}{\underline{|3}}\delta^3 I + \dots,$$

où

$$\delta I = \iint Gw du dv$$

et, par conséquent,

$$\delta^2 I = \iint (w\delta G + G\delta w) du dv = \iint w\delta G du dv$$

en vertu de l'équation

$$G = 0.$$

Ainsi

$$\Delta I = \frac{k^2}{\underline{|2}}\iint w\delta G du dv + \frac{k^3}{\underline{|3}}\delta^3 I + \dots. \tag{20}$$

On pourrait toujours choisir k si petite que le signe de ΔI soit le même que le signe de

$$\iint w\delta G du dv$$

et pour que cette intégrale conserve toujours le même signe, il est absolument indispensable que la forme sous les signes sommes soit définie. Par conséquent, c'est une condition nécessaire si non suffisante pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum.

Il nous reste maintenant à étudier la condition (19)

$$F_1\left\{(F_1F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) - F_1B_1^2 + 2F_3B_1B - F_2B^2\right\} > 0.$$

Posons

$$(21) \qquad (F_1F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) - F_1B_1^2 + 2F_3B_1B - F_2B^2$$
$$= (F_1F_2 - F_3^2)\varepsilon,$$

où ε est un constant, qui a le même signe que F_1. Il s'agit de résoudre cette équation aux dérivées partielles. Dans ce but posons ensuite

$$B = \frac{V}{U}, \qquad B_1 = \frac{V'}{U'}.$$

On aura donc

$$\frac{\partial B}{\partial u} = \frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{V}{U^2}\frac{\partial U}{\partial u}, \qquad \frac{\partial B_1}{\partial v} = \frac{1}{U'}\frac{\partial V'}{\partial v} - \frac{V'}{U'^2}\frac{\partial U'}{\partial v}$$

et l'équation (21) prend la forme

$$(22) \qquad (F_1F_2 - F_3^2)\left\{\frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u} + \frac{1}{U'}\frac{\partial V'}{\partial v} + F_4 - \varepsilon - \frac{V}{U^2}\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{V'}{U'^2}\frac{\partial U'}{\partial v}\right\}$$
$$- F_1\frac{V'^2}{U'^2} + 2F_3\frac{V'}{U'}\frac{V}{U} - F_2\frac{V^2}{U^2} = 0.$$

Puis nous déterminons V et V' de façon que

$$-(F_1F_2 - F_3^2)\frac{1}{U^2}\frac{\partial U}{\partial u} + F_3\frac{V'}{U'}\frac{1}{U} - F_2\frac{V}{U^2} = 0,$$

$$-(F_1F_2 - F_3^2)\frac{1}{U'^2}\frac{\partial U'}{\partial v} + F_3\frac{V}{U}\frac{1}{U'} - F_1\frac{V'}{U'^2} = 0,$$

d'où résulte

$$(23) \qquad \begin{cases} V = -U\left\{\dfrac{F_1}{U}\dfrac{\partial U}{\partial u} + \dfrac{F_3}{U'}\dfrac{\partial U'}{\partial v}\right\}, \\[2ex] V' = -U'\left\{\dfrac{F_2}{U'}\dfrac{\partial U'}{\partial v} + \dfrac{F_3}{U}\dfrac{\partial U}{\partial u}\right\}. \end{cases}$$

Alors l'équation (22) se réduit à

$$\frac{1}{U}\frac{\partial V}{\partial u}+\frac{1}{U'}\frac{\partial V'}{\partial v}+F_4-\varepsilon=0$$

ou

$$(24)\quad -\frac{1}{U}\frac{\partial}{\partial u}\left\{U\left[F_1\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u}+F_3\frac{1}{U'}\frac{\partial U'}{\partial v}\right]\right\}-\frac{1}{U'}\frac{\partial}{\partial v}\left\{U'\left[F_2\frac{1}{U'}\frac{\partial U'}{\partial v}+F_3\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u}\right]\right\}$$
$$+F_1-\varepsilon=0.$$

S'il est possible de trouver deux intégrales U et U' de cette équation, qui ne s'annulent pas dans l'intérieur de la courbe fermée

$$f(u, v)=0,$$

nous avons aussi trouvé deux fonctions B et B_1 qui remplissent les conditions (19).

Il existe sur la surface des courbes, au dehors des quelles cesse nécessairement la propriété maximale ou minimale. Pour les trouver, posons dans l'équation (24)

$$U=U'=U_1,\qquad \varepsilon=0.$$

On aura donc

$$(25)\quad -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial U_1}{\partial u}+F_3\frac{\partial U_1}{\partial v}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial U_1}{\partial v}+F_3\frac{\partial U_1}{\partial u}\right]+F_4U_1=0.$$

Soit $\overline{U}_1$ une intégrale de cette équation, telle que la courbe

$$\overline{U}_1=0$$

soit fermée; alors elle sera une des courbes cherchées. En effet, soit

$$f(u, v)=0$$

un contour situé tout à fait dans l'intérieur de la courbe

$$\overline{U}_1=0$$

on peut toujours trouver des fonctions B et B_1 pour lesquelles les conditions (19) sont remplies. Il suffit de poser dans l'équation (24)

$$U'=U,$$

on a donc

$$(26)\qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial U}{\partial u}+F_3\frac{\partial U}{\partial v}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial U}{\partial v}+F_3\frac{\partial U}{\partial u}\right]+(F_4-\varepsilon)U=0.$$

Pour des valeurs très petites de ε, il existe certainement une intégrale U de cette équation, qui diffère très peu de l'intégrale $\overline{U}_1$ de l'équation (25) et qui, par conséquent, ne s'annulle pas dans l'intérieur de la courbe

$$f(u, v) = 0.$$

On peut donc poser

$$B=\frac{V}{U},\qquad B_1=\frac{V'}{U},$$

où V et V' sont déterminées par (23) en faisant $U' = U$ et la condition (19) sera remplie.

Il ne peut exister une autre intégrale U_1' de l'équation (25), telle que la courbe

$$U_1' = 0$$

soit située tout à fait dans l'intérieur de la courbe

$$\overline{U}_1 = 0.$$

Supposons qu'il en existe une, on a nécessairement

$$\iint\limits_{U'_1} U_1'\left\{-\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial U_1'}{\partial u}+F_3\frac{\partial U_1'}{\partial v}\right]-\frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial U_1'}{\partial v}+F_3\frac{\partial U_1'}{\partial u}\right]+F_4U_1'\right\}du\,dv=0$$

et en intégrant par partie, en observant que U_1' s'annulle aux limites

$$\iint\limits_{U'_1}\left\{F_1\left(\frac{\partial U_1'}{\partial u}\right)^2+F_2\left(\frac{\partial U_1'}{\partial v}\right)^2+2F_3\frac{\partial U_1'}{\partial u}\frac{\partial U_1'}{\partial v}+F_4U_1'^2\right\}du\,dv=0.$$

La courbe

$$U_1' = 0$$

est située dans l'intérieur de la courbe

$$\overline{U}_1 = 0.$$

On peut donc trouver des fonctions B et B_1, telles que la condition (19) sera remplie. Mais alors la forme quadratique sous les signes sommes sera définie, d'où résulte nécessairement

$$U_1' = 0, \qquad \frac{\partial U_1'}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial U_1'}{\partial v} = 0$$

dans l'intérieur du contour considéré. L'intégrale U_1' est identiquement nulle.

De l'autre côté, si la courbe

$$\overline{U}_1 = 0$$

est située tout à fait dans l'intérieur du contour donné

$$f(u, v) = 0,$$

il est facile de voir qu'il ne peut exister ni un maximum ni un minimum pour l'intégrale considérée.

En effet, considérons la formule (20)

$$\Delta I = \frac{k^2}{\underline{|2}} \iint w \delta G du dv + \frac{k^3}{\underline{|3}} \delta^3 I + \dots.$$

On a

$$\iint w \delta G du dv = \iint \left\{ F_1 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2 F_3 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2 \right\} du dv.$$

Comme w s'annulle aux limites, on aura, en intégrant par partie

$$\iint w \delta G du dv$$

$$= \iint \left\{ -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1 \frac{\partial w}{\partial u} + F_3 \frac{\partial w}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F_2 \frac{\partial w}{\partial v} + F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\right] + (F_4 - l) w \right\} w du dv$$

$$+ l \iint w^2 du dv.$$

Posons

$$(27) \qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1 \frac{\partial w}{\partial u} + F_3 \frac{\partial w}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F_2 \frac{\partial w}{\partial v} + F_3 \frac{\partial w}{\partial u}\right] + (F_4 - l) w = 0.$$

Pour des valeurs très petites de l, il existe certainement une intégrale de cette équation qui diffère très peu de l'intégrale $\overline{U}_1$ de l'équation (25). Alors la courbe

$$w = 0$$

est aussi située dans l'intérieur de la courbe

$$f(u, v).$$

Ainsi, en prenant pour w cette intégrale de l'équation (27), et en variant la surface seulement dans l'intérieur de la courbe

$$w = 0,$$

nous aurons

$$\iint w\delta G du dv = l\iint w^2 du dv$$

et

$$\Delta I = \frac{lk^2}{\underline{|2}}\iint w^2 du dv + \frac{k^3}{\underline{|3}}\delta^3 I + \ldots$$

mais, pour des valeurs assez petites de k, le signe du second membre dépend du signe de l, qui est arbitraire.

On peut donc varier la surface de façon que la variation totale ΔI prend des signes différents et, par conséquent, l'intégrale I ne peut pas être ni un maximum ni un minimum.

Ainsi les courbes

$$\overline{U}_1 = 0$$

jouent pour les intégrales doubles le même rôle que les points conjugués de Jacobi et de M. Weierstrass pour les intégrales simples.

Il reste à intégrer l'équation (25).

Nous avons trouvé

$$\iint w\delta G du dv$$

$$= \iint \left\{ -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial w}{\partial u} + F_3\frac{\partial w}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial w}{\partial v} + F_3\frac{\partial w}{\partial u}\right] + F_4 w \right\} w du dv,$$

d'où on peut conclure

$$\delta G = -\frac{\partial}{\partial u}\left[F_1\frac{\partial w}{\partial u} + F_3\frac{\partial w}{\partial v}\right] - \frac{\partial}{\partial v}\left[F_2\frac{\partial w}{\partial v} + F_3\frac{\partial w}{\partial u}\right] + F_4 w.$$

Il est facile de vérifier cela, en faisant les calculs précédents d'une manière un peu différente.

Si l'on a trouvé l'intégrale générale de l'équation

$$G = 0,$$

on peut, par conséquent, intégrer l'équation (25), qui maintenant se réduit à

$$\partial G = 0,$$

en suivant la même marche que JACOBI et M. WEIERSTRASS, quand il s'agit d'intégrer l'équation correspondante dans la théorie des intégrales simples.

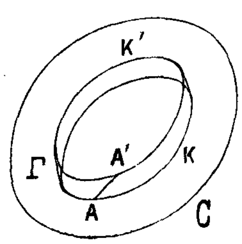
III Partie.

Sur la fonction $\mathcal{E}$.

Nous allons donner encore une condition pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum qui servira aussi à distinguer un maximum d'un minimum. Après cela nous démontrerons que, si toutes ces conditions sont remplies, l'intégrale I (1) étendue sur la surface donnée par l'équation

$$G = 0$$

sera dans le cas d'un maximum, plus grande, ou d'un minimum plus petite, que la même intégrale étendue sur toute autre surface régulière ou irrégulière passant par le même contour et différant très peu de la surface primitive. Nous appelons chaque surface qui est une intégrale de l'équation



$$G = 0$$

une surface G. Sur la surface G, qui passe par le contour donné C, nous traçons un certain contour fermé K et nous supposons que la tangente de ce contour ne change jamais brusquement sa direction. Par ce contour K nous faisons passer une surface régulière quelconque Γ et sur cette surface Γ nous traçons un autre contour K' aussi régulier, très voisin du contour K, et qui ne le coupe pas. Supposons qu'il existe une surface G qui passe par le contour K'. Par conséquent, le contour K' n'est pas tout à fait arbitraire, mais il existe toujours une infinité de contours K' qui ont la propriété demandée. Cette nouvelle surface G nous l'appelons G_1.

Considérons l'intégrale I (1) étendue sur la partie extérieure du contour K de la surface G, sur la partie de la surface Γ, qui est située entre les contours K et K' et sur la surface G_1. Cette intégrale que nous appelons I' peut être considérée comme une variation de l'intégrale I étendue sur toute la surface G.

Il faut alors pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum, que la différence

$$I' - I$$

conserve toujours un signe invariable, quels que soient les contours K et K' et la surface Γ.

Formons maintenant la différence

$$I' - I.$$

On voit, immédiatement, que l'on a

$$I' - I = \iint_{K'} F du dv - \iint_{K} F du dv + \iint_{\Gamma} F du dv$$

et comme K' est très voisin de K, on a selon la formule I (5), en tenant compte de I (15)

$$(1) \qquad I' - I$$

$$= \iint_K G w du dv + \int_K \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z'} \right] dv - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z''} \right] du \right\}$$

$$+ \iint_{\Gamma} F du dv + (\ldots\ldots)_2 + \ldots\ldots$$

Mais, dans la première intégrale double l'intégration est étendue sur une surface G; alors cette intégrale s'annulle et nous aurons

$$(2) \qquad \Gamma' - I = \int_K \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z'}\right] dv - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z''}\right] du \right\}$$
$$+ \iint_\Gamma F du dv + (\ldots\ldots)_2 + \ldots\ldots$$

Nous allons transformer cette expression dans une forme plus simple.

Supposons, que A' (fig. 1) soit le point du contour K', qui correspond au point A du contour K et projetons la distance AA' sur le plan tangent de la surface Γ dans le point A. En appelant l la longeur de la projection et a, b, c, ses cosinus directeurs, on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} \xi = al + (l)_2 + \ldots, \\ \eta = bl + (l)_2 + \ldots, \\ \zeta = cl + (l)_2 + \ldots. \end{cases}$$

La projection de AA' fait avec la tangente de K en A un certain angle ω. Ensuite nous appelons

$$\cos\alpha', \ \cos\beta', \ \cos\gamma'$$

les cosinus directeurs de la tangente de K en A,

$$\cos\alpha, \ \cos\beta, \ \cos\gamma$$

les cosinus directeurs de la normale de la surface G en A,

$$\cos\bar{\alpha}, \ \cos\bar{\beta}, \ \cos\bar{\gamma}$$

les mêmes quantités pour la surface Γ,

$$\cos\bar{\alpha}'', \ \cos\bar{\beta}'', \ \cos\bar{\gamma}''$$

les cosinus directeurs de la normale de K en A, qui est située dans la surface Γ, ds l'élément de l'arc du contour K, et

$$x', y', z', x'', y'', z'',$$
$$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$$

les valeurs de

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$$

pour les deux surfaces G et Γ. On a donc

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
\cos\alpha' = x'\frac{\partial u}{\partial s} + x''\frac{\partial v}{\partial s} = \bar{x}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{x}''\frac{\partial v}{\partial s}, \\
\cos\beta' = y'\frac{\partial u}{\partial s} + y''\frac{\partial v}{\partial s} = \bar{y}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{y}''\frac{\partial v}{\partial s}, \\
\cos\gamma' = z'\frac{\partial u}{\partial s} + z''\frac{\partial v}{\partial s} = \bar{z}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{z}''\frac{\partial v}{\partial s}, \\
\cos\alpha = \frac{\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad \cos\beta = \frac{\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \qquad \cos\gamma = \frac{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}}{\Delta}, \\
\Delta^2 = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}^2. \\
\cos\bar{\alpha} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{y}' & \bar{y}'' \\ \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix}}{\bar{\Delta}}, \qquad \cos\bar{\beta} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{z}' & \bar{z}'' \\ \bar{x}' & \bar{x}'' \end{vmatrix}}{\bar{\Delta}}, \qquad \cos\bar{\gamma} = \frac{\begin{vmatrix} \bar{x}' & \bar{x}'' \\ \bar{y}' & \bar{y}'' \end{vmatrix}}{\bar{\Delta}}, \\
\bar{\Delta}^2 = \begin{vmatrix} \bar{y}' & \bar{y}'' \\ \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \bar{z}' & \bar{z}'' \\ \bar{x}' & \bar{x}'' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \bar{x}' & \bar{x}'' \\ \bar{y}' & \bar{y}'' \end{vmatrix}^2,
\end{array}\right.$$

$$\cos\bar{\alpha}'' = \cos\bar{\beta}\cos\gamma' - \cos\beta'\cos\bar{\gamma}, \qquad \cos\bar{\beta}'' = \cos\bar{\gamma}\cos\alpha' - \cos\gamma'\cos\bar{\alpha},$$

$$\cos\bar{\gamma}'' = \cos\bar{\alpha}\cos\beta' - \cos\alpha'\cos\bar{\beta}.$$

Enfin on a pour les cosinus directeurs de la projection de AA' sur le plan tangente les expressions

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{l}
a = \cos\omega\cos\alpha' + \sin\omega\cos\bar{\alpha}'', \\
b = \cos\omega\cos\beta' + \sin\omega\cos\bar{\beta}'', \\
c = \cos\omega\cos\gamma' + \sin\omega\cos\bar{\gamma}''.
\end{array}\right.$$

L'intégrale double

$$\iint\limits_{\Gamma} F du dv$$

est étendue sur la partie de la surface Γ qui est située entre les deux contours K et K' qui sont très voisins. Alors on peut transformer l'intégrale double en une intégrale simple prise le long du contour K. On a donc

$$du dv = \left(\frac{l \sin \omega}{\overline{\Delta}} + (l)_2 + \ldots\right) ds$$

et par conséquent

$$\iint\limits_{\Gamma} F du dv = \int\limits_{K} \overline{F} \frac{l \sin \omega ds}{\overline{\Delta}} + (l)_2 + \ldots \tag{6}$$

en désignant par $\overline{F}$, ce que devient F en remplaçant $x', y', z', x'', y'', z''$ par $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$. Ensuite nous introduisons les valeurs de ξ, η, ζ tirées de (3) et (5) dans l'intégrale (2). On aura

$$\begin{aligned} I - I = \int\limits_{K} l \Bigg\{ & \cos \omega \left[\left(\cos \alpha' \frac{\partial F}{\partial x'} + \cos \beta' \frac{\partial F}{\partial y'} + \cos \gamma' \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \frac{\partial v}{\partial s} \right. \\ & \left. - \left(\cos \alpha' \frac{\partial F}{\partial x''} + \cos \beta' \frac{\partial F}{\partial y''} + \cos \gamma' \frac{\partial F}{\partial z''} \right) \frac{\partial u}{\partial s} \right] \\ & + \sin \omega \left[\left(\cos \bar{\alpha}'' \frac{\partial F}{\partial x'} + \cos \bar{\beta}'' \frac{\partial F}{\partial y'} + \cos \bar{\gamma}'' \frac{\partial F}{\partial z'} \right) \frac{\partial v}{\partial s} \right. \\ & \left. - \left(\cos \bar{\alpha}'' \frac{\partial F}{\partial x''} + \cos \bar{\beta}'' \frac{\partial F}{\partial y''} + \cos \bar{\gamma}'' \frac{\partial F}{\partial z''} \right) \frac{\partial u}{\partial s} \right] \Bigg\} ds \\ & + \int\limits_{K} \overline{F} \frac{l \sin \omega ds}{\overline{\Delta}} + (l)_2 + \ldots . \end{aligned} \tag{7}$$

Cette expression se simplifie beaucoup. D'abord on peut montrer que le coefficient de $\cos \omega$ dans la première intégrale s'annulle identiquement. En introduisant les valeurs

$$\cos \alpha' = x' \frac{\partial u}{\partial s} + x'' \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad \cos \beta' = y' \frac{\partial u}{\partial s} + y'' \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad \cos \gamma' = z' \frac{\partial u}{\partial s} + z'' \frac{\partial v}{\partial s},$$

on aura

$$(8)\quad \left(\cos\alpha'\frac{\partial F}{\partial x'}+\cos\beta'\frac{\partial F}{\partial y'}+\cos\gamma'\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\frac{\partial v}{\partial s}-\left(\cos\alpha'\frac{\partial F}{\partial x''}+\cos\beta'\frac{\partial F}{\partial y''}+\cos\gamma'\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$=\left(x'\frac{\partial F}{\partial x'}+y'\frac{\partial F}{\partial y'}+z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s}+\left(x''\frac{\partial F}{\partial x'}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}+z''\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2$$

$$-\left(x'\frac{\partial F}{\partial x''}+y'\frac{\partial F}{\partial y''}+z'\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2-\left(x''\frac{\partial F}{\partial x''}+y''\frac{\partial F}{\partial y''}+z''\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial s},$$

mais on a I (4)

$$F = x'\frac{\partial F}{\partial x'}+y'\frac{\partial F}{\partial y'}+z'\frac{\partial F}{\partial z'},$$

$$0 = x''\frac{\partial F}{\partial x'}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}+z''\frac{\partial F}{\partial z'},$$

$$0 = x'\frac{\partial F}{\partial x''}+y'\frac{\partial F}{\partial y''}+z'\frac{\partial F}{\partial z''},$$

$$F = x''\frac{\partial F}{\partial x''}+y''\frac{\partial F}{\partial y''}+z''\frac{\partial F}{\partial z''}.$$

En vertu de ces relations, on voit que l'expression considérée (8) s'annulle.

Alors on peut écrire l'équation (7)

$$(9)\qquad I'-I=\int_K\left\{\left(\cos\bar\alpha''\frac{\partial F}{\partial x'}+\cos\bar\beta''\frac{\partial F}{\partial y'}+\cos\bar\gamma''\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\frac{\partial v}{\partial s}\right.$$

$$\left.-\left(\cos\bar\alpha''\frac{\partial F}{\partial x''}+\cos\bar\beta''\frac{\partial F}{\partial y''}+\cos\bar\gamma''\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\bar F}{\Delta}\right\}l\sin\omega ds+(l)_2+\ldots.$$

Pour la fonction entre les crochets sous le signe somme nous introduisons la notation

$$\mathcal{E}(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \bar x', \bar y', \bar z', \bar x'', \bar y'', \bar z'')$$

ou comme abréviation

$$(10)\qquad \mathcal{E}=\left(\cos\bar\alpha''\frac{\partial F}{\partial x'}+\cos\bar\beta''\frac{\partial F}{\partial y'}+\cos\bar\gamma''\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$-\left(\cos\bar\alpha''\frac{\partial F}{\partial x''}+\cos\bar\beta''\frac{\partial F}{\partial y''}+\cos\bar\gamma''\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\frac{\partial u}{\partial s}+\frac{\bar F}{\Delta}.$$

Nous aurons donc

$$(11) \qquad I' - I = \int_K \mathfrak{G} l \sin \omega ds + (l)_2 + \ldots .$$

Pour que l'intégrale I étendue sur la surface G soit un vrai maximum ou un vrai minimum, il faut, que la différence

$$I' - I$$

conserve toujours un signe invariable, quelle que soit la surface sur laquelle nous avons étendue l'intégrale I', c'est à dire, le signe — pour un maximum et le signe $+$ pour un minimum.

Mais nous pouvons toujours choisir l si petite, que le signe du second membre de (11) ne dépende que du signe de son premier terme. Donc il est nécessaire que l'intégrale

$$(12) \qquad \int_K \mathfrak{G} l \sin \omega ds$$

conserve toujours le même signe pour chaque contour K et pour chaque surface Γ. Mais alors il faut, que la fonction $\mathfrak{G}$ conserve toujours le même signe, car si $\mathfrak{G}$ peut changer son signe le long du contour K, il existe certainement une partie de la surface G, où $\mathfrak{G}$ est positive et une autre, où $\mathfrak{G}$ est négative. Donc, en choisissant le contour K dans l'une ou l'autre de ces parties, nous pouvons donner des signes différents à l'intégrale (12). On peut, évidemment, toujours supposer

$$l \sin \omega ds > 0.$$

Il peut se présenter que la fonction $\mathfrak{G}$ s'annulle, mais alors, il faut qu'elle ne change pas son signe.

Après ces considérations, nous pouvons énoncer le résultat suivant.

»Pour que l'intégrale double

$$\iint_G F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'') du dv$$

étendue sur la surface donnée par l'équation

$$G = 0$$

soit un maximum, il faut que la fonction

$$\mathscr{E}(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'', \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}'')$$

pour chaque point de la surface et pour chaque système de valeurs de

$$\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$$

ne soit jamais positive, et pour que l'intégrale soit un minimum il faut que la même fonction $\mathscr{E}$ ne soit jamais negative.»

Nous allons transformer la fonction $\mathscr{E}$

$$\mathscr{E} = \left(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial F}{\partial x'} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial F}{\partial y'} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial F}{\partial z'}\right)\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$-\left(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial F}{\partial x''} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial F}{\partial y''} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial F}{\partial z''}\right)\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\bar{F}}{\bar{\Delta}}.$$

Dans ce but partons des deux équations I (4)

$$F = x'\frac{\partial F}{\partial x'} + y'\frac{\partial F}{\partial y'} + z'\frac{\partial F}{\partial z'},$$

$$0 = x''\frac{\partial F}{\partial x'} + y''\frac{\partial F}{\partial y'} + z''\frac{\partial F}{\partial z'}.$$

Multiplions la première par x'', la seconde par $-x'$ et ajoutons

$$Fx'' = -(x'y'' - x''y')\frac{\partial F}{\partial y'} + (z'x'' - z''x')\frac{\partial F}{\partial z'}.$$

Ensuite la première par y'' et la seconde par $-y'$

$$Fy'' = -(y'z'' - y''z')\frac{\partial F}{\partial z'} + (x'y'' - x''y')\frac{\partial F}{\partial x'}$$

et enfin, la première par z'' et la seconde par $-z'$

$$Fz'' = -(z'x'' - z''x')\frac{\partial F}{\partial x'} + (y'z'' - y''z')\frac{\partial F}{\partial y'}.$$

On aura ainsi le système

$$(13)\qquad \begin{cases} Fx'' = \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z'} - \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y'}, \\ Fy'' = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x'} - \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z'}, \\ Fz'' = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y'} - \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x'}. \end{cases}$$

En permutant x' avec x'', x'' avec x' etcet. on aura un autre système

$$(14)\qquad \begin{cases} Fx' = - \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z''} + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y''}, \\ Fy' = - \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x''} + \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z''}, \\ Fz' = - \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y''} + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x''}. \end{cases}$$

Multiplions les équations (13) par $\frac{\partial v}{\partial s}$, les équations (14) par $\frac{\partial u}{\partial s}$ et ajoutons les deux premières équations dans les systèmes, ensuite les deux secondes et enfin, les deux troisièmes, nous aurons, en tenant compte des valeurs de $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$,

$$(15)\qquad \begin{cases} F\cos\alpha' = \left[\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z'} - \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y'} \right] \dfrac{\partial v}{\partial s} \\ \qquad\qquad - \left[\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z''} - \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y''} \right] \dfrac{\partial u}{\partial s}, \\ F\cos\beta' = \left[\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x'} - \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z'} \right] \dfrac{\partial v}{\partial s} \\ \qquad\qquad - \left[\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x''} - \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial z''} \right] \dfrac{\partial u}{\partial s}, \\ F\cos\gamma' = \left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y'} - \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x'} \right] \dfrac{\partial v}{\partial s} \\ \qquad\qquad - \left[\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y''} - \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x''} \right] \dfrac{\partial u}{\partial s}. \end{cases}$$

Multiplions la première par $\cos\alpha'$, la seconde par $\cos\beta'$, la troisième par $\cos\gamma'$ et ajoutons les équations nous aurons, en vertu des relations,

$$\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} = \Delta\cos\alpha, \qquad \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} = \Delta\cos\beta, \qquad \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} = \Delta\cos\gamma,$$

$$\cos^2\alpha' + \cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1,$$

$$\begin{aligned} F = \Delta\Big[&(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')\frac{\partial F}{\partial x''} + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')\frac{\partial F}{\partial y''} \\ &+ (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')\frac{\partial F}{\partial z''}\Big]\frac{\partial u}{\partial s} \\ - \Delta\Big[&(\cos\beta\cos\gamma' - \cos\gamma\cos\beta')\frac{\partial F}{\partial x'} + (\cos\gamma\cos\alpha' - \cos\alpha\cos\gamma')\frac{\partial F}{\partial y'} \\ &+ (\cos\alpha\cos\beta' - \cos\beta\cos\alpha')\frac{\partial F}{\partial z'}\Big]\frac{\partial v}{\partial s}. \end{aligned}$$

En changeant $x', y', z', x'', y'', z''$ en $\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}', \bar{x}'', \bar{y}'', \bar{z}''$ nous aurons, enfin, en tenant compte de (4)

$$\begin{aligned} \bar{F} = \Big\{&\left(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}''} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}''} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{z}''}\right)\frac{\partial u}{\partial s} \\ &- \left(\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}'} + \cos\bar{\beta}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}'} + \cos\bar{\gamma}''\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{z}'}\right)\frac{\partial v}{\partial s}\Big\}\bar{\Delta}. \end{aligned}$$

Substituons cette valeur de $\bar{F}$ dans l'expression de $\mathscr{E}$, nous aurons la formule symmétrique

$$(16)\quad \begin{aligned} \mathscr{E} = &\left[\cos\bar{\alpha}''\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}''} - \frac{\partial F}{\partial x''}\right) + \cos\bar{\beta}''\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}''} - \frac{\partial F}{\partial y''}\right) + \cos\bar{\gamma}''\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{z}''} - \frac{\partial F}{\partial z''}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial s} \\ &- \left[\cos\bar{\alpha}''\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{x}'} - \frac{\partial F}{\partial x'}\right) + \cos\bar{\beta}''\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{y}'} - \frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \cos\bar{\gamma}''\left(\frac{\partial\bar{F}}{\partial\bar{z}'} - \frac{\partial F}{\partial z'}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s}. \end{aligned}$$

En employant les notations

$$x'_\mu = x' + \mu(\bar{x}' - x'), \qquad y'_\mu = y' + \mu(\bar{y}' - y'), \qquad z'_\mu = z' + \mu(\bar{z}' - z'),$$
$$x''_\mu = x'' + \mu(\bar{x}'' - x''), \qquad y''_\mu = y'' + \mu(\bar{y}'' - y''), \qquad z''_\mu = z'' + \mu(\bar{z}'' - z'')$$

et en appelant $F_\mu, F_1^{(\mu)}, F_2^{(\mu)}, F_3^{(\mu)}$ ce que deviennent F, F_1, F_2, F_3 si l'on a remplacé $x', y', z', x'', y'', z''$ par $x'_\mu, y'_\mu, z'_\mu, x''_\mu, y''_\mu, z''_\mu$, on aura suivant une formule connue du Calcul Différentiel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar F}{\partial \bar x'} - \frac{\partial F}{\partial x'} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'^2_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\ & + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar F}{\partial \bar y'} - \frac{\partial F}{\partial y'} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'^2_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\ & + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar F}{\partial \bar z'} - \frac{\partial F}{\partial z'} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'^2_\mu}(\bar z' - z') \\ & + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar F}{\partial \bar x''} - \frac{\partial F}{\partial x''} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\ & + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''^2_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar F}{\partial \bar y''} - \frac{\partial F}{\partial y''} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\ & + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''^2_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z''_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar F}{\partial \bar z''} - \frac{\partial F}{\partial z''} = \int_0^1 \Big\{ & \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial x'_\mu}(\bar x' - x') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial y'_\mu}(\bar y' - y') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial z'_\mu}(\bar z' - z') \\ & + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial x''_\mu}(\bar x'' - x'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial y''_\mu}(\bar y'' - y'') + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''^2_\mu}(\bar z'' - z'') \Big\} d\mu.\end{aligned}$$

Introduisons ensuite ces valeurs dans l'expression (16)

$$
\begin{aligned}
(17)\qquad \mathcal{E} = \int_0^1 \Bigg\{ & \Bigg[(\bar{x}'' - x'')\left(\cos\bar{\alpha}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''^2_\mu} + \cos\bar{\beta}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y''_\mu} + \cos\bar{\gamma}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z''_\mu}\right) \\
& + (\bar{y}'' - y'')\left(\cos\bar{\alpha}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y''_\mu} + \cos\bar{\beta}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''^2_\mu} + \cos\bar{\gamma}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''_\mu \partial y''_\mu}\right) \\
& + (\bar{z}'' - z'')\left(\cos\bar{\alpha}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z''_\mu} + \cos\bar{\beta}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z''_\mu} + \cos\bar{\gamma}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z''^2_\mu}\right) \Bigg] \frac{\partial u}{\partial s} \\
& - \Bigg[(\bar{x}' - x')\left(\cos\bar{\alpha}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'^2_\mu} + \cos\bar{\beta}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial x'_\mu} + \cos\bar{\gamma}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial x'_\mu}\right) \\
& + (\bar{y}' - y')\left(\cos\bar{\alpha}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y'_\mu} + \cos\bar{\beta}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'^2_\mu} + \cos\bar{\gamma}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial y'_\mu}\right) \\
& + (\bar{z}' - z')\left(\cos\bar{\alpha}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial z'_\mu} + \cos\bar{\beta}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z'_\mu} + \cos\bar{\gamma}'' \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'^2_\mu}\right) \Bigg] \frac{\partial v}{\partial s} \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial x''_\mu}\left[(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar{x}'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar{\alpha}'' \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial y''_\mu}\left[(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar{y}'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar{\beta}'' \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z'_\mu \partial z''_\mu}\left[(\bar{z}' - z')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar{z}'' - z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar{\gamma}'' \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu}\left[\cos\bar{\beta}''(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\alpha}''(\bar{y}'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right] \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}\left[\cos\bar{\alpha}''(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\beta}''(\bar{x}'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right] \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial z''_\mu}\left[\cos\bar{\gamma}''(\bar{x}' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\alpha}''(\bar{z}'' - z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right] \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z'_\mu}\left[\cos\bar{\alpha}''(\bar{z}' - z')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\gamma}''(\bar{x}'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right] \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z''_\mu}\left[\cos\bar{\gamma}''(\bar{y}' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\beta}''(\bar{z}'' - z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right] \\
& + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z'_\mu}\left[\cos\bar{\beta}''(\bar{z}' - z')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar{\gamma}''(\bar{y}'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right] \Bigg\} d\mu.
\end{aligned}
$$

Pour simplifier cette expression on observe, d'abord, que les coefficients de $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu}$, et $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}$ sont égaux. En effet, en les retranchant l'un de l'autre on aura

$$\cos\bar\beta''(\bar x' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar\alpha''(\bar y'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s} - \cos\bar\alpha''(\bar y' - y')\frac{\partial u}{\partial s} + \cos\bar\beta''(\bar x'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}$$

$$= \cos\bar\beta''\left(\bar x'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar x''\frac{\partial v}{\partial s} - x'\frac{\partial u}{\partial s} - x''\frac{\partial v}{\partial s}\right)$$

$$- \cos\bar\alpha''\left(\bar y'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar y''\frac{\partial v}{\partial s} - y'\frac{\partial u}{\partial s} - y''\frac{\partial v}{\partial s}\right) = 0$$

suivant les relations (4).

Par le même procédé on trouvera que les coefficients de $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial z''_\mu}$ et $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial z'_\mu}$, sont égaux, ainsi que les coefficients de $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z''_\mu}$ et $\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z'_\mu}$. On a donc

$$\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu}\left[\cos\bar\beta''(\bar x' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar\alpha''(\bar y'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]$$

$$+ \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}\left[\cos\bar\alpha''(\bar y' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - \cos\bar\beta''(\bar x'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x'_\mu \partial y''_\mu} + \frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x''_\mu \partial y'_\mu}\right)\left[\cos\bar\beta''\left[(\bar x' - x')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar x'' - x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\right.$$

$$\left. + \cos\bar\alpha''\left[(\bar y' - y')\frac{\partial u}{\partial s} - (\bar y'' - y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\right]$$

et deux expressions analogues pour les autres dérivées.

Ensuite avec les notations

$$\alpha_\mu = \begin{vmatrix} y'_\mu & y''_\mu \\ z'_\mu & z''_\mu \end{vmatrix}, \qquad \beta_\mu = \begin{vmatrix} z'_\mu & z''_\mu \\ x'_\mu & x''_\mu \end{vmatrix}, \qquad \gamma_\mu = \begin{vmatrix} x'_\mu & x''_\mu \\ y'_\mu & y''_\mu \end{vmatrix}$$

on a après I (8)

$$(\bar{x}''-x'')\left[\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''^2}+\cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu''\partial x_\mu''}+\cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu''\partial x_\mu''}\right]$$
$$+(\bar{y}''-y'')\left[\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial y_\mu''}+\cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu''^2}+\cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu''\partial y_\mu''}\right]$$
$$+(\bar{z}''-z'')\left[\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial z_\mu''}+\cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu''\partial z_\mu''}+\cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu''^2}\right]$$
$$=F_2^{(\mu)}[(\bar{x}''-x'')\alpha_\mu+(\bar{y}''-y'')\beta_\mu+(\bar{z}''-z'')\gamma_\mu][\alpha_\mu\cos\bar{\alpha}''+\beta_\mu\cos\bar{\beta}''+\gamma_\mu\cos\bar{\gamma}'']$$

et de la même manière

$$(\bar{x}'-x')\left[\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'^2}+\cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial x_\mu'}+\cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial x_\mu'}\right]$$
$$+(\bar{y}'-y')\left[\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial y_\mu'}+\cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'^2}+\cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial y_\mu'}\right]$$
$$+(\bar{z}'-z')\left[\cos\bar{\alpha}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial z_\mu'}+\cos\bar{\beta}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial z_\mu'}+\cos\bar{\gamma}''\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'^2}\right]$$
$$=F_1^{(\mu)}[(\bar{x}'-x')\alpha_\mu+(\bar{y}'-y')\beta_\mu+(\bar{z}'-z')\gamma_\mu][\alpha_\mu\cos\bar{\alpha}''+\beta_\mu\cos\bar{\beta}''+\gamma_\mu\cos\bar{\gamma}'']$$

et enfin

$$\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial x_\mu''}\left[(\bar{x}'-x')\frac{\partial u}{\partial s}-(\bar{x}''-x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar{\alpha}''$$
$$+\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y_\mu'\partial y_\mu''}\left[(\bar{y}'-y')\frac{\partial u}{\partial s}-(\bar{y}''-y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar{\beta}''$$
$$+\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial z_\mu'\partial z_\mu''}\left[(\bar{z}'-z')\frac{\partial u}{\partial s}-(\bar{z}''-z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\cos\bar{\gamma}''$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial y_\mu''}+\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial y_\mu'}\right)\Bigg[\cos\bar{\beta}''\left[(\bar{x}'-x')\frac{\partial u}{\partial s}-(\bar{x}''-x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]$$
$$+\cos\bar{\alpha}''\left[(\bar{y}'-y')\frac{\partial u}{\partial s}-(\bar{y}''-y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\Bigg]$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu'\partial z_\mu''}+\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial x_\mu''\partial z_\mu'}\right)\Bigg[\cos\bar{\gamma}''\left[(\bar{x}'-x')\frac{\partial u}{\partial s}-(\bar{x}''-x'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]$$
$$+\cos\bar{\alpha}''\left[(\bar{z}'-z')\frac{\partial u}{\partial s}+(\bar{z}''-z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y'_\mu \partial z''_\mu}+\frac{\partial^2 F_\mu}{\partial y''_\mu \partial z'_\mu}\right)\left[\cos\bar{\gamma}''\left[(\bar{y}'-y')\frac{\partial u}{\partial s}-(\bar{y}''-y'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\right.$$

$$\left.+\cos\bar{\beta}''\left[(\bar{z}'-z')\frac{\partial u}{\partial s}+(\bar{z}''-z'')\frac{\partial v}{\partial s}\right]\right]$$

$$=F_3^{(\mu)}\left\{[(\bar{x}'-x')\alpha_\mu+(\bar{y}'-y')\beta_\mu+(\bar{z}'-z')\gamma_\mu]\frac{\partial u}{\partial s}\right.$$

$$\left.-[(\bar{x}''-x'')\alpha_\mu+(\bar{y}''-y'')\beta_\mu+(\bar{z}''-z'')\gamma_\mu]\frac{\partial v}{\partial s}\right\}$$

$$\cdot[\alpha_\mu\cos\bar{\alpha}''+\beta_\mu\cos\bar{\beta}''+\gamma_\mu\cos\bar{\gamma}''].$$

Par conséquent, on aura

$$(18)\quad \mathcal{E}=\int_0^1[\alpha_\mu\cos\bar{\alpha}''+\beta_\mu\cos\bar{\beta}''+\gamma_\mu\cos\bar{\gamma}'']\left\{\left[F_2^{(\mu)}[(\bar{x}''-x'')\alpha_\mu+(\bar{y}''-y'')\beta_\mu+(\bar{z}''-z'')\gamma_\mu]\right.\right.$$

$$\left.-F_3^{(\mu)}[(\bar{x}'-x')\alpha_\mu+(\bar{y}'-y')\beta_\mu+(\bar{z}'-z')\gamma_\mu]\right]\frac{\partial u}{\partial s}$$

$$-\left[F_1^{(\mu)}[(\bar{x}'-x')\alpha_\mu+(\bar{y}'-y')\beta_\mu+(\bar{z}'-z')\gamma_\mu]\right.$$

$$\left.\left.-F_3^{(\mu)}[(\bar{x}''-x'')\alpha_\mu+(\bar{y}''-y'')\beta_\mu+(\bar{z}''-z'')\gamma_\mu]\right]\frac{\partial v}{\partial s}\right\}d\mu.$$

Cette forme peut se simplifier encore. On a

$$\alpha_\mu\cos\bar{\alpha}''+\beta_\mu\cos\bar{\beta}''+\gamma_\mu\cos\bar{\gamma}''$$

$$=\begin{vmatrix}\cos\bar{\alpha}'', & x'+\mu(\bar{x}'-x'), & x''+\mu(\bar{x}''-x'')\\ \cos\bar{\beta}'', & y'+\mu(\bar{y}'-y'), & y''+\mu(\bar{y}''-y'')\\ \cos\bar{\gamma}'', & z'+\mu(\bar{z}'-z'), & z''+\mu(\bar{z}''-z'')\end{vmatrix}=D.$$

En multipliant la second colonne par $\frac{\partial u}{\partial s}$ et en ajoutant la troisième multipliée par $\frac{\partial v}{\partial s}$, on trouve en vertu des relations (4)

$$D=\frac{\partial s}{\partial u}\begin{vmatrix}\cos\bar{\alpha}'', & \cos\alpha', & x''+\mu(\bar{x}''-x'')\\ \cos\bar{\beta}'', & \cos\beta', & y''+\mu(\bar{y}''-y'')\\ \cos\bar{\gamma}'', & \cos\gamma', & z''+\mu(\bar{z}''-z'')\end{vmatrix},$$

mais D s'annulle identiquement pour $\mu = 1$. Donc,

$$D = (1 - \mu)\frac{\partial s}{\partial u}\begin{vmatrix} \cos\bar{\alpha}'', & \cos\alpha', & x'' \\ \cos\bar{\beta}'', & \cos\beta', & y'' \\ \cos\bar{\gamma}'', & \cos\gamma', & z'' \end{vmatrix}$$

$$= -(x''\cos\bar{\alpha} + y''\cos\bar{\beta} + z''\cos\bar{\gamma})(1 - \mu)\frac{\partial s}{\partial u}.$$

Nous introduisons maintenant les notations

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \rho' &= \bar{x}'\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \bar{y}'\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + \bar{z}'\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\ \rho'' &= \bar{x}''\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + \bar{y}''\begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} + \bar{z}''\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}, \\ -\bar{\rho}' &= x'\begin{vmatrix} \bar{y}' & \bar{y}'' \\ \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} + y'\begin{vmatrix} \bar{z}' & \bar{z}'' \\ \bar{x}' & \bar{x}'' \end{vmatrix} + z'\begin{vmatrix} \bar{x}' & \bar{x}'' \\ \bar{y}' & \bar{y}'' \end{vmatrix}, \\ -\bar{\rho}'' &= x''\begin{vmatrix} \bar{y}' & \bar{y}'' \\ \bar{z}' & \bar{z}'' \end{vmatrix} + y''\begin{vmatrix} \bar{z}' & \bar{z}'' \\ \bar{x}' & \bar{x}'' \end{vmatrix} + z''\begin{vmatrix} \bar{x}' & \bar{x}'' \\ \bar{y}' & \bar{y}'' \end{vmatrix}. \end{aligned}\right.$$

Avec ces notations les relations

$$\cos\alpha'\cos\bar{\alpha} + \cos\beta'\cos\bar{\beta} + \cos\gamma'\cos\bar{\gamma} = 0,$$

$$\cos\alpha'\cos\alpha + \cos\beta'\cos\beta + \cos\gamma'\cos\gamma = 0$$

peuvent s'écrire

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} &\bar{\rho}'\frac{\partial u}{\partial s} + \bar{\rho}''\frac{\partial v}{\partial s} = 0, \\ &\rho'\frac{\partial u}{\partial s} + \rho''\frac{\partial v}{\partial s} = 0, \end{aligned}\right.$$

d'où suit

$$(21)\quad \bar{\rho}'\rho'' - \bar{\rho}''\rho' = 0.$$

Nous aurons ainsi

$$D = \frac{\bar{\rho}''}{\Delta}(1 - \mu)\frac{\partial s}{\partial u} = -\frac{\rho}{\Delta}(1 - \mu)\frac{\partial s}{\partial v}$$

et de la même manière

$$(\bar{x}'-x')\alpha_\mu+(\bar{y}'-y')\beta_\mu+(\bar{z}'-z')\gamma_\mu=\rho'+\mu(\bar{\rho}'-\rho'),$$

$$(\bar{x}''-x'')\alpha_\mu+(\bar{y}''-y'')\beta_\mu+(\bar{z}''-z'')\gamma_\mu=\rho''+\mu(\bar{\rho}''-\rho'').$$

Alors, la fonction $\mathcal{E}$ deviendra

$$\mathcal{E}=\frac{1}{\Delta}\int_0^1\Big\{F_1^{(\mu)}\bar{\rho}'[\rho'+\mu(\bar{\rho}'-\rho')]-F_3^{(\mu)}\big[\bar{\rho}'[\rho''+\mu(\bar{\rho}''-\rho'')]+\bar{\rho}''[\rho'+\mu(\bar{\rho}'-\rho')]\big]$$
$$+F_2^{(\mu)}\bar{\rho}''[\rho''+\mu(\bar{\rho}''-\rho'')]\Big\}(1-\mu)d\mu.$$

On a ensuite si $F_1^{(\bar{\mu})}$, $F_3^{(\bar{\mu})}$ et $F_2^{(\bar{\mu})}$ sont des valeurs moyennes

$$\int_0^1 F_1^{(\mu)}\bar{\rho}'[\rho'+\mu(\bar{\rho}'-\rho')](1-\mu)d\mu=\frac{1}{6}F_1^{(\bar{\mu})}(\bar{\rho}'^2+2\bar{\rho}'\rho'),$$

$$\int_0^1 F_2^{(\mu)}\bar{\rho}''[\rho''+\mu(\bar{\rho}''-\rho'')](1-\mu)d\mu=\frac{1}{6}F_2^{(\bar{\mu})}(\bar{\rho}''^2+2\bar{\rho}''\rho''),$$

$$\int_0^1 F_3^{(\mu)}\big[\bar{\rho}'[\rho''+\mu(\bar{\rho}''-\rho'')]+\bar{\rho}''[\rho'+\mu(\bar{\rho}'-\rho')]\big](1-\mu)d\mu$$
$$=\frac{1}{3}F_3^{(\bar{\mu})}(\bar{\rho}'\bar{\rho}''+\bar{\rho}'\rho''+\bar{\rho}''\rho').$$

On trouve aussi

$$(\bar{\rho}'^2+2\bar{\rho}'\rho')(\bar{\rho}''^2+2\bar{\rho}''\rho'')-(\bar{\rho}'\bar{\rho}''+\bar{\rho}'\rho''+\bar{\rho}''\rho')^2=-(\bar{\rho}'\rho''-\bar{\rho}''\rho')^2=0.$$

Ainsi, en posant

$$\frac{1}{\Delta}\bar{\rho}'(\bar{\rho}'+2\rho')=\tau'^2,\qquad \frac{1}{\Delta}\bar{\rho}''(\bar{\rho}''+2\rho'')=\tau''^2,$$

nous aurons

$$\frac{1}{\Delta}(\bar{\rho}'\bar{\rho}''+\bar{\rho}'\rho''+\bar{\rho}''\rho')=\tau'\tau''$$

et, enfin

$$(22)\qquad \mathcal{E}=\frac{1}{6}\{F_1^{(\bar{\mu})}\tau'^2-2F_3^{(\bar{\mu})}\tau'\tau''+F_2^{(\bar{\mu})}\tau''^2\}.$$

Pour que $\mathcal{E}$ conserve toujours un signe invariable, il faut et il suffit que

$$(23)\qquad F_3^{(\bar{\mu})2}-F_1^{(\bar{\mu})}F_2^{(\bar{\mu})}<0.$$

Nous avons ainsi retrouvé une condition analogue à II (18) mais plus générale que celle-ci. On voit maintenant pourquoi la considération de la seconde variation n'est pas suffisante pour distinguer un maximum ou un minimum.

Supposons donc que la condition (23) soit remplie, il reste à étudier le cas, où la fonction $\mathcal{E}$ s'annulle identiquement. Cela se présente seulement, si l'on a le long du contour K toujours

$$\tau' = 0, \qquad \tau'' = 0.$$

Comme les deux facteurs $\bar\rho'$ et $\bar\rho' + 2\rho'$ ainsi que $\bar\rho''$ et $\bar\rho'' + 2\rho''$ sont proportionels, en vertu des relations (20), il suffit à poser

$$-\frac{\bar\rho'}{\Delta\bar\Delta} = \frac{x'}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar y' & \bar y'' \\ \bar z' & \bar z''\end{vmatrix} + \frac{y'}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar z' & \bar z'' \\ \bar x' & \bar x''\end{vmatrix} + \frac{z'}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar x' & \bar x'' \\ \bar y' & \bar y''\end{vmatrix} = 0,$$

$$-\frac{\bar\rho''}{\Delta\bar\Delta} = \frac{x''}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar y' & \bar y'' \\ \bar z' & \bar z''\end{vmatrix} + \frac{y''}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar z' & \bar z'' \\ \bar x' & \bar x''\end{vmatrix} + \frac{z''}{\Delta\bar\Delta}\begin{vmatrix}\bar x' & \bar x'' \\ \bar y' & \bar y''\end{vmatrix} = 0$$

ou

$$\frac{x'}{\Delta}\cos\bar\alpha + \frac{y'}{\Delta}\cos\bar\beta + \frac{z'}{\Delta}\cos\bar\gamma = 0,$$

$$\frac{x''}{\Delta}\cos\bar\alpha + \frac{y''}{\Delta}\cos\bar\beta + \frac{z''}{\Delta}\cos\bar\gamma = 0.$$

On aura donc

$$\cos\bar\alpha = k\cos\alpha, \qquad \cos\bar\beta = k\cos\beta, \qquad \cos\bar\gamma = k\cos\gamma,$$

mais

$$\cos^2\bar\alpha + \cos^2\bar\beta + \cos^2\bar\gamma = 1,$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

et, par conséquent,

$$(24) \qquad \cos\bar\alpha = \cos\alpha, \qquad \cos\bar\beta = \cos\beta, \qquad \cos\bar\gamma = \cos\gamma.$$

Dans ce cas la surface Γ est tangente à la surface G le long du contour K.

Supposons ensuite que les conditions II (19) soient satisfaites et que la fonction $\mathcal{E}$ pour chaque courbe sur la surface G conserve un signe invariable. Alors dans une certaine aire autour de la surface G, il n'existe pour chaque contour arbitraire qu'une seule surface G_1, qui satisfait à l'équation

$$G = 0$$

et qui diffère très peu de la surface primitive G.

Prenons dans cette aire un contour K_1 très voisin du contour K. Faisons passer par le contour K_1 une surface G_1 et formons la fonction $\mathcal{E}$ pour le contour K_1.

La fonction $\mathcal{E}$ a toujours le même signe pour le contour K et s'annulle pour

$$\cos\bar{\alpha} = \cos\alpha, \qquad \cos\bar{\beta} = \cos\beta, \qquad \cos\bar{\gamma} = \cos\gamma,$$

mais sans changer son signe. Alors si le contour K_1 est suffisamment voisin du contour K, $\mathcal{E}$ gardera le même signe pour le contour K_1. Ainsi, en resserrant, s'il le faut, notre aire, elle a les propriétés suivantes.

1) S'il existe dans cette aire une surface satisfaisante à l'équation

$$G = 0$$

et qui passe par un contour donné, il n'en existe qu'une seule, qui diffère très peu de la surface primitive.

2) La fonction $\mathcal{E}$ a toujours le même signe et s'annulle sans le changer.

On peut se demander, si dans l'aire considérée la fonction $\mathcal{E}$ peut s'annuler toujours sur une certaine surface, qui passe par le contour primitif C, et indépendante du contour d'intégration K (fig. 1). On voit que cela n'est possible que pour

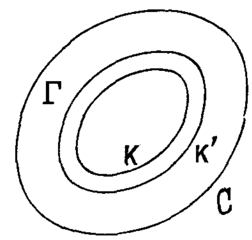
$$\cos\bar{\alpha} = \cos\alpha, \qquad \cos\bar{\beta} = \cos\beta, \qquad \cos\bar{\gamma} = \cos\gamma.$$

Dans ce cas la surface serait toujours tangente aux surfaces G, et, par conséquent, elle serait l'enveloppe de ces surfaces. Mais, on voit immédiatement que cette enveloppe ne peut pas être située dans l'aire considérée, car dans cette aire, il ne peut exister un contour qui est le lieu d'intersection de deux surfaces G infiniment voisines les unes des autres, et de la surface primitive.

Maintenant nous allons démontrer que s'il existe une telle aire A, l'intégrale I (1) étendue sur la surface donnée par l'équation

$$G = 0,$$

dans le cas d'un maximum est plus grande, et dans le cas d'un minimum plus petite que la même intégrale étendue sur toute autre surface régulière ou irrégulière, qui est située dans l'aire A et qui passe par le contour donné C.



Imaginons d'abord une surface régulière Γ passant par le contour C et située dans l'aire A. Sur la surface Γ nous traçons un certain contour K, de façon qu'il existe une surface G dans l'aire A, qui passe par K, et qui diffère très peu de la surface primitive G, et, ensuite, un autre K', qui a les mêmes propriétés et qui est très voisin de K.

Considérons l'intégrale I, étendue d'abord sur la partie de Γ au dehors de K', puis sur la surface G, qui passe par K'. La somme de ces deux intégrales soit:

$$S(\Omega + \partial\Omega)$$

si nous appelons Ω la partie de la surface Γ dans l'intérieur de K et $\partial\Omega$ la partie entre K et K'. De même, l'intégrale I étendue sur la partie au dehors de K et sur la surface G, qui passe par K soit

$$S(\Omega).$$

On aura donc

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = \iint\limits_{K'} F\,du\,dv - \iint\limits_{K} F\,du\,dv - \iint\limits_{K}^{K'} F\,du\,dv.$$

Dans les deux premières intégrales l'intégration est étendue sur des surfaces G, dans la dernière sur la surface Γ entre K et K'.

On voit facilement que le second membre n'est autre chose que

$$-\int\limits_K \mathfrak{E} l \sin\omega ds + (\ldots.)_2 + \cdots$$

ainsi

$$(25)\qquad S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\int\limits_K \mathfrak{E} l \sin\omega ds + (\ldots.)_2$$

et comme $\mathcal{E}$ a toujours le même signe

$$\int_K \mathcal{E} l \sin \omega ds = \mathcal{E}_m \int_K l \sin \omega ds = \mathcal{E}_m \partial \Omega, \tag{26}$$

si $\mathcal{E}_m$ est une valeur moyenne. Par conséquent

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = - \mathcal{E}_m \partial\Omega + (\ldots\ldots)_2 + \cdots$$

et

$$\lim_{l=0} \frac{S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega)}{\partial\Omega} = - \mathcal{E}_m,$$

$$\frac{\partial S(\Omega)}{\partial \Omega} = - \mathcal{E}_m. \tag{27}$$

Supposons donc qu'il s'agisse d'un maximum; alors

$$\mathcal{E}_m < 0$$

et, par conséquent, $S(\Omega)$ croît toujours avec Ω et atteint sa plus grande valeur quand K atteint le contour primitif C. Mais alors

$$S(\Omega) = \iint_G F du dv$$

et d'autre part

$$S_0 = \iint_\Gamma F du dv,$$

où dans les deux intégrales l'intégration est étendue jusqu'au contour C. Par conséquent

$$\iint_G F du dv > \iint_\Gamma F du dv. \tag{28}$$

C. Q. F. D.

Nous avions supposé que la surface Γ fût régulière, mais, il est facile de voir, que l'inégalité (28) subsiste encore, si la surface Γ est composée d'un nombre fini de surfaces régulières.

En effet, pour former la fonction $\mathcal{E}$ nous avons supposé que les deux contours K et K' sont réguliers. Mais, cela n'est pas indispensable, ils peuvent bien être composés d'un nombre fini de parties régulières.

Il suffit de partager l'intégrale dans un certain nombre d'autres et donner à l'angle ω des valeurs différentes dans chaque intégrale. Ainsi pour une telle surface Γ l'équation (25) devient

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\sum_{\mu=1}^{n} \int_{K_\mu} \mathcal{E}^{(\mu)} l_\mu \sin\omega_\mu ds_\mu + (\dots)_2 + \dots.$$

Dans chaque intégrale les fonctions sous le signe somme sont continues.

Alors, si $\mathcal{E}_m^{(\mu)}$ est une valeur moyenne

$$S(\Omega + \partial\Omega) - S(\Omega) = -\sum_{\mu=1}^{n} \mathcal{E}_m^{(\mu)} \int_{K_\mu} l_\mu \sin\omega_\mu ds_\mu + (\dots)_2 + \dots$$

mais

$$\sum_{\mu=1}^{n} \int_{K_\mu} l_\mu \sin\omega_\mu ds_\mu = \partial\Omega,$$

$$\sum_{\mu=1}^{n} \mathcal{E}_m^{(\mu)} \int_{K_\mu} l_\mu \sin\omega_\mu ds_\mu = \overline{\mathcal{E}}_m \partial\Omega$$

il en résulte que

$$\frac{\partial S(\Omega)}{\partial\Omega} = -\overline{\mathcal{E}}_m,$$

d'où suit que l'inégalité (28) subsiste encore

$$\iint_G F du dv > \iint_\Gamma F du dv.$$

Dans le cas d'un minimum on a

$$\mathcal{E} > 0$$

et donc, évidemment

$$\iint_G F du dv < \iint_\Gamma F du dv.$$

Supposons, enfin, que la surface Γ soit tout à fait irrégulière. Alors, en général, l'intégrale

$$\iint_\Gamma F du dv$$

n'a pas de sens. Dans le cas, où l'intégrale conserve un sens nous pouvons toujours construire une surface polyèdre Γ' très voisine de la surface Γ et telle que

$$\iint_{\Gamma} F du dv - \int_{\Gamma'} F du dv < \delta \tag{29}$$

où δ est une quantité arbitraire, dont on peut choisir la valeur absolue si petite que l'on veut. Maintenant nous construisons autour de la surface Γ une aire A', qui est située dans l'intérieur de A, mais, de telle sorte qu'au moins une partie de la surface G soit au dehors de l'aire A'.

Pour chaque surface polyèdre dans l'aire A' nous aurons (28)

$$\iint_{G} F du dv - \iint_{\Gamma'} F du dv > 0$$

s'il s'agit d'un maximum. Cette différence, n'étant jamais zéro, a, certainement, dans A' une limite inférieure. Alors, en choisissant une quantité positive h plus petite que cette limite, nous aurons

$$\iint_{G} F du dv - \iint_{\Gamma'} F du dv > h \tag{30}$$

pour chaque surface Γ' dans l'aire A'. Fixons maintenant

$$|\delta| < h \tag{31}$$

et choisissons Γ' telle que (29) soit remplie.

Alors il s'en suit de (29) et (30)

$$\iint_{G} F du dv > \iint_{\Gamma} F du dv + h - \delta$$

et en vertu de (31)

$$\iint_{G} F du dv > \iint_{\Gamma} F du dv.$$

Dans ce seul cas le raisonnement serait en défaut, si la surface Γ dans chacun de ses points était infiniment voisine de la surface G, car, alors, il serait impossible de construire l'aire A'.

Examinons un peu le principe de cette démonstration pour nous rendre compte du résultat, auquel nous sommes parvenus. Elle repose sur le fait que la fonction

$$S(\Omega)$$

est complètement définie, quand nous avons fixé le contour K. Mais elle l'est seulement, si nous nous bornons à considérer les surfaces G qui passent par K et qui diffèrent très peu de la surface primitive G. Cela veut dire que non seulement les valeurs des coordonnées dans les points correspondants mais aussi les valeurs de leurs *premières* dérivées sont très voisines. Avec cette restriction $S(\Omega)$ est complètement définie et, en faisant croître Ω, nous arrivons toujours à la même limite, à savoir,

$$\iint\limits_G F du dv.$$

Nous faisons, enfin, un résumé des résultats obtenus:

»Pour que l'intégrale double,

$$\iint\limits_C F(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'') du dv,$$

où F remplit les relations I (4), soit un maximum ou un minimum, si l'intégration est étendue sur la surface

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

il faut

1) que x, y, z satisfassent à l'équation I (18)

$$G = 0,$$

2) qu'elles satisfassent aux conditions II (19)

$$F_1 F_2 - F_3^2 > 0,$$

$$F_1 \left\{ (F_1 F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) - F_2 B^2 + 2 F_3 B B_1 - F_1 B_1^2 \right\} > 0,$$

3) qu'elles donnent à la fonction $\mathcal{E}$ définie par III (10) un signe invariable, savoir, le signe — pour un maximum et le signe + pour un minimum.

Si ces conditions sont remplies, en nous bornant à considérer telles variations, où non seulement les variations des coordonnées mais aussi les variations de leurs premières dérivées sont infiniment petites, nous avons démontré que l'intégrale double, étendue sur la surface

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

dans le cas d'un maximum est plus grande et dans le cas d'un minimum plus petite, que la même intégrale étendue sur toute autre surface régulière ou irrégulière, qui passe par le même contour et qui n'est qu'une variation infiniment petite de celle-là.»