ZUR THEORIE DES KRÜMMUNGSMAASSES DER FLÄCHEN

VON

R. VON LILIENTHAL
in MÜNSTER i/W.

Im 14^{ten} Bande der Acta mathematica, S. 95 ff., führt Herr CASORATI ein neues Krümmungsmaass ein, das er dem GAUSS'schen an die Seite stellt. Indem ich die Beantwortung der Frage, welches von beiden vorzugsweise den Namen »Krümmungsmaass» verdiene, dahingestellt sein lasse, glaube ich die Wichtigkeit des CASORATI'schen Satzes darin erkennen zu dürfen, dass er einen, unabhängig von der analytischen Darstellung der Fläche, ausdrückbaren Begriff, somit etwas für die Krümmung der Fläche Characteristisches liefert. In diesem Sinne haben dann auch analoge Begriffe mit derselben Eigenschaft Interesse, die sich in Bezug auf das CASORATI'sche Krümmungsmaass ähnlich bilden lassen, wie ich dies bezüglich des GAUSS'schen in meiner Arbeit *Über eine besondere Art von Strahlensystemen* (Mathematische Annalen, Bd 31, S. 86) gethan habe. Um den folgenden Entwickelungen grössere Einheitlichkeit zu geben, werde ich die gedachten Resultate auf einfachere und directere Weise, wie am angeführten Orte, herleiten und sodann mit denselben Mitteln dem CASORATI'schen Satze analoge Sätze begründen.

Die Coordinaten x, y, z der Punkte einer Fläche, welche weder eine Kugel noch abwickelbar sei, betrachten wir als reguläre Functionen der unabhängigen Variablen p und q. Die Hauptkrümmungsradien seien ρ_1 und ρ_2; die Richtungscosinus der Tangenten der zu ρ_1 resp. ρ_2 gehörenden Krümmungslinien mögen mit A_1, B_1, C_1 resp. A_2, B_2, C_2 bezeichnet werden. Da jede durch den betrachteten Punkt (x, y, z) gehende Flächentangente in derselben Ebene liegt, wie die Tangenten der Krümmungslinien, müssen Darstellungen der Differentiale dx, dy, dz von folgender Form existiren:

$$dx = A_1 K_1 + A_2 K_2,$$
$$dy = B_1 K_1 + B_2 K_2,$$
$$dz = C_1 K_1 + C_2 K_2,$$

wo K_1 und K_2 lineare Formen von dp und dq bedeuten. Um dieselben zu bestimmen führen wir die Winkel σ und φ ein mittelst der Gleichungen:

$$\sqrt{L}\cos\sigma = A_1\frac{\partial X}{\partial p} + B_1\frac{\partial Y}{\partial p} + C_1\frac{\partial Z}{\partial p},$$
$$\sqrt{L}\sin\sigma = A_2\frac{\partial X}{\partial p} + B_2\frac{\partial Y}{\partial p} + C_2\frac{\partial Z}{\partial p},$$
$$\sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi) = A_1\frac{\partial X}{\partial q} + B_1\frac{\partial Y}{\partial q} + C_1\frac{\partial Z}{\partial q},$$
$$\sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi) = A_2\frac{\partial X}{\partial q} + B_2\frac{\partial Y}{\partial q} + C_2\frac{\partial Z}{\partial q}.$$

Hier bedeuten X, Y, Z die Richtungscosinus der Normalen der Fläche und ausserdem ist gesetzt:

$$L = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial p}\right)^2, \qquad N = \sum\left(\frac{\partial X}{\partial q}\right)^2.$$

Nimmt man:

$$H_1 = \sqrt{L}\cos\sigma dp + \sqrt{N}\cos(\sigma - \varphi)dq,$$
$$H_2 = \sqrt{L}\sin\sigma dp + \sqrt{N}\sin(\sigma - \varphi)dq,$$

so entsteht:

$$dX = A_1 H_1 + A_2 H_2,$$
$$dY = B_1 H_1 + B_2 H_2,$$
$$dZ = C_1 H_1 + C_2 H_2.$$

Hieraus ersieht man, dass sowohl $H_2 = 0$ wie $K_2 = 0$ die Gleichung der zu ρ_1, und $H_1 = 0$ wie $K_1 = 0$ die Gleichung der zu ρ_2 gehörenden Krümmungslinien ist. Daher können sich H_1 und K_1, ebenso H_2 und K_2 nur durch von dp und dq unabhängige Factoren unterscheiden. Um dieselben zu finden, bemerken wir, dass der Krümmungsradius eines Normalschnitts der Fläche gegenwärtig durch die Gleichung:

$$\rho = -\frac{K_1^2 + K_2^2}{H_1K_1 + H_2K_2}$$

bestimmt wird, welche für $K_2 = 0$ den Werth ρ_1, für $K_1 = 0$ den Werth ρ_2 von ρ liefern muss. Daher ergiebt sich:

$$K_1 = -\rho_1 H_1, \qquad K_2 = -\rho_2 H_2,$$

und hieraus:

$$\begin{aligned} dx &= -A_1\rho_1 H_1 - A_2\rho_2 H_2, \\ dy &= -B_1\rho_1 H_1 - B_2\rho_2 H_2, \\ dz &= -C_1\rho_1 H_1 - C_2\rho_2 H_2. \end{aligned}$$

Im Folgenden haben wir ähnliche Darstellungen der Differentiale dA_1, dA_2 etc. nöthig. Um diese zu erhalten, projiciren wir die Gerade, deren Richtungscosinus $A_1 + \frac{\partial dA_1}{\partial H_2} H_2$, $B_1 + \frac{\partial dB_1}{\partial H_2} H_2$, $C_1 + \frac{\partial dC_1}{\partial H_2} H_2$ sind, und welche durch den Punkt mit den Coordinaten $x - \rho_2 A_2 H_2$, $y - \rho_2 B_2 H_2$, $z - \rho_2 C_2 H_2$ geht, auf die Tangentialebene. Die Projection schneidet die Gerade (A_1, B_1, C_1) in einem Punkte, dessen Abscisse in Bezug auf den Punkt (x, y, z) R_1 sei. Man hat dann:

$$R_1 = \frac{\rho_2}{\sum A_2 \frac{\partial dA_1}{\partial H_2}},$$

und ähnlich ergiebt sich:

$$R_2 = \frac{\rho_1}{\sum A_1 \frac{\partial dA_2}{\partial H_1}}.$$

R_1 und R_2 sind die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien. Aus den Gleichungen:

$$\sum X \frac{\partial dA_1}{\partial H_1} = -1, \qquad \sum A_1 \frac{\partial dA_1}{\partial H_1} = 0, \qquad \sum A_2 \frac{\partial dA_1}{\partial H_1} = -\frac{\rho_1}{R_2}$$

folgt:

$$\frac{\partial dA_1}{\partial H_1} = -X - \frac{\rho_1}{R_2} A_2,$$

und aus den Gleichungen:

$$\sum X \frac{\partial dA_1}{\partial H_2} = 0, \qquad \sum A_1 \frac{\partial dA_1}{\partial H_2} = 0, \qquad \sum A_2 \frac{\partial dA_1}{\partial H_2} = \frac{\rho_2}{R_1}$$

folgt:

$$\frac{\partial dA_1}{\partial H_2} = A_2 \frac{\rho_2}{R_1}.$$

Man erhält somit:

$$dA_1 = -\left(\frac{\rho_1}{R_2} A_2 + X\right) H_1 + \frac{\rho_2}{R_1} A_2 H_2,$$

$$dB_1 = -\left(\frac{\rho_1}{R_2} B_2 + Y\right) H_1 + \frac{\rho_2}{R_1} B_2 H_2,$$

$$dC_1 = -\left(\frac{\rho_1}{R_2} C_2 + Z\right) H_1 + \frac{\rho_2}{R_1} C_2 H_2,$$

und analog:

$$dA_2 = \frac{\rho_1}{R_2} A_1 H_1 - \left(\frac{\rho_2}{R_1} A_1 + X\right) H_2,$$

$$dB_2 = \frac{\rho_1}{R_2} B_1 H_1 - \left(\frac{\rho_2}{R_1} B_1 + Y\right) H_2,$$

$$dC_2 = \frac{\rho_1}{R_2} C_1 H_1 - \left(\frac{\rho_2}{R_1} C_1 + Z\right) H_2.$$

Demselben Werthsystem p, q entspricht ein Element — O — der Fläche (x, y, z), ein Element — P_0 — der Kugel (X, Y, Z), ein Element — P_1 — der Kugel (A_1, B_1, C_1) und ein Element — P_2 — der Kugel (A_2, B_2, C_2). Die entwickelten Formeln zeigen nun, dass das Verhältniss $\frac{P_0}{O}$ durch den absoluten Werth von $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$, das Verhältniss $\frac{P_0}{O}$ durch den absoluten Werth von $\frac{1}{\rho_1 R_1}$, das Verhältniss $\frac{P_0}{O}$ durch den absoluten Werth von $\frac{1}{\rho_2 R_2}$ dargestellt wird. Sowie nun Gauss den Ausdruck $\frac{1}{\rho_1\rho_2}$ als das Krümmungsmaass der Fläche bezeichnet, kann man die Ausdrücke $\frac{1}{\rho_1 R_1}$ und $\frac{1}{\rho_2 R_2}$

als die Maasse der tangentialen oder geodätischen Hauptkrümmungen der Fläche ansehen. Die Verschiedenheit der Vorzeichen bezieht sich dann auf die Art und Weise, wie die Krümmungslinien einer Schaar längs einer Krümmungslinie der anderen Schaar gelagert sind, und diese Lagerung bestimmt sich durch die Angabe, dass die Tangenten der ersten Schaar sich auf der einen oder anderen Seite der betrachteten Linie der zweiten Schaar treffen, eine Unterscheidung, welche hinfällig wird, wenn die der ersten Schaar entsprechende Krümmungsmittelpunktsfläche abwickelbar ist.

Gehen wir nun zu dem von Herrn CASORATI aufgestellten Krümmungsmaass über. Man denke sich um den betrachteten Flächenpunkt P einen unendlich kleinen Kreis beschrieben, dessen als constant betrachteter Radius das Linearelement ds ist, dessen Flächeninhalt somit durch πds^2 gegeben wird. Jedem Radius dieses Kreises entspricht eine Nachbarnormale, und wenn man den Winkel τ, den eine solche mit der Normalen in P bildet, von P aus auf dem entsprechenden Radius aufträgt, so entsteht eine neue geschlossene Fläche, deren Flächeninhalt:

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \tau^2 d\alpha$$

ist, wo α den Winkel des radius vector mit einer festen, sonst beliebigen Tangentialrichtung bedeutet. Herr CASORATI bezeichnet nun das Verhältniss des letzteren Flächeninhalts zum ersteren als Krümmungsmaass, sodass für dasselbe sich der Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\tau^2}{ds^2} d\alpha$$

ergiebt, oder da: $\tau^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2$:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{H_1^2 + H_2^2}{ds^2} d\alpha.$$

Rechnet man den Winkel α von der Curve $H_2 = 0$ aus, so wird:

$$\cos\alpha = \frac{-\rho_1 H_1}{ds}, \qquad \sin\alpha = \frac{-\rho_2 H_2}{ds},$$

und für jenes Krümmungsmaass, das mit C bezeichnet werde, ergiebt sich:

$$C = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right).$$

Man kann nun, um zu ähnlichen Ausdrücken zu gelangen, an Stelle von τ andere Winkel nehmen, die ebenfalls mit ds unendlich klein von der ersten Ordnung sind.

Zunächst bietet sich der Winkel dar, den die Tangenten zweier benachbarter Krümmungslinien derselben Schaar mit einander bilden.

Setzen wir:

$$C_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2}{ds^2}d\alpha, \qquad C_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dA_2^2 + dB_2^2 + dC_2^2}{ds^2}d\alpha,$$

so liefert eine einfache Rechnung die Werthe:

$$C_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{\rho_1^2}\right), \qquad C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \frac{1}{\rho_2^2}\right).$$

Betrachtet man ferner die Radien des oben erwähnten unendlich kleinen Kreises als die Anfangselemente einer sich von P aus nach allen Seiten über die Fläche hinerstreckenden Curvenschaar, so entsprechen den Endpunkten jedes Radius zwei benachbarte den betreffenden Fortschreitungsrichtungen conjugierte Tangenten, die sich unter dem Winkel ω schneiden mögen. Es frägt sich, welchen Werth alsdann der Ausdruck

$$K = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\omega^2}{ds^2}d\alpha$$

besitzt. Für den Winkel ω erhält man die Gleichung: (S. Mathematische Annalen, Bd. 31, S. 88)

$$\omega = \frac{\rho_1}{R_2}H_1 - \frac{\rho_2}{R_1}H_2 - \frac{H_1 dH_2 - H_2 dH_1}{H_1^2 + H_2^2},$$

woselbst der Ausdruck $H_1 dH_2 - H_2 dH_1$ durch das Gesetz, welches die gewählte Curvenschaar beherrscht, bestimmt wird.

Es seien zunächst die fraglichen Curven solche, deren conjugirte Tangenten mit den Tangenten der Krümmungslinien constante Winkel bilden.

Dann ist:

$$H_1 dH_2 - H_2 dH_1 = 0$$

und, falls hier der Werth von K mit K_1 bezeichnet wird, folgt:

$$K_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Man hat daher den Satz:

$$C + 2K_1 = C_1 + C_2.$$

Zweitens legen wir den in Rede stehenden Curven die Bedingung auf, isogonale Trajectorien der Krümmungslinien zu sein. Dann bilden ihre Tangenten mit denen der Krümmungslinien constante Winkel und dies liefert die Differentialgleichung:

$$H_1 dH_2 - H_2 dH_1 = \frac{H_1 H_2(\rho_2 d\rho_1 - \rho_1 d\rho_2)}{\rho_1 \rho_2}.$$

Es werde nun:

$$d\rho_1 = \rho_{11} H_1 + \rho_{12} H_2,$$
$$d\rho_2 = \rho_{12} H_1 + \rho_{22} H_2$$

gesetzt. Aus den Integrabilitätsbedingungen der Differentiale dx, dy, dz folgt dann:

$$\rho_{12} = -\frac{(\rho_1 - \rho_2)\rho_1}{R_2},$$

$$\rho_{21} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)\rho_2}{R_1}.$$

Dadurch nimmt die Gleichung für ω die Form an:

$$\omega = \frac{1}{H_1^2 + H_2^2}\left\{\frac{\rho_1}{R_2} H_1^3 + \left(\frac{\rho_1 - 2\rho_2}{R_1} - \frac{\rho_{11}}{\rho_1}\right) H_1^2 H_2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{2\rho_1 - \rho_2}{R_2} + \frac{\rho_{22}}{\rho_2}\right) H_1 H_2^2 - \frac{\rho_2}{R_1} H_2^3\right\}.$$

Bei der Berechnung von K treten 7 bestimmte Integrale auf, von denen 3 Null sind. Bei den übrigen 4 Integralen macht sich der Umstand bemerkbar, dass sie verschiedene Ausdrücke erhalten, je nachdem die Fläche im GAUSS'schen Sinne positiv oder negativ gekrümmt ist.

Man erhält bei positivem Werth des Produkts $\rho_1\rho_2$ die Gleichungen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1^6}{(H_1^2 + H_2^2)^2 ds^2} d\alpha = \frac{\rho_2 \pi(\rho_1^2 + 3\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)}{\rho_1^2(\rho_1 + \rho_2)^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1^4 H_2^2}{(H_1^2 + H_2^2)^2 ds^2} d\alpha = \frac{\rho_2 \pi}{(\rho_1 + \rho_2)^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1^2 H_2^4}{(H_1^2 + H_2^2)^2 ds^2} d\alpha = \frac{\rho_1 \pi}{(\rho_1 + \rho_2)^3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{H_1^6}{(H_1^2 + H_2^2)^2 ds^2} d\alpha = \frac{\rho_1 \pi(\rho_1^2 + 3\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)}{\rho_2^2(\rho_1 + \rho_2)^3},$$

und aus diesen ergeben sich die bei negativem $\rho_1\rho_2$ statthabenden Gleichungen durch Ersetzten von ρ_1 durch $-\rho_1$.

Bezeichnen wir nun den Werth von K mit K_2 oder K_2', je nachdem $\rho_1\rho_2$ positiv oder negativ ist, so erhalten wir:

$$K_2 = \frac{1}{2(\rho_1 + \rho_2)^3}\left\{\frac{\rho_2(\rho_1 + \rho_2)^2 + 4\rho_1^3}{R_2^2} + \frac{\rho_1(\rho_1 + \rho_2)^2 + 4\rho_2^3}{R_1^2}\right.$$

$$\left. + \frac{4\rho_1^2\rho_{22}}{R_2\rho_2} + \frac{4\rho_2^2\rho_{11}}{R_1\rho_1} + \frac{\rho_{11}^2\rho_2}{\rho_1^2} + \frac{\rho_{22}^2\rho_1}{\rho_2^2}\right\},$$

$$2K_2' = \frac{1}{\rho_2 - \rho_1}\left(\frac{4\rho_2 - \rho_1}{R_1^2} + \frac{\rho_2 - 4\rho_1}{R_2^2}\right) + \frac{4}{(\rho_2 - \rho_1)^2}\left(\frac{\rho_2\rho_{11}}{R_1\rho_1} + \frac{\rho_1\rho_{22}}{R_2\rho_2}\right)$$

$$+ \frac{1}{(\rho_2 - \rho_1)^3}\left(\frac{\rho_2\rho_{11}^2}{\rho_1^2} - \frac{\rho_1\rho_{22}^2}{\rho_2^2}\right).$$

Endlich mögen die betrachteten Curven die Eigenschaft haben, geodätische Linien zu sein. Die Gleichung der letzteren ist: (Mathematische Annalen, Bd. 31, S. 92)

$$H_1 H_2(\rho_2 d\rho_1 - \rho_1 d\rho_2) + \rho_1\rho_2(H_2 dH_1 - H_1 dH_2) + ds^2\left(\frac{\rho_1}{R_2} H_1 - \frac{\rho_2}{R_1} H_2\right) = 0,$$

und dies liefert für ω die Gleichung:

$$\omega = \frac{\rho_1\rho_{12} H_1^3 - (\rho_2\rho_{11} - 2\rho_1\rho_{21}) H_1^2 H_2 - (2\rho_2\rho_{12} - \rho_1\rho_{22}) H_1 H_2^2 - \rho_2\rho_{21} H_2^3}{\rho_1\rho_2(H_1^2 + H_2^2)}.$$

Nennen wir den hier auftretenden Werth von K, je nachdem $\rho_1\rho_2$ positiv oder negativ ist, K_3 oder K_3', so folgt:

$$K_3 = \frac{1}{2\rho_1^2\rho_2^2(\rho_1 + \rho_2)^3}\{(\rho_{12}^2\rho_2 + \rho_{21}^2\rho_1)(\rho_1^2 + 3\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)$$
$$+ \rho_{11}^2\rho_2^3 - 2\rho_{11}\rho_{21}\rho_1\rho_2^2 - 2\rho_{12}\rho_{22}\rho_2\rho_1^2 + \rho_{22}^2\rho_1^3\},$$

$$K_3' = \frac{1}{2\rho_1^2\rho_2^2(\rho_2 - \rho_1)^3}\{(\rho_{12}^2\rho_2 - \rho_{21}^2\rho_1)(\rho_1^2 - 11\rho_1\rho_2 + \rho_2^2)$$
$$+ \rho_{11}^2\rho_2^3 - 6\rho_{11}\rho_{21}\rho_1\rho_2^2 + 6\rho_{12}\rho_{22}\rho_1^2\rho_2 - \rho_{22}^2\rho_1^3\}.$$

Wenn von den beiden Hauptkrümmungsradien der eine eine Function des anderen ist, was durch die Gleichung:

$$\rho_2 = f(\rho_1)$$

bezeichnet werden möge, so finden die Beziehungen statt:

$$\rho_{11} = \frac{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)}{R_1 f'(\rho_1)},$$

$$\rho_{22} = -\frac{\rho_1(\rho_1 - \rho_2) f'(\rho_1)}{R_2}$$

Dies liefert:

$$K_2 = \frac{1}{2(\rho_1 + \rho_2)^3}\left\{\frac{1}{R_2^2}\left[\rho_2(\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_1^3\left(2 - \frac{(\rho_1 - \rho_2)f'(\rho_1)}{\rho_2}\right)^2\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{R_1^2}\left[\rho_1(\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_2^3\left(2 + \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 f'(\rho_1)}\right)^2\right]\right\},$$

$$K_2' = \frac{1}{2(\rho_2 - \rho_1)}\left\{\frac{1}{R_1^2}\left[\rho_2\left(2 - \frac{\rho_2}{\rho_1 f'(\rho_1)}\right)^2 - \rho_1\right] - \frac{1}{R_2^2}\left[\rho_1\left(2 - \frac{\rho_1 f'(\rho_1)}{\rho_2}\right)^2 - \rho_2\right]\right\},$$

$$K_3 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{2(\rho_1 + \rho_2)^3}\left\{\frac{1}{R_2^2\rho_2^2}\left[\rho_2(\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_1[\rho_2 - \rho_1 f'(\rho_1)]^2\right]\right.$$
$$\left. + \frac{1}{R_1^2\rho_1^2}\left[\rho_1(\rho_1 + \rho_2)^2 + \rho_2\left(\rho_1 - \frac{\rho_2}{f'(\rho_1)}\right)^2\right]\right\},$$

$$K_3' = \frac{1}{2(\rho_2 - \rho_1)}\left\{\frac{1}{R_2^2\rho_2^2}\{\rho_2(\rho_1 - \rho_2)^2 - \rho_1[3\rho_2 - \rho_1 f'(\rho_1)]^2\}\right.$$
$$\left. - \frac{1}{R_1^2\rho_1^2}\left[\rho_1(\rho_1 - \rho_2)^2 - \rho_2\left(3\rho_1 - \frac{\rho_2}{f'(\rho_1)}\right)^2\right]\right\}.$$

Speciell für Minimalflächen ergiebt sich:

$$K_2' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right), \qquad K_3' = 2\left(\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}\right).$$

Santiago de Chile, September 1890.