

## ÜBER LINEARE RELATIONEN ZWISCHEN THETAPRODUCTEN

VON

A. KRAZER

in STRASSBURG i. E.

In meiner Habilitationsschrift<sup>1</sup> habe ich diejenigen Thetafunctionen einer Veränderlichen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, einer systematischen Behandlung in der Hinsicht unterzogen, dass ich die zwischen diesen Functionen bestehenden wesentlichen Beziehungen erforschte. Meine Untersuchungen haben später in der sorgfältig ausgeführten Dissertation des Herrn SCHLEICHER<sup>2</sup> eine Fortsetzung gefunden, indem derselbe ihnen das Additionstheorem und das Umkehrproblem der aus diesen Functionen gebildeten Quotienten hinzufügte.

Dass sich die nämlichen Untersuchungen für jene Thetafunctionen einer Veränderlichen, bei denen der gemeinsame Nenner  $r$  der Charakteristikenelemente 5 oder überhaupt eine ungerade Zahl ist, anstellen lassen, ohne wesentlich neue Hülfsmittel zu erfordern, war zu sehen; diese Untersuchungen hat Herr SIEVERT<sup>3</sup> mit Erfolg begonnen.

Nun lag aber andererseits auch der Gedanke nahe, die in meiner Habilitationsschrift angestellten Untersuchungen auf Thetafunctionen mehrerer

---

<sup>1</sup> *Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind*, Mathem. Annalen, Bd. 22, pag. 416.

<sup>2</sup> *Darstellung und Umkehrung von Thetaquotienten, deren Charakteristiken aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind*. Inaug. Dissertation, Würzburg 1888.

<sup>3</sup> *Über Thetafunctionen, deren Charakteristiken aus Fünfteln ganzer Zahlen bestehen*. Schulprogramm des neuen Gymnasiums in Nürnberg 1890/91.

Veränderlichen auszudehnen, umsomehr als die zur Grundlage dienende Thetaformel sich ohne weiteres für beliebiges  $p$  aufstellen liess. Dahin gehende Untersuchungen hat Herr v. BRAUNMÜHL<sup>1</sup> angestellt. Derselbe ging aber noch weiter, indem er auch die schönen Untersuchungen, welche Herr FROBENIUS<sup>2</sup> über die zum Werthe  $r = 2$  gehörigen Thetafunctionen mehrerer Veränderlichen mitgetheilt hatte, auf den Fall  $r = 3$  übertrug. In einer späteren Abhandlung<sup>3</sup> hat Herr v. BRAUNMÜHL seine Untersuchungen auf den Fall eines beliebigen  $r$  zu übertragen versucht.

Bei dem auf die Charakteristiken bezüglichen Theil solcher Untersuchungen erkennt man aber bei einiger Sorgfalt, dass eine Übertragung der im Falle  $r = 2$  erhaltenen Resultate nur auf den Fall, wo  $r$  eine Primzahl ist, im ganzen Umfange geschehen kann, dass dagegen in dem Falle, wo  $r$  keine Primzahl ist, diese Resultate zum grössten Theile ihre Gültigkeit verlieren. Was ferner den auf die Thetafunctionen selbst bezüglichen Theil der erwähnten Untersuchungen betrifft, so wird man sich dabei in allen Fällen mit Vortheil als Ausgangspunkt jener Thetaformel bedienen, welche zu diesem Zwecke von Herrn PRYM und dem Verfasser<sup>4</sup> mitgetheilt wurde. Bei specielleren Untersuchungen erfordern aber der Fall, wo  $r$  gerade ist, und der, wo  $r$  ungerade ist, eine verschiedene Behandlung.

Die nachfolgenden Zeilen sollen einen kleinen Beitrag zur Theorie der zu einem beliebigen Werthe von  $r$  gehörigen Thetafunctionen mehrerer

<sup>1</sup> *Untersuchungen über  $p$ -reihige Charakteristiken, die aus Dritteln ganzer Zahlen gebildet sind, und die Additionstheoreme der zugehörigen Thetafunctionen*, Abhandl. der K. bayer. Akademie der Wiss. II. Classe, 16. Band, 2. Abth., pag. 327.

<sup>2</sup> *Über das Additionstheorem der Thetafunctionen mehrerer Variablen*, Crelles Journal, Bd. 89, pag. 185, und: *Über Gruppen von Thetacharakteristiken*, Crelles Journal, Bd. 96, pag. 81.

<sup>3</sup> *Über Gruppen von  $p$ -reihigen Charakteristiken, die aus  $n^{\text{teln}}$  ganzer Zahlen gebildet sind und die Relationen zugehöriger Thetafunctionen  $n^{\text{ter}}$  Ordnung*, Mathem. Annalen, Bd. 37, pag. 61.

<sup>4</sup> *Über die Verallgemeinerung der Riemann'schen Thetaformel*, Acta mathematica, Bd. 3, pag. 240. Es muss hier bemerkt werden, dass die Formel (25) des Herrn von Braunmühl (Math. Ann., Bd. 37, pag. 94) durch Addition jener  $n^{\lambda}$  Formeln ( $\theta_{\nu}^{\lambda}$ ) entsteht, bei denen an Stelle von  $[\eta]$  die  $n^{\lambda}$  Charakteristiken  $(\rho\nu_{\beta})$ ,  $\beta = 0, 1, \dots, n^{\lambda} - 1$ , gesetzt sind.

Veränderlichen liefern. Bei anderen Untersuchungen im Gebiete der Thetafunctionen wurde der Verfasser nämlich auf die Frage hingewiesen, unter welchen Umständen  $r^p$  Thetaproducte  $r^{\text{ten}}$  Grades  $\theta[\gamma + \alpha^{(x)}](v)$ ,  $x = 0, 1, \dots, r^p - 1$ , bei denen die Charakteristiken  $[\alpha^{(x)}]$  eine Gruppe bilden (in dem Sinne, dass die Summe irgend zweier von ihnen wieder unter ihnen enthalten ist) linearabhängig sind. Es sollen im Folgenden die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen hiefür aufgesucht werden.

### 1.

Die Riemann'sche  $p$ -fach unendliche Thetareihe:

$$\vartheta(v_1 | \dots | v_p) = \sum_{m_1, \dots, m_p}^{-\infty, \dots, +\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} m_{\mu} m_{\mu'} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} m_{\mu} v_{\mu}},$$

bei der die Parameter  $a_{\mu\mu'} = a_{\mu'\mu}$  ( $\mu, \mu' = 1, 2, \dots, p$ ) der für die absolute Convergenz der Reihe nothwendigen und hinreichenden Bedingung, dass für reelle  $x$  der reelle Theil von  $\sum_{\mu} \sum_{\mu'} a_{\mu\mu'} x_{\mu} x_{\mu'}$  eine negative Form sei, unterworfen sein sollen, stellt eine einwerthige und für endliche  $v$  stetige Function der complexen Veränderlichen  $v_1, \dots, v_p$  dar, die den Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1_0) \quad \vartheta(v_1 | \dots | v_{\nu} + \pi i | \dots | v_p) &= \vartheta(v_1 | \dots | v_{\nu} | \dots | v_p), \\ (2_0) \quad \vartheta(v_1 + a_{1\nu} | \dots | v_p + a_{p\nu}) &= \vartheta(v_1 | \dots | v_p) e^{-2v_{\nu} - a_{\nu\nu}} \end{aligned} \quad (\nu=1, 2, \dots, p)$$

genügt. Erfüllt umgekehrt eine einwerthige und für endliche  $v$  stetige Function der complexen Veränderlichen  $v_1, \dots, v_p$  die Gleichungen (1), (2), so kann sie sich von der Function  $\vartheta(v_1 | \dots | v_p)$  nur um einen von den  $v$  freien Factor unterscheiden.

Die obige Function ist ein besonderer Fall der allgemeineren:

$$\begin{aligned} & \vartheta \left[ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{matrix} \right] (v_1 | \dots | v_p) \\ &= \sum_{m_1, \dots, m_p}^{-\infty, \dots, +\infty} e^{\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \left( m_\mu + \frac{\alpha_\mu}{r} \right) \left( m_{\mu'} + \frac{\alpha_{\mu'}}{r} \right) + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \left( m_\mu + \frac{\alpha_\mu}{r} \right) \left( v_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{r} \pi i \right)}, \end{aligned}$$

bei der  $r$  eine positive ganze Zahl, die  $\alpha, \alpha'$  ganze Zahlen bezeichnen. Die so definirte Function ist mit der ursprünglichen Function  $\vartheta(v_1 | \dots | v_p)$  verknüpft durch die Gleichung:

$$\begin{aligned} & \vartheta \left[ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{matrix} \right] (v_1 | \dots | v_p) \\ &= \vartheta \left( v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\alpha_\mu}{r} a_{1\mu} + \frac{\alpha'_1}{r} \pi i | \dots | v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\alpha_\mu}{r} a_{p\mu} + \frac{\alpha'_p}{r} \pi i \right) \\ & \quad \times e^{\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \frac{\alpha_\mu \alpha_{\mu'}}{r^2} + 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\alpha_\mu}{r} \left( v_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{r} \pi i \right)} \end{aligned}$$

und geht, wenn die sämtlichen Grössen  $\alpha, \alpha'$  den Werth Null annehmen, in dieselbe über, d. h. es ist:

$$\vartheta \left[ \begin{matrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{matrix} \right] (v_1 | \dots | v_p) = \vartheta(v_1 | \dots | v_p).$$

Ähnlich wie die ursprüngliche genügt die allgemeinere Function den Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \vartheta \left[ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{matrix} \right] (v_1 | \dots | v_\nu + \pi i | \dots | v_p) \\ &= \vartheta \left[ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{matrix} \right] (v_1 | \dots | v_\nu | \dots | v_p) e^{\frac{2\alpha_\nu \pi i}{r}}, \\ & \quad (\nu=1, 2, \dots, p) \\ (2) \quad & \vartheta \left[ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{matrix} \right] (v_1 + a_{1\nu} | \dots | v_p + a_{p\nu}) \\ &= \vartheta \left[ \begin{matrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{matrix} \right] (v_1 | \dots | v_p) e^{-2v_\nu - a_{p\nu} - \frac{2\alpha'_\nu \pi i}{r}}, \end{aligned}$$

welche sie zugleich bis auf einen von den Variablen  $v_1, \dots, v_p$  freien Factor bestimmen.

Der Zahlencomplex  $\begin{bmatrix} a_1 \dots a_p \\ a'_1 \dots a'_p \end{bmatrix}$  soll, wenn dadurch kein Missverständnis zu befürchten ist, abgekürzt mit  $\begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix}$  bezeichnet werden; ebenso möge es erlaubt sein, wenn die Ausdrücke für die Argumente einer Thetafunction sich nur durch untere Indices unterscheiden, hinter dem Funktionszeichen nur den allgemeinen Ausdruck für die Argumente mit Weglassung des Index in doppelte Klammern eingeschlossen zu schreiben, also  $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix} \langle (v) \rangle$  statt  $\vartheta \begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix} (v_1 | \dots | v_p)$ ; im Anschlusse daran möge dann das Grössensystem  $v_1 | \dots | v_p$  einfacher durch  $(v)$  bezeichnet werden. Bezeichnet man dann endlich noch das System:

$$v_1 + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\beta_\mu}{r} a_{1\mu} + \frac{\beta'_1}{r} \pi i | \dots | v_p + \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\beta_\mu}{r} a_{p\mu} + \frac{\beta'_p}{r} \pi i,$$

wobei unter den  $\beta, \beta'$  ganze Zahlen zu verstehen sind, symbolisch mit  $\left( v + \begin{vmatrix} \beta \\ \beta' \end{vmatrix} \right)$ , so bestehen für irgend welche ganze Zahlen  $\beta, \beta', \gamma, \gamma'$  die beiden im Folgenden zur Anwendung kommenden Hilfsformeln:

$$(A) \quad \vartheta \begin{bmatrix} a \\ a' \end{bmatrix} \left( \left( v + \begin{vmatrix} \beta \\ \beta' \end{vmatrix} \right) \right) = \vartheta \begin{bmatrix} a + \beta \\ a' + \beta' \end{bmatrix} \langle (v) \rangle e^{-\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \frac{\beta_\mu \beta_{\mu'}}{r^2} - 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \frac{\beta_\mu}{r} \left( v_\mu + \frac{a'_{\mu}}{r} \pi i + \frac{\beta'_{\mu}}{r} \pi i \right)},$$

$$(B) \quad \vartheta \begin{bmatrix} a_1 + r\gamma_1 \dots a_p + r\gamma_p \\ a'_1 + r\gamma'_1 \dots a'_p + r\gamma'_p \end{bmatrix} \langle (v) \rangle = \vartheta \begin{bmatrix} a_1 \dots a_p \\ a'_1 \dots a'_p \end{bmatrix} \langle (v) \rangle e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu=1}^{\mu=p} a_{\mu} \gamma'_{\mu}}.$$

## 2.

Mit  $\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v)$  werde ein Product von  $r$  Thetafunctionen von der Form:

$$\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v) = \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v + c^{(1)}) \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v + c^{(2)}) \dots \vartheta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v + c^{(r)})$$

bezeichnet, bei dem die  $c$  Constanten bedeuten, welche den  $p$  Bedingungen:

$$c_{\mu}^{(1)} + c_{\mu}^{(2)} + \dots + c_{\mu}^{(r)} = 0 \quad (\mu=1, 2, \dots, p)$$

genügen. Ein solches Product soll ein Thetaproduct  $r^{\text{ten}}$  Grades genannt werden. Aus der Formel (B) des Art. 1 folgt sofort für jedes System ganzer Zahlen  $\gamma, \gamma'$  die Gleichung:

$$\theta \begin{bmatrix} \alpha_1 + r\gamma_1 \dots \alpha_p + r\gamma_p \\ \alpha'_1 + r\gamma'_1 \dots \alpha'_p + r\gamma'_p \end{bmatrix} (v) = \theta \begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix} (v),$$

welche zeigt, dass im Ganzen  $r^{2p}$  verschiedene Functionen  $\theta \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} (v)$  existiren; als Repräsentanten derselben können diejenigen angesehen werden, bei denen die  $\alpha, \alpha'$  sämmtlich Zahlen aus der Reihe  $0, 1, \dots, r-1$  sind.

Der Zahlencomplex  $\begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix}$  soll die Charakteristik des Thetaproductes genannt und im Folgenden kürzer mit  $[\alpha]$  bezeichnet werden. Mit Rücksicht auf die letzte Formel denke man sich im Folgenden stets bei der Charakteristik  $[\alpha]$  die sämmtlichen Zahlen  $\alpha, \alpha'$  durch ihre kleinsten positiven Reste nach dem Modul  $r$  ersetzt; es gibt dann im Ganzen nur  $r^{2p}$  Charakteristiken, die aus  $\begin{bmatrix} \alpha_1 \dots \alpha_p \\ \alpha'_1 \dots \alpha'_p \end{bmatrix}$  hervorgehen, wenn man an Stelle des Systems der  $2p$  Buchstaben  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \alpha'_1, \dots, \alpha'_p$  der Reihe nach die sämmtlichen Variationen der Elemente  $0, 1, \dots, r-1$  zur  $2p^{\text{ten}}$  Classe mit Wiederholung treten lässt. Die Charakteristik  $\begin{bmatrix} 0 \dots 0 \\ 0 \dots 0 \end{bmatrix}$  soll kurz mit  $[0]$  bezeichnet werden. Unter der Summe zweier

Charakteristiken  $[\alpha], [\beta]$  soll jene Charakteristik  $[\gamma] = [\alpha + \beta]$  verstanden werden, deren Elemente  $\gamma_\mu, \gamma'_\mu$  für  $\mu = 1, 2, \dots, p$  durch die Congruenzen  $\gamma_\mu \equiv \alpha_\mu + \beta_\mu \pmod{r}$ ,  $\gamma'_\mu \equiv \alpha'_\mu + \beta'_\mu \pmod{r}$  bestimmt sind; ebenso unter der Differenz der Charakteristiken  $[\alpha], [\beta]$  jene Charakteristik  $[\delta] = [\alpha - \beta]$ , deren Elemente  $\delta_\mu, \delta'_\mu$  für  $\mu = 1, 2, \dots, p$  durch die Congruenzen  $\delta_\mu \equiv \alpha_\mu - \beta_\mu \pmod{r}$ ,  $\delta'_\mu \equiv \alpha'_\mu - \beta'_\mu \pmod{r}$  bestimmt sind. Eine Charakteristik  $[\beta]$ , deren Elemente  $\beta_\mu, \beta'_\mu$  für  $\mu = 1, 2, \dots, p$  durch die Congruenzen  $\beta_\mu \equiv g\alpha_\mu \pmod{r}$ ,  $\beta'_\mu \equiv g\alpha'_\mu \pmod{r}$ , in denen  $g$  eine ganze Zahl ist, bestimmt sind, möge mit  $[\beta] = [g\alpha]$  bezeichnet werden.

Es möge endlich erlaubt sein, das frühere Symbol  $\left(v + \left| \begin{matrix} \beta \\ \beta \end{matrix} \right. \right)$  kürzer durch  $(v + |\beta|)$  zu ersetzen. Für das Thetaproduct  $\theta[\alpha](v)$  besteht dann auf Grund der Formel (A) des Art. 1 die Gleichung:

$$\theta[\alpha](v + |\beta|) = \theta[\alpha + \beta](v) e^{-\sum_{\mu=1}^{\mu=p} \sum_{\mu'=1}^{\mu'=p} a_{\mu\mu'} \frac{\beta_\mu \beta_{\mu'}}{r} - 2 \sum_{\mu=1}^{\mu=p} \beta_\mu \left( v_\mu + \frac{\alpha'_\mu}{r} \pi i + \frac{\beta'_\mu}{r} \pi i \right)},$$

die im Folgenden wiederholt zur Anwendung gelangen wird.

### 3.

Es mögen mit  $[\alpha^{(1)}], [\alpha^{(2)}], \dots, [\alpha^{(q)}]$   $q$  ( $q \leq p$ ) Charakteristiken von der Beschaffenheit bezeichnet werden, dass die Gleichung:

$$(1) \quad [g_1 \alpha^{(1)} + g_2 \alpha^{(2)} + \dots + g_q \alpha^{(q)}] = [0],$$

in der die  $g$  ganze Zahlen bedeuten, nur durch  $g_1 \equiv g_2 \equiv \dots \equiv g_q \equiv 0 \pmod{r}$  befriedigt werden kann, und dass weiter für jedes  $x$  und  $\lambda$  von 1 bis  $q$ :

$$(2) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\alpha_\mu^{(x)} \alpha_{\mu}^{(\lambda)} - \alpha_{\mu}^{(x)} \alpha_{\mu}^{(\lambda)}) \equiv 0 \pmod{r}$$

ist. Aus diesen Charakteristiken bilde man dann mit Hülfe ganzer Zahlen  $g_1, g_2, \dots, g_q$  die Charakteristik  $[g_1 \alpha^{(1)} + g_2 \alpha^{(2)} + \dots + g_q \alpha^{(q)}]$  und lasse darin an Stelle des Systems der  $q$  ganzen Zahlen  $g$  der Reihe nach die sämtlichen  $r^q$  Variationen der Elemente  $0, 1, \dots, r - 1$  zur  $q^{\text{ten}}$  Classe mit Wiederholung treten. Die  $r^q$  so entstehenden Charakteristiken

$[\alpha^{(0)}] = [0], [\alpha^{(1)}], [\alpha^{(2)}], \dots, [\alpha^{(r^q-1)}]$  sind dann alle von einander verschieden, und es besteht für irgend zwei unter ihnen die Congruenz (2).

Man definire nun  $r^q$  Grössen  $w_{[\alpha^{(x)}]}$ ,  $x = 0, 1, \dots, r^q - 1$  folgendermassen:

1. Ist  $r$  ungerade,

so setze man für  $x = 0, 1, \dots, r^q - 1$ :

$$w_{[\alpha^{(x)}]} = e^{\frac{r-1}{r} \pi i \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(x)} \alpha'_{\mu}{}^{(x)}};$$

dabei ist, wie im Folgenden überall, im Exponenten  $\sum_{\mu}$  zur Abkürzung statt  $\sum_{\mu=1}^{\mu=p}$  gesetzt. Jede der so definirten Grössen bleibt dann, was zu ihrer Brauchbarkeit unumgänglich ist, ungeändert, wenn man die Zahlen  $\alpha, \alpha'$  um beliebige ganze Vielfache von  $r$  ändert; auch ist, wenn  $x, \lambda$  irgend zwei Zahlen aus der Reihe  $0, 1, \dots, r^q - 1$  bezeichnen:

$$\begin{aligned} w_{[\alpha^{(x)} \pm \alpha^{(\lambda)}]} &= e^{\frac{r-1}{r} \pi i \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(x)} \pm \alpha_{\mu}^{(\lambda)}) (\alpha'_{\mu}{}^{(x)} \pm \alpha'_{\mu}{}^{(\lambda)})} \\ &= w_{[\alpha^{(x)}]} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} e^{\pm \frac{r-1}{r} \pi i \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(x)} \alpha'_{\mu}{}^{(\lambda)} + \alpha_{\mu}^{(\lambda)} \alpha'_{\mu}{}^{(x)})}, \end{aligned}$$

und man hat daher auf Grund der Congruenz (2) die Gleichung:

$$w_{[\alpha^{(x)} \pm \alpha^{(\lambda)}]} = w_{[\alpha^{(x)}]} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} e^{\mp \frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(x)} \alpha'_{\mu}{}^{(\lambda)}}. \quad (x, \lambda = 0, 1, \dots, r^q - 1)$$

2. Ist  $r$  gerade,

so setze man  $w_{[0]} = 1$ , wähle  $w_{[\alpha^{(1)}]}, w_{[\alpha^{(2)}]}, \dots, w_{[\alpha^{(q)}]}$  nach Belieben so, dass:

$$w_{[\alpha^{(x)}]}^2 = e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(x)} \alpha'_{\mu}{}^{(x)}} \quad (x=1, 2, \dots, q)$$

ist, was auf  $2^q$  Weisen geschehen kann, und definire die Grösse:

$$w_{[\alpha^{(x)} + \alpha^{(\lambda)} + \alpha^{(\nu)} + \dots]},$$

bei der  $x, \lambda, \nu, \dots$  Zahlen aus der Reihe  $1, 2, \dots, q$  bezeichnen, die auch theilweise oder alle einander gleich sein können, durch die Gleichung:



$$w_{[\alpha^{(x)} + \alpha^{(\lambda)} + \alpha^{(\nu)} + \dots]} = w_{[\alpha^{(x)}]} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} w_{[\alpha^{(\nu)}]} \dots e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (a_{\mu}^{(x)} a_{\mu}^{\prime(\lambda)} + a_{\mu}^{(x)} a_{\mu}^{\prime(\nu)} + a_{\mu}^{(\lambda)} a_{\mu}^{\prime(\nu)} + \dots)}$$

Es ist dann wiederum für irgend zwei Zahlen  $x, \lambda$  aus der Reihe  $0, 1, \dots, r^q - 1$ :

$$w_{[\alpha^{(x)} \pm \alpha^{(\lambda)}]} = w_{[\alpha^{(x)}]} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} e^{\mp \frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} a_{\mu}^{(x)} a_{\mu}^{\prime(\lambda)}} \quad (x, \lambda = 0, 1, \dots, r^q - 1)$$

Man nehme nun an, dass zwischen den  $r^q$  Thetaproducten  $r^{\text{ten}}$  Grades  $\theta[\gamma + \alpha^{(x)}](v)$ ,  $x = 0, 1, \dots, r^q - 1$ , bei denen  $[\gamma]$  irgend eine Charakteristik bezeichnet, eine lineare Relation:

$$(3) \quad \sum_{x=0}^{x=r^q-1} c_x \theta[\gamma + \alpha^{(x)}](v) = 0$$

bestehe, in der die  $c$  von  $v$  unabhängige Grössen bezeichnen, die nicht alle den Werth Null besitzen. Lässt man dann das Variablensystem  $(v)$  in das System  $(v + |\alpha^{(x')}|)$  übergehen, indem man unter  $x'$  irgend eine Zahl aus der Reihe  $0, 1, \dots, r^q - 1$  versteht, so geht aus der Gleichung (3) die neue:

$$(4) \quad \sum_{x=0}^{x=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} a_{\mu}^{(x')} a_{\mu}^{\prime(x)}} c_x \theta[\gamma + \alpha^{(x)} + \alpha^{(x')}] (v) = 0$$

hervor, und aus dieser entsteht, wenn man mit  $[\varepsilon]$  irgend eine Charakteristik bezeichnet, linke und rechte Seite mit:

$$w_{[\alpha^{(x')}] } e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (a_{\mu}^{(x)} \varepsilon_{\mu}^{\prime} - a_{\mu}^{\prime(x')} \varepsilon_{\mu})}$$

multiplicirt und nach  $x'$  von  $0$  bis  $r^q - 1$  summirt, die Gleichung:

$$(5) \quad \sum_{x=0}^{x=r^q-1} \sum_{x'=0}^{x'=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (a_{\mu}^{(x')} \varepsilon_{\mu}^{\prime} - a_{\mu}^{\prime(x')} \varepsilon_{\mu})} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} a_{\mu}^{(x)} a_{\mu}^{\prime(x)}} w_{[\alpha^{(x')}] } c_x \theta[\gamma + \alpha^{(x)} + \alpha^{(x')}] (v) = 0.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung führe man nun an Stelle des

Summationsbuchstabens  $x'$  einen neuen Summationsbuchstaben  $\lambda$  ein, indem man:

$$[\alpha^{(x')}] = [\alpha^{(\lambda)} - \alpha^{(\nu)}]$$

setzt und dabei unter  $\nu$  eine Zahl aus der Reihe  $0, 1, \dots, r^q - 1$  versteht, über die sogleich verfügt werden wird. Bei der Ausführung der Summation nach  $x'$  durchläuft dann auch  $\lambda$  die Reihe der Zahlen  $0, 1, \dots, r^q - 1$  nur in anderer Reihenfolge, und man erhält, wenn man schliesslich noch  $\nu = x$  setzt und beachtet, dass:

$$w_{[\alpha^{(\lambda)} - \alpha^{(x)}]} = w_{[\alpha^{(\lambda)}]} w_{[\alpha^{(x)}]} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(\lambda)} \alpha_{\mu}^{(x)'}}$$

ist, aus (5) die Gleichung:

$$(6) \quad \left( \sum_{x=0}^{x=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(x)} \varepsilon_{\mu}' - \alpha_{\mu}^{(x')} \varepsilon_{\mu})} \frac{1}{w_{[\alpha^{(x)}]} c_x} \right) \\ \times \left( \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu}' - \alpha_{\mu}^{(\lambda')} \varepsilon_{\mu})} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} \theta[\gamma + \alpha^{(\lambda)}](v) \right) = 0.$$

Für jede der  $r^{2p}$  Charakteristiken, die man an Stelle von  $[\varepsilon]$  setzen kann, muss daher, sobald nicht der erste der beiden die linke Seite der Gleichung (6) bildenden Factoren verschwindet, der zweite Null sein. Da nun aber aus dem Verschwinden aller ersten Factoren das Verschwinden der sämtlichen Grössen  $c$  folgen würde, und dies ausgeschlossen ist, so ergibt sich als Resultat der bisherigen Untersuchung, dass immer, wenn zwischen den  $r^q$  Thetaproducten  $r^{\text{ten}}$  Grades  $\theta[\gamma + \alpha^{(x)}](v)$ ,  $x = 0, 1, \dots, r^q - 1$ , überhaupt eine lineare Relation (3) besteht, dann zwischen ihnen auch mindestens eine, im Allgemeinen aber mehrere lineare Relationen von der speciellen Form:

$$(7) \quad \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu}' - \alpha_{\mu}^{(\lambda')} \varepsilon_{\mu})} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} \theta[\gamma + \alpha^{(\lambda)}](v) = 0$$

existiren. Das Bestehen dieser Relationen (7) ist dann aber auch eine

zum Bestehen der Relation (3) hinreichende Bedingung, da sich die linke Seite der Gleichung (3) aus den linken Seiten der Gleichungen (7) auf Grund der Gleichung:

$$(8) \quad \sum_{x=1}^{x=r^q-1} c_x \theta[\gamma + \alpha^{(x)}](v) \\ = \frac{1}{r^{2p}} \sum_{[\varepsilon]} \left\{ \left( \sum_{x=0}^{x=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(x)} \varepsilon_{\mu}' - \alpha_{\mu}'^{(x)} \varepsilon_{\mu})} \frac{1}{w_{[\alpha^{(x)}]} c_x} \right) \right. \\ \left. \times \left( \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu}' - \alpha_{\mu}'^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu})} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} \theta[\gamma + \alpha^{(\lambda)}](v) \right) \right\},$$

in der die Summation so auszuführen ist, dass  $[\varepsilon]$  die Reihe der  $r^{2p}$  Charakteristiken durchläuft, zusammensetzen lässt.

#### 4.

Es seien wiederum mit  $[\alpha^{(1)}], \dots, [\alpha^{(q)}]$   $q$  ( $q < p$ ) Charakteristiken von der Beschaffenheit bezeichnet, dass die Gleichung:

$$(1) \quad [g_1 \alpha^{(1)} + \dots + g_q \alpha^{(q)}] = [0],$$

in der die  $g$  ganze Zahlen bedeuten, nur durch  $g_1 \equiv \dots \equiv g_q \equiv 0 \pmod{r}$  befriedigt werden kann, und dass für jedes  $x$  und  $\lambda$  von 1 bis  $q$ :

$$(2) \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\alpha_{\mu}^{(x)} \alpha_{\mu}'^{(\lambda)} - \alpha_{\mu}'^{(x)} \alpha_{\mu}^{(\lambda)}) \equiv 0 \pmod{r}$$

ist, und es seien  $[\alpha^{(0)}] = [0], [\alpha^{(1)}], \dots, [\alpha^{(r^q-1)}]$  jene  $r^q$  verschiedenen Charakteristiken, die aus  $[g_1 \alpha^{(1)} + \dots + g_q \alpha^{(q)}]$  hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der  $q$  Buchstaben  $g_1, \dots, g_q$  der Reihe nach die sämtlichen Variationen der Elemente  $0, 1, \dots, r-1$  zur  $q^{\text{ten}}$  Classe mit Wiederholung treten lässt. Es seien ferner mit  $[\beta^{(1)}], \dots, [\beta^{(q')}]$   $q'$  ( $q + q' \leq p$ ) Charakteristiken von der Beschaffenheit bezeichnet, dass die Gleichung:

$$(1') \quad [h_1 \beta^{(1)} + \dots + h_{q'} \beta^{(q')}] = [0],$$

in der die  $h$  ganze Zahlen bedeuten, nur durch  $h_1 \equiv \dots \equiv h_{q'} \equiv 0 \pmod{r}$  befriedigt werden kann, und dass für jedes  $\rho$  von 1 bis  $q'$  die Congruenz:

$$(2') \quad \sum_{\mu=1}^{\mu=p} (\beta_{\mu}^{(\rho)} \alpha_{\mu}^{(x)} - \beta_{\mu}^{(\rho')} \alpha_{\mu}^{(x)}) \equiv 0 \pmod{r}$$

nicht für alle Werthe von  $x$  besteht, und es seien  $[\beta^{(0)}] = [0]$ ,  $[\beta^{(1)}]$ ,  $\dots$ ,  $[\beta^{(r^{q'}-1)}]$  jene  $r^{q'}$  verschiedenen Charakteristiken, die aus:

$$[h_1 \beta^{(1)} + \dots + h_{q'} \beta^{(q')}]$$

hervorgehen, wenn man darin an Stelle des Systems der  $q'$  Buchstaben  $h_1, \dots, h_{q'}$  der Reihe nach die sämtlichen Variationen der Elemente  $0, 1, \dots, r-1$  zur  $q'$ ten Classe mit Wiederholung treten lässt. Lässt man dann in der Charakteristik  $[\alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}]$   $x$  die Reihe der Zahlen  $0, 1, \dots, r^q - 1$  und unabhängig davon  $\rho$  die Reihe der Zahlen  $0, 1, \dots, r^{q'} - 1$  durchlaufen, so gehen aus  $[\alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}]$   $r^{q+q'}$  Charakteristiken hervor, von denen keine zwei einander gleich sind.

Man nehme nun an, dass zwischen den  $r^{q+q'}$  Thetaproducten  $r^{\text{ten}}$  Grades  $\theta[\eta + \alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}](v)$ ,  $x = 0, 1, \dots, r^q - 1$ ,  $\rho = 0, 1, \dots, r^{q'} - 1$ , bei denen  $[\eta]$  irgend eine Charakteristik bezeichnet, eine lineare Relation:

$$(3) \quad \sum_{x=0}^{x=r^q-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} c_{x\rho} \theta[\eta + \alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}](v) = 0$$

bestehe, in der die  $c$  von  $v$  unabhängige Grössen bezeichnen, die nicht alle den Werth Null besitzen. Lässt man dann das Variablensystem  $(v)$  in das System  $(v + |\alpha^{(x')}|)$  übergehen, indem man unter  $x'$  irgend eine Zahl aus der Reihe  $0, 1, \dots, r^{q'} - 1$  versteht, so geht aus der Gleichung (3) die neue:

$$(4) \quad \sum_{x=0}^{x=r^q-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} a_{\mu}^{(x)} (a_{\mu}^{(x')} + \beta_{\mu}^{(\rho)})} c_{x\rho} \theta[\eta + \alpha^{(x)} + \alpha^{(x')} + \beta^{(\rho)}](v) = 0$$

hervor, und aus dieser entsteht, wenn man unter  $[\varepsilon]$  irgend eine Charakteristik und unter  $w_{[\alpha^{(x')}]}$  die nämliche Grösse wie im vorigen Artikel versteht, linke und rechte Seite mit:

$$w_{[\alpha^{(x')}] e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (a_{\mu}^{(x')} \varepsilon_{\mu}' - a_{\mu}^{(x')} \varepsilon_{\mu})}$$

multiplirt und nach  $x'$  von 0 bis  $r^q - 1$  summirt, die Gleichung:

$$(5) \sum_{x=0}^{x=r^q-1} \sum_{x'=0}^{x'=r^q-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (a_{\mu}^{(x)} \varepsilon_{\mu}' - a_{\mu}'^{(x')} \varepsilon_{\mu})} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} a_{\mu}^{(x)} (a_{\mu}'^{(x)} + \beta_{\mu}'^{(\rho)})} w_{[a^{(x)}]} c_{x\rho} \theta[\gamma + \alpha^{(x)} + \alpha^{(x')} + \beta^{(\rho)}](v) = 0.$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung führe man nun an Stelle des Summationsbuchstabens  $x'$  einen neuen Summationsbuchstaben  $\lambda$  ein, indem man:

$$[a^{(x')}] = [a^{(\lambda)} - \alpha^{(\nu)}]$$

setzt und dabei unter  $\nu$  eine Zahl aus der Reihe 0, 1, ...,  $r^q - 1$  versteht, über die sogleich verfügt werden wird. Bei der Ausführung der Summation nach  $x'$  durchläuft dann auch  $\lambda$  die Reihe der Zahlen 0, 1, ...,  $r^q - 1$  nur in anderer Reihenfolge, und man erhält, wenn man schliesslich noch  $\nu = x$  setzt und beachtet, dass:

$$w_{[a^{(\lambda)} - a^{(x)}]} = w_{[a^{(\lambda)}]} w_{[a^{(x)}]} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} a_{\mu}^{(\lambda)} a_{\mu}'^{(x)}}$$

ist, aus (5) die Gleichung

$$(6) \sum_{\rho=0}^{\rho=r^q-1} C_{\rho}^{[\varepsilon]} \left( \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (a_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu}' - a_{\mu}'^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu})} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} a_{\mu}^{(\lambda)} \beta_{\mu}'^{(\rho)}} w_{[a^{(\lambda)}]} \theta[\gamma + \alpha^{(\lambda)} + \beta^{(\rho)}](v) \right) = 0,$$

bei der zur Abkürzung:

$$\sum_{x=0}^{x=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (a_{\mu}^{(x)} \varepsilon_{\mu}' - a_{\mu}'^{(x)} \varepsilon_{\mu})} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} a_{\mu}^{(x)} \beta_{\mu}'^{(\rho)}} \frac{1}{w_{[a^{(x)}]}} c_{x\rho} = C_{\rho}^{[\varepsilon]}$$

gesetzt ist.

Aus dem Bestehen der Gleichung (3) folgt das Bestehen der Gleichung (6) für eine beliebige Charakteristik  $[\varepsilon]$ . Würden nun für jede der  $r^{2\rho}$  Charakteristiken, die man an Stelle von  $[\varepsilon]$  setzen kann, die sämtlichen Grössen  $C_{\rho}^{[\varepsilon]}$  ( $\rho = 0, 1, \dots, r^q - 1$ ) den Werth Null besitzen, so würde dies auch das Verschwinden der sämtlichen Grössen  $c$  nach sich ziehen, und da dies ausgeschlossen ist, so ergibt sich als Resultat der vorstehenden Untersuchung, dass immer, wenn zwischen den

$r^{q+q'}$  Thetaproducten  $r^{\text{ten}}$  Grades  $\theta[\gamma + \alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}](v)$  ( $x=0, 1, \dots, r^q-1$ ) ( $\rho=0, 1, \dots, r^{q'}-1$ ) überhaupt eine lineare Relation (3) besteht, dann zwischen ihnen auch mindestens eine, im Allgemeinen aber mehrere lineare Relationen von der specielleren Form:

$$(7) \quad \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} C_{\rho}^{[\varepsilon]} \left( \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon'_{\mu} - \alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu})} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(\lambda)} \beta_{\mu}^{(\rho)}} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} \theta[\gamma + \alpha^{(\lambda)} + \beta^{(\rho)}](v) \right) = 0$$

existiren. Das Bestehen dieser Relationen (7) ist dann aber auch eine zum Bestehen der Relation (3) hinreichende Bedingung, da sich die linke Seite der Gleichung (3) aus den linken Seiten der Gleichungen (7) auf Grund der Gleichung:

$$(8) \quad \sum_{x=0}^{x=r^q-1} \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} c_{x\rho} \theta[\gamma + \alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}](v) = \frac{1}{r^{2p}} \sum_{[\varepsilon]} \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} \left\{ \left( \sum_{x=0}^{x=r^q-1} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(x)} \varepsilon'_{\mu} - \alpha_{\mu}^{(x)} \varepsilon_{\mu})} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(x)} \beta_{\mu}^{(\rho)}} \frac{1}{w_{[\alpha^{(x)}]} c_{x\rho}} \right) \times \left( \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon'_{\mu} - \alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu})} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} \alpha_{\mu}^{(\lambda)} \beta_{\mu}^{(\rho)}} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} \theta[\gamma + \alpha^{(\lambda)} + \beta^{(\rho)}](v) \right) \right\},$$

in der die Summation so auszuführen ist, dass  $[\varepsilon]$  die Reihe der  $r^{2p}$  Charakteristiken durchläuft, zusammensetzen lässt.

Lässt man endlich in der Gleichung (7) das Variablensystem  $(v)$  in das System  $(v - |\beta^{(\sigma)}|)$  übergehen, indem man unter  $\sigma$  irgend eine Zahl aus der Reihe  $0, 1, \dots, r^{q'} - 1$  versteht, so geht aus derselben die Gleichung:

$$(9) \quad \sum_{\rho=0}^{\rho=r^{q'}-1} C_{\rho}^{[\varepsilon]} \left( \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon'_{\mu} - \alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu})} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \beta_{\mu}^{(\rho)} - \beta_{\mu}^{(\sigma)} \alpha_{\mu}^{(\lambda)} - \beta_{\mu}^{(\sigma)} \beta_{\mu}^{(\rho)})} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} \theta[\gamma + \alpha^{(\lambda)} + \beta^{(\rho)} - \beta^{(\sigma)}](v) \right) = 0$$

hervor. Besitzen nun für irgend eine Charakteristik  $[\varepsilon]$  nicht die sämtlichen Grössen  $C_{\rho}^{[\varepsilon]}$  den Werth Null, so folgt aus dem Bestehen der  $r^{q'}$  Gleichungen, die aus der Gleichung (9) hervorgehen, wenn man  $\sigma$  die Reihe der Zahlen  $0, 1, \dots, r^{q'} - 1$  durchlaufen lässt, das Verschwinden der Determinante:

$$(10) \left| \sum_{\lambda=0}^{\lambda=r^q-1} e^{\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu}' - a_{\mu}'^{(\lambda)} \varepsilon_{\mu})} e^{-\frac{2\pi i}{r} \sum_{\mu} (\alpha_{\mu}^{(\lambda)} \beta_{\mu}'^{(\rho)} - \beta_{\mu}'^{(\rho)} a_{\mu}'^{(\lambda)} - \beta_{\mu}^{(\sigma)} \beta_{\mu}'^{(\rho)})} w_{[\alpha^{(\lambda)}]} \theta[\eta + \alpha^{(\lambda)} + \beta^{(\rho)} - \beta^{(\sigma)}](v) \right|$$

$$\rho, \sigma = 0, 1, \dots, r^q - 1,$$

und man kann daher das oben gefundene Resultat auch so aussprechen, dass immer, wenn zwischen den  $r^{q+q'}$  Thetaproducten  $r^{\text{ten}}$  Grades:

$$\theta[\eta + \alpha^{(x)} + \beta^{(\rho)}](v) \quad \begin{matrix} (x=0, 1, \dots, r^q-1) \\ (\rho=0, 1, \dots, r^{q'}-1) \end{matrix}$$

eine lineare Relation besteht, dann mindestens eine der Determinanten  $r^{q' \text{ten}}$  Grades (10) verschwindet.

Strassburg, den 9. December 1891.

---