RAPPORT SUR QUELQUES CALCULS ENTREPRIS PAR M. BERTELSEN ET CONCERNANT LES NOMBRES PREMIERS

PAR

J.-P. GRAM

à COPENHAGUE.

Comme on sait, nous possédons des tables des diviseurs comprenant les nombres des neuf premiers millions. Pour les trois premiers millions ces tables ont été calculées par BURCKHARDT,[1] pour les trois suivants par M. J. GLAISHER[2] et pour les trois derniers par DASE.[3] Lesdites tables donnent immédiatement pour chaque nombre composé non divisible par 2, 3, 5 le plus petit nombre premier qui le divise; les nombres premiers eux-mêmes sont désignés par un —. Dans l'introduction à la table du sixième million, M. GLAISHER a, en outre, communiqué les résultats de l'énumération très soigneuse des nombres qui dans les tables sont indiquées comme premiers, et il a comparé ces résultats avec ceux qu'on trouve en calculant la totalité des nombres premiers jusqu'à une limite donnée au moyen de différentes formules approximatives. Par cette comparaison on trouve en général une assez bonne concordance entre les énumérations et les calculs faits d'après la formule approximative de RIEMANN. Celle-ci devant être supposée représenter la fonction en question

---

[1] J. CH. BURCKHARDT: *Table des diviseurs pour tous les nombres des* 1^er^, 2^e^ *et* 3^e^ *million.* Paris 1817. (1814—1817.)

[2] JAMES GLAISHER: *Factor Table for the fourth, fifth, sixth Million.* London 1879, 1880, 1883.

[3] ZACHARIAS DASE: *Factoren-Tafeln für alle Zahlen der siebenten, achten, neunten Million.* Hamburg 1862, 1863, 1865.

aussi exactement qu'il est possible de le faire par une formule approximative continue de ce genre, on avait le droit de conclure que les tables des diviseurs étaient essentiellement correctes.

Néanmoins on sait depuis longtemps que les tables ne sont pas sans fautes. A la vérité, M. MEISSEL[1] a trouvé par un calcul direct la totalité des nombres premiers dans chaque myriade jusqu'à 1 million concordant avec le résultat donné par les énumérations dans les tables, mais dans le 2e million plusieurs erreurs isolées ont été trouvées, tant par M. MEISSEL que par d'autres auteurs. Malheureusement, on ne possède pas une table des diviseurs pour le 10e million, et le nombre $\theta(10^7)$ — je dénote par le symbole $\theta(n)$ la totalité des nombres premiers jusqu'à la limite n — calculé par M. MEISSEL ne saurait donc être appliqué pour contrôler les énumérations. Toutefois le fait que l'écart entre les valeurs de $\theta(10^7)$ trouvées par l'énumération et par la formule de RIEMANN était $+ 87$, tandis que l'écart correspondant pour 9.10^6 fut $- 132$, indiqua qu'il y avait probablement plusieurs erreurs. Un examen attentif des déviations entre les résultats de M. GLAISHER et ceux que donne la formule de RIEMANN pour chaque centaine de mille dans le 9e million, m'avait depuis plusieurs années conduit à la conviction qu'il se trouvait dans ce million une série d'erreurs, notablement que plusieurs nombres composés étaient marqués comme nombres premiers.[2]

Poussé par ces considérations, j'avais plusieurs fois songé à entreprendre moi-même le calcul de $\theta(9.10^6)$, mais la difficulté d'achever sans erreurs un calcul si long et si fatigant m'avait toujours découragé. Le vif intérêt que toutes les recherches concernant les nombres premiers ont excité parmi les géomètres durant ces dernières années, rendait cependant ledit calcul de jour en jour plus désirable.

Ce fut donc une heureuse circonstance qu'un jeune homme M. N.-P. BERTELSEN, calculateur dont l'habileté n'est comparable qu'avec celle d'un DASE et qui possède en outre les connaissances mathématiques nécessaires, ait bien voulu entreprendre un calcul de $\theta(9.10^6)$ d'après la

---

[1] *Über die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen.* Mathematische Annalen, T. 2, p. 636—642, cfr. T. 3, p. 523, T. 21, p. 304, T. 25, p. 251.

[2] L. LORENZ: *Analytiske Undersøgelser over Primtalmængderne.* Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 6te Række V, 4, p. 450.

méthode de M. MEISSEL. M. BERTELSEN commença l'oeuvre durant l'été de 1891 et il a consacré à des calculs décrits ci-dessous une grande partie de ses loisirs pendant l'année suivante. Un résumé succinct de son travail fut présenté par moi dans le 14e Congrès des naturalistes scandinaves, qui eut lieu à Copenhague en juillet 1892.

Le calcul de $\theta(9.10^6)$ donna aussitôt le résultat prévu que les tables des diviseurs indiquent des nombres premiers en excès. L'erreur totale s'éleva à 78 unités, la valeur correcte de $\theta(9.10^6)$ étant 602489 au lieu de 602567 d'après M. GLAISHER, le nombre 1 n'étant pas compté comme premier. L'écart de RIEMANN fut par là réduit à 54 unités seulement.

L'erreur totale est relativement assez insignifiante et semble témoigner avantageusement du degré de l'exactitude apportée tant à dresser de si vastes tables qu'à effectuer les énumérations. Cependant, il était désirable d'avoir les erreurs mieux localisées, et, dans ce but M. BERTELSEN entreprit le calcul de θ pour chaque million jusqu'à 10 millions.

Ce nouveau calcul fit constater en premier lieu que les résultats obtenus par M. MEISSEL pour $\theta(10^6)$ et $\theta(10^7)$ étaient parfaitement corrects; qu'ensuite il y avait dans les tables des 2, 3, 4 et 5e millions des erreurs probablement peu nombreuses, que les 6 et 7e millions peuvent être sans faute, mais que, dans le 8e et surtout dans le 9e, il doit y avoir de fortes erreurs.

Mais M. BERTELSEN ne se contentait pas de ces résultats. Avec une assiduité qui doit exciter la véritable admiration de tous ceux qui comprennent combien un pareil travail est pénible et fatigant, il se mit à chercher ces erreurs dans les tables mêmes en commençant par le 9e million et examinant tout d'abord si quelques-uns des nombres indiqués comme premiers étaient réellement des composés.

Cela nécessita une localisation ultérieure des erreurs, et après avoir calculé θ pour des intervalles de 100000 et même des plus petits, on arriva au résultat surprenant que, dans le 9e million, presque tous les multiples du nombre premier 2617 sont signalés comme des nombres premiers. Tel est encore le cas pour divers multiples d'autres nombres premiers, par exemple 13 et 181.

Ces découvertes imprévues encouragèrent à de nouveaux efforts. Au moyen d'un système de tables auxiliaires et d'autres artifices que M. BERTELSEN se construisit peu à peu, il calcula successivement un grand nombre de valeurs distinctes de $\theta(n)$ avec des intervalles de 100000, 50000 et même, en certains endroits, de 25000 ou moindres encore. Cela fait, il a entrepris une recherche minutieuse des erreurs dont l'existence dans chaque intervalle était révélée par le calcul, et le résultat de ces recherches se trouve dans la table I, qui donne une liste de toutes les erreurs connues jusqu'ici dans les tables des diviseurs. Quelques-unes de ces erreurs sont de purs errata, d'autres sont dues sans doute à un déplacement du crible, d'autres encore sont des fautes de calcul ou de transcription.

On trouvera dans la liste des erreurs quelques briéves indications à cet égard; le signe *Pr.* dénote que le nombre posé est premier, un astérisque signifie que l'erreur a été signalée auparavant. La liste contient non seulement des erreurs concernant les premiers, mais d'autres encore, par exemple de fausses indications des plus petits diviseurs. Voici pour les divers millions les nombres respectifs de fautes connues:

Million	1^e	2^e	3^e	4^e	5^e	6^e	7^e	8^e	9^e
Erreurs	1	23	15	1	2	0	0	40	59.

Tandis qu'à l'exception du 1[er] million, où l'on n'a trouvé qu'une faute (signalée par Dase), les tables de Burckhardt contiennent d'assez nombreuses erreurs; les tables de M. Glaisher ne sont fautives qu'en trois points, et le 6[e] million en semble totalement exempt, preuve du grand soin avec lequel le travail a été exécuté. Tel est aussi le cas du 1[er] million de Dase, tandis que les deux derniers millions traités par ce calculateur sont moins bien réussis, mais l'on doit se rappeler que l'achèvement de ce grand oeuvre par lui-même a été empêché par la mort.

La liste suivante n'a pas la prétention d'être absolument complète, les tables n'ayant point été examinées avec le même soin dans toutes leurs parties; le but principal n'était pas même de trouver toutes les erreurs commises, ce qui est impossible sans refaire le calcul des tables. Néanmoins on peut compter qu'il n'y reste que très peu de ces erreurs, surtout dans l'indication des nombres premiers. Pour en comprendre la raison, il faut considérer la méthode suivie par M. Bertelsen pour les chercher systématiquement.

Avant d'expliquer ce procédé je dois rappeler succinctement la méthode de M. Meissel.

Soit m la limite pour laquelle on va calculer $\theta(m)$, la totalité des nombres premiers inférieurs. Désignons par p_n le nombre premier n^e et par

$$\Phi(m, n) = m - \sum E\frac{m}{a} + \sum E\frac{m}{ab} - \sum E\frac{m}{abc} + \dots$$

la totalité des nombres $\overline{\overline{<}}\, m$ qui ne sont divisibles par aucun des nombres $a, b, c, \dots$, représentant les n plus petits nombres premiers. En appliquant dans les dénominateurs tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{m}$, ladite formule donne, comme on le sait, $1 +$ la totalité des nombres premiers qui sont compris entre les limites $\sqrt{m}$ et m. On a donc

$$\Phi(m, \theta(\sqrt{m})) = 1 + \theta(m) - \theta(\sqrt{m}).$$

D'ailleurs on trouve facilement la formule de réduction suivante

$$\Phi(m, n) = \Phi(m, n - 1) - \Phi\left(E\frac{m}{p_n}, n - 1\right),$$

dont l'application devient plus commode en remarquant, comme l'a fait M. Meissel, qu'on peut trouver une expression simple pour la différence

$$\Phi(m, \theta(\sqrt[3]{m})) - \Phi(m, \theta(\sqrt{m})).$$

En effet, cette différence représente la totalité des nombres appartenant respectivement aux classes suivantes de nombres:

1° les nombres premiers eux-mêmes entre $\sqrt[3]{m}$ et $\sqrt{m}$, soit $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, en nombre

$$\mu = \theta(\sqrt{m}) - \theta(\sqrt[3]{m});$$

2° des carrés et des produits formés de ceux-ci, savoir $\alpha^2, \beta^2, \dots$, $\alpha\beta, \beta\gamma$, etc., en nombre $\frac{\mu(\mu + 1)}{2}$;

3° des produits des nombres $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ par d'autres nombres premiers $> \sqrt[3]{m}$; le nombre de ces produits étant

$$\sum_a \left(\theta\left(\frac{m}{a}\right) - \theta(\sqrt{m})\right) = \sum_a \theta\left(\frac{m}{a}\right) - \mu\theta(\sqrt{m}).$$

On a donc

$$\Phi(m\,,\,\theta(\sqrt[3]{m})) - \Phi(m\,,\,\theta(\sqrt{m})) = \frac{\mu(\mu+3)}{2} - \mu\theta(\sqrt{m}) + \sum_a \theta\left(\frac{m}{a}\right),$$

la somme $\sum_a$ étendue à tous les nombres premiers de $\sqrt[3]{m}$ à $\sqrt{m}$.

La détermination de $\Phi(m\,,\,\theta(\sqrt{m}))$ est donc réduite soit au calcul de $\Phi(m\,,\,\theta(\sqrt[3]{m}))$, qui peut se faire par réductions successives, soit au calcul des termes entrant dans la somme $\sum_a \theta\left(\frac{m}{a}\right)$. Puisque $m = 10^7$ donne $\alpha > 215{\cdot}4\,,\ \frac{m}{a} < 46416$, les termes en question se trouvent le plus facilement au moyen d'une liste des nombres premiers, numérotés suivant leur grandeur. Egalement le calcul de $\Phi(m\,,\,n)$ peut être facilité par la construction de tables auxiliaires. Pour plus de détails voir le mémoire de M. MEISSEL.

Quant aux nombres θ, le calcul de M. BERTELSEN a été fait de cette même manière, à part quelques petites modifications provenant de ce qu'il y avait à calculer une longue série de résultats de même genre devant se supporter et se contrôler mutuellement autant que possible. Pour plus de sûreté quelques-uns des nombres θ sont en outre calculés deux fois à quelque temps d'intervalle. Plus tard, M. MEISSEL, à qui j'avais communiqué les résultats obtenus par M. BERTELSEN, a eu la bonté d'entreprendre lui-même un calcul des nombres $\theta(2.10^6)$, $\theta(3.10^6)$, $\theta(5.10^6)$ et $\theta(9.10^6)$. Il a trouvé une parfaite concordance avec M. BERTELSEN, soit dans les résultats définitifs, soit dans les détails examinés. Ce surcroît de contrôle exigé par un auteur si bien versé dans ces calculs difficiles, et qui fait autorité, exclut toute crainte sur l'introduction d'erreurs systématiques.

On peut admettre qu'au moins tous les nombres θ qui sont calculés deux fois, sont tout à fait exacts et qu'on peut sérieusement compter sur les autres. Et chaque doute sur ce point disparaît quand on se rappelle que M. BERTELSEN a trouvé dans les tables des diviseurs le même nombre d'erreurs concernant les nombres premiers qui devait s'y trouver d'après ses calculs de θ, et en outre quand on considère son procédé ingénieux pour découvrir ces mêmes erreurs que je vais exposer.

Par sommation directe des diviseurs insérés dans les tables, on peut trouver la somme des plus petits diviseurs des nombres composés non divisibles par 2, 3, 5, dans un intervalle donné. Cette même somme que nous désignons par S, peut être calculée par une autre voie. Un nombre premier donné, soit p_s, se trouvera dans la table comme plus petit diviseur d'un nombre composé chaque fois qu'il sera multiplié par un nombre qui contient seulement des facteurs premiers $\overline{\overline{>}}\, p_s$. Si l'on considère l'intervalle depuis zéro à la limite m, on trouvera donc p_s comme plus petit diviseur un nombre de fois qui est donné par le symbole $\Phi\left(\frac{m}{p_s}, s-1\right)$. Pour l'intervalle de m à M, la somme S se trouvera alors par la formule

$$S = \sum_s p_s\left(\Phi\left(\frac{M}{p_s}, s-1\right) - \Phi\left(\frac{m}{p_s}, s-1\right)\right), \qquad 3 < s \leqq \theta(\sqrt{M})$$

qui donne un calcul assez facile parce que les fonctions Φ qui y entrent sont déjà calculées, au moins en partie, pour déterminer $\theta(m)$ et $\theta(M)$.

Un exemple fera mieux saisir l'utilité de cette opération. On a trouvé par le calcul

$\theta(8{,}150000) = 549150$ mais selon GLAISHER 549184. Diff. $= 34$,

$\theta(8{,}175000) = 550729$ » » » 550768. » $= 39$.

L'intervalle considéré contient donc, au moins, 5 erreurs. Deux d'entre elles sont dues à l'omission du diviseur 2617 pour les nombres 8,162423 et 8,167657; restent encore trois erreurs à chercher.

En sommant les diviseurs de la table on trouve pour le même intervalle

	$S =$	1165686
Correction	$+\ 2.2617 =$	5234
	S corrigé	1170920.
Le calcul donne	$S =$	1171463
	Différence	543.

Comme $543 = 3.181$, il fallait d'abord examiner dans le dit intervalle les 12 nombres dont le plus petit diviseur est 181, et l'on constata que précisément trois de ces multiples étaient indiqués comme des nombres premiers.

Ces cinq erreurs étant rectifiées, l'intervalle en question ne peut plus contenir que des erreurs n'entachant ni l'exactitude du total des nombres premiers ni celle de la somme des plus petits diviseurs. A proprement parler il ne peut rester que des erreurs où, par suite d'un lapsus calami ou d'un déplacement des caractères, le plus petit diviseur n'est pas rapporté au nombre congru. Telles sont les erreurs aux nombres 1,359233 et 8,783693, mais le cas est très rare sans doute. Dans les cas où l'on a vérifié d'après la méthode ci-dessus indiquée, on peut affirmer presque en toute sûreté que toutes les fautes sont découvertes, et cela d'autant mieux que la preuve est praticable seulement en cas d'erreurs très peu nombreuses, l'existence d'erreurs très hétérogènes dans une même intervalle nécessitant un examen détaillé.

Dans les intervalles auxquels on n'a pas appliqué la preuve par sommation, certaines erreurs ont pu passer inaperçues, mais elles ne peuvent pas influencer les nombres premiers étrangers à l'intervalle, car le classement erroné d'un nombre composé parmi les nombres premiers sera compensé par une autre erreur en sens opposé, également dans le dit intervalle.

Il y a donc raison d'admettre qu'en prenant pour point de départ les valeurs de θ calculées par M. Bertelsen et en faisant des énumérations supplémentaires dans les tables des diviseurs corrigées d'après la liste des erreurs donnée ci-dessous, on pourra déterminer, pour chaque limite inférieure à 9 millions le nombre $\theta(m)$ des nombres premiers avec une erreur d'une unité au plus.

Tel est le résultat important de l'oeuvre de M. Bertelsen. Si son but principal eût été d'entreprendre une révision complète des tables, on aurait pu employer un autre moyen de contrôle, savoir la sommation des nombres premiers eux-mêmes, opération facilitée par la disposition des tables, en procédant page par page. D'autre part la somme en question peut être calculée par une méthode analogue à celle décrite auparavant. Il aurait été bien désirable que cette vérification ou une analogue, eût été appliquée en même temps qu'on dressait les tables; il faudra également l'employer, s'il s'agit de construire de nouvelles listes des nombres premiers. Mais pour le cas des tables des diviseurs existantes le travail serait ingrat. En effet bien qu'on trouve des fautes dans ces tables, il n'en faut pas moins reconnaître qu'à tout prendre, ces tables sont remarquablement bien dressées, surtout eu égard à la grandeur du travail.

Et il ne faut pas moins apprécier ce qu'on doit à des hommes tels que MM. GLAISHER, MEISSEL et BERTELSEN, qui ont mené à fin des oeuvres supplémentaires qui permettent d'utiliser à des recherches scientifiques le contenu des tables primitives.

Reste à expliquer la dernière des tables ci-jointes. Celle-ci contient dans la 2^e colonne les valeurs de $\theta(m)$ calculées par M. BERTELSEN et correspondant aux arguments de la première colonne. Sous l'entête $Gl - \theta$, la 3^e colonne donne les différences des vraies valeurs de $\theta(m)$ et de celles qui sont trouvées à l'aide des énumérations de M. GLAISHER. Enfin la dernière colonne indique, pour des intervalles de 50000 au moins, l'écart de la formule de RIEMANN ou, strictement parlant, l'écart de sa partie continue. Comme je l'ai démontré, cette formule approximative peut être réduite à la forme suivante:

$$P(m) = \frac{lm}{\lfloor 1 \cdot 1 s_2} + \frac{(lm)^2}{\lfloor 2 \cdot 2 s_3} + \frac{(lm)^3}{\lfloor 3 \cdot 3 s_4} + \dots \qquad \left(s_i = \sum_1^\infty n^{-i}\right)$$

et dans mon mémoire sur les nombres premiers [1] j'ai donné les tables nécessaires pour en faciliter le calcul. Quoiqu'on ait raison de voir dans $P(n) + 1$ une expression de $\theta(n)$ un peu plus correcte que $P(n)$, on a préféré d'employer cette dernière pour la comparaison. M. BERTELSEN a lui-même calculé les valeurs de $P(n)$ d'après ma table et, comme le montrera la comparaison, les valeurs trouvées concordent bien avec celles calculées autrement par M. GLAISHER. [2]

A la fin de la table on a ajouté d'une part les valeurs de $\theta(m)$ pour chaque centaine de mille du 10^e million, de l'autre les valeurs de $\theta(m)$ correspondant à 20 millions et à 90 millions. M. BERTELSEN est le premier qui ait fait ces calculs; il a également recalculé la valeur de $\theta(10^8)$ et constaté l'exactitude du résultat indiqué auparavant par M. MEISSEL. Le dernier nombre $\theta(10^9)$ est donné d'après cet auteur.

Ladite table contient donc ce qu'on possède aujourd'hui en fait de déterminations correctes des valeurs de $\theta(m)$.

---

[1] *Undersøgelser angaaende Mængden af Primtal under en given Grænse.* Kgl. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. 6 Række II, 6. 1884.

[2] M. GLAISHER donne, pour $n = 3300000$, $P(n) + 1 = 236961$, tandis que la valeur correcte est 236860.

TAB. I.

Liste des erreurs trouvées dans les tables des diviseurs.

9899* = 19.521

1138027* = 11.103457
1233473 *Pr.* (1233173 = 37.33329)
1249843* = 7^2.23.1109
1250111* = 53.103.229
1270471* *Pr.*
1330001* *Pr.* (1333001 = 1123.1187)
1359233 *Pr.* (1359239 = 7.277.701)
1411679 *Pr.* (1412279 = 11.128389)
1412047 = 7.13.59.263
1420847 *Pr.* (1421147 = 7.97.2093)
1496693 = 11.103.1321
1556257* = 37.42061
1618087 *Pr.* (1628087 = 1069.1523)
1619173* = 151.10723
1623703 = 151.10753
1787471 = 7^2.36479
1793023* *Pr.*
1793029* = 7.256147
1916683 = 193.9931
1936159 *Pr.* (1946159 = 1123.1733)
1979687 = 47.73.577
1984891 *Pr.* (1994891 = 797.2503)
1996399 = 67.83.359

2012603 = 887.2269
2077529 = 131.15859
2501261 = 7.17.21019
2518817 = 7.587.613
2755189 = 163.16903
2763907 = 1297.2131
2768683 *Pr.* (2768983 = 7.449.881)
2868407 *Pr.* (2888407 = 683.4229)
2903591 = 1699.1709
2913833 = 13.29.59.131
2915899 = 7.71.5867
2954939 = 13.227303
2968129 = 1607.1847
2976227 = 547.5441
2976881 *Pr.* (2976581 = 17.311.563)

3543737 *Pr.* (3543437 = 181.19577)

4801751 = 167.28753
4986869 = 29.359.479

7022623 = 1913.3671
7040029 = 1627.4327
7047113 *Pr.*
7047413 = 1997.3529
7110881 = 1861.3821
7141793 = 2617.2729
7220819 = 1877.3847
7224053 = 2143.3371
7324523 = 2467.2969
7384631 = 2179.3389
7385993 = 1933.3821
7430573 = 2089.3557
7489961 = 181.41381
7556273 = 1949.3877
7556573 *Pr.*
7576799 = 149.211.241
7601003 = 2437.3119
7601303 *Pr.*
7614461 = 2539.2999
7680451 = 1811.4241
7790381 = 2311.3371
7802999 = 2179.3581
7810963 = 1847.4229
7820201 = 1831.4271
7845427 = 1901.4127
7855549 = 13.29.67.311
7856147 = 13.604319

7857343 = 13.604411
7860931 = 13.101.5987
7861517 = 2383.3299
7861529 = 13.604733
7863323 = 13.107.5653
7864519 = 13.701.863
7865117 = 13.605009
7866911 = 13.605147
7868107 = 13.605239
7887931 = 367.21493
7927501 = 1879.4219
7933649 = 2341.3389
7941047 = 1831.4337

8057743 = 2617.3079
8068211 = 2617.3083
8083913 = 2617.3089
8136253 = 2617.3109
8162423 = 2617.3119
8167657 = 2617.3121
8167987 = 181.45127
8169797 = 181.45137
8170159 = 181.45139
8209529 = 2617.3137
8277571 = 2617.3163
8282197 = 7.11.29.3709
8288039 = 2617.3167
8293273 = 2617.3169
8318393 = 43.193451
8324677 = 2617.3181
8340379 = 2617.3187
8350847 = 2617.3191
8382251 = 2617.3203
8397953 = 2617.3209
8418889 = 2617.3217
8427193 = 67.73.1723
8429357 = 2617.3221
8450293 = 2617.3229
8456059 = 239.35381
8478889 *Pr.* (8488889 = 233.36433)
8486449 = 277.30637
8491187 = 569.14923
8496181 = 1223.6947
8500853 = 277.30689
8507867 = 2617.3251
8513101 = 2617.3253
8523569 = 2617.3257
8525317 = 877.9721
8528803 = 2617.3259
8536319 = 11.776029
8560207 = 2617.3271
8633483 = 2617.3299
8638717 = 2617.3301
8654419 = 2617.3307
8670121 = 2617.3313
8685823 = 2617.3319
8696291 = 2617.3323
8711993 = 2617.3329
8717227 = 2617.3331
8748631 = 2617.3343
8759099 = 2617.3347
8783693 = 571.15383 (5171)
8783699 = 149.58951 (49)
8788069 = 2017.4357
8790503 = 2617.3359
8795737 = 2617.3361
8821907 = 2617.3371
8827141 = 2617.3373
8869013 = 2617.3389
8874247 = 2617.3391
8916119 = 2617.3407
8931821 = 2617.3413
8984161 = 2617.3433

Le signe * dénote que l'erreur indiquée est connue auparavant.

Pr. désigne un nombre premier.

Le nombre 3026279, auquel Burckhardt a attribué le diviseur 79, est, comme l'a indiqué M. Glaisher, premier.

Dans la page 72 du 1er million les nombres 63 et 64 dans l'en-tête se trouvent au-dessus 00 et 03 au lieu de 97 et 00.

TAB. II.

Nombres calculés des nombres premiers inférieurs à une limite donnée.

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
0·100	9592	0	− 6
·200	17984	0	− 3
·300	25997	0	+ 25
·400	33860	0	− 9
·500	41538	0	− 9
·600	49098	0	− 8
·700	56543	0	+ 13
·800	63951	0	− 7
·900	71274	0	− 9
1·000	78498	0	+ 28
·025	80335	0	
·050	82134	0	+ 3
·075	83905	0	
·100	85714	0	+ 22
·125	87519	0	
·150	89302	+ 1	+ 20
·175	91120	+ 1	
·200	92938	+ 1	− 40
·225	94693	+ 1	
·250	96469	0	− 6
·275	98257	− 1	
·300	100021	− 1	− 3
·325	101802	− 1	
·350	103544	− 2	+ 19
·375	105313	− 3	
·400	107126	− 3	− 27
·425	108843	− 5	
·450	110630	− 5	− 4
·475	112389	− 5	
·500	114155	− 4	− 10
·525	115935	− 4	
·550	117663	− 4	− 8
·575	119414	− 3	
·600	121127	− 3	+ 31
·625	122885	− 2	

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
1·650	124634	− 2	+ 18
·675	126392	− 2	
·700	128141	− 2	− 1
·725	129862	− 2	
·750	131608	− 2	+ 12
·775	133324	− 2	
·800	135072	− 1	+ 22
·825	136813	− 1	
·850	138542	− 1	+ 18
·875	140291	− 1	
·900	142029	− 1	− 8
·925	143754	0	
·950	145502	− 1	− 27
·975	147182	− 1	
2·000	148933	− 2	− 10
·025	150669	− 1	
·050	152382	− 1	− 18
·075	154104	− 1	
·100	155805	0	− 4
·125	157521	0	
·150	159250	0	− 19
·175	160973	0	
·200	162662	0	− 5
·225	164360	0	
·250	166081	0	− 5
·275	167836	0	
·300	169511	0	− 20
·325	171189	0	
·350	172873	0	+ 28
·375	174578	0	
·400	176302	0	+ 3
·425	177988	0	
·450	179684	0	+ 21
·475	181378	0	
·500	183072	0	+ 29

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
2·525	184781	+ 1	
·550	186462	+ 1	+ 29
·575	188157	+ 1	
·600	189880	+ 1	− 3
·625	191557	+ 1	
·650	193256	+ 1	+ 3
·675	194932	+ 1	
·700	196645	+ 1	− 9
·725	198341	+ 1	
·750	199993	+ 1	+ 17
·775	201687	0	
·800	203362	0	+ 17
·825	205095	0	
·850	206789	0	− 45
·875	208449	− 1	
·900	210109	− 1	− 4
·925	211793	0	
·950	213453	0	+ 9
·975	215126	+ 1	
3·000	216816	0	− 1
·100	223492	0	+ 19
·200	230209	0	− 17
·300	236900	0	− 41
·400	243539	0	− 26
·500	250150	0	+ 4
·600	256726	− 1	+ 57
·700	263397	− 1	+ 2
·800	269987	− 1	+ 16
·900	276611	− 1	− 15
4·000	283146	− 1	+ 32
·100	289774	− 1	− 25
·200	296314	− 1	− 4
·300	302824	− 1	+ 36
·400	309335	− 1	+ 66
·500	315948	− 1	− 17
·600	322441	− 1	+ 12
·700	328964	− 1	+ 1
·800	335439	− 1	+ 29
·900	341992	0	− 30
5·000	348513	+ 1	− 65

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
5·100	354971	+ 1	− 46
·200	361407	+ 1	− 13
·300	367900	+ 1	− 45
·400	374362	+ 1	− 53
·500	380800	+ 1	− 46
·600	387202	+ 1	− 10
·700	393606	+ 1	+ 17
·800	399993	+ 1	+ 53
·900	406429	+ 1	+ 33
6·000	412849	+ 1	+ 23
·100	419246	+ 1	+ 28
·200	425648	+ 1	+ 22
·300	432073	+ 1	− 14
·400	438410	+ 1	+ 32
·500	444757	+ 1	+ 61
·600	451159	+ 1	+ 30
·700	457497	+ 1	+ 56
·800	463872	+ 1	+ 39
·900	470283	+ 1	− 20
7·000	476648	+ 1	− 39
.050	479864	+ 3	− 84
·100	483015	+ 3	− 66
·150	486167	+ 5	− 50
·200	489319	+ 5	− 35
·250	492494	+ 6	− 44
·300	495666	+ 6	− 53
·350	498797	+ 7	− 21
·400	501962	+ 9	− 25
·450	505147	+ 10	− 50
·500	508261	+ 11	− 5
·550	511417	+ 11	− 4
·600	514565	+ 12	+ 4
·650	517740	+ 13	− 17
·700	520910	+ 14	− 33
·750	524026	+ 14	+ 3
·800	527154	+ 15	+ 25
·850	530334	+ 19	− 5
·900	533506	+ 27	− 29
·950	536652	+ 30	− 28
8·000	539777	+ 30	− 7

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
8·050	542898	+ 30	+ 16
·100	546024	+ 33	+ 33
·150	549150	+ 34	+ 49
·200	552319	+ 39	+ 21
·250	555479	+ 40	+ 1
·300	558597	+ 44	+ 21
·350	561766	+ 46	— 11
·400	564877	+ 49	+ 14
·450	567967	+ 51	+ 59
·500	571119	+ 52	+ 41
·550	574274	+ 57	+ 19
·600	577439	+ 58	— 15
·650	580566	+ 60	— 12
·700	583714	+ 64	— 31
·750	586850	+ 67	— 39
·800	590006	+ 71	— 68
·850	593112	+ 73	— 48
·900	596222	+ 75	— 33
·950	599355	+ 77	— 43

m en millions	$\theta(m)$	$Gl - \theta$	$P - \theta$
9·000	602489	+ 78	— 54
·100	608672		+ 5
·200	614917		— 3
·300	621177		— 30
·400	627400		— 23
·500	633578		+ 24
·600	639851		— 28
·700	646054		— 15
·800	652265		— 13
·900	658445		+ 16
10·000	664579		+ 87
20·000	1270607		— 37
90·000	5216954		+ 227
100·000	5761455		+ 96
1000·000	50847478		— 24