SUR LES MAXIMA ET LES MINIMA DES INTÉGRALES DOUBLES.

Second Mémoire

PAR

GUSTAF KOBB
à STOCKHOLM.

Dans un mémoire précédent[1] nous avons étudié la question de la recherche des maxima et des minima d'une intégrale double dans les cas où les variations de la valeur de l'intégrale sont complètement libres; c'est à dire, la classe de problèmes qu'on appelle des maxima ou des minima absolus. Il y a un autre genre de questions, où l'on se propose de chercher les maxima et les minima d'une certaine intégrale sous la condition que la valeur d'une ou de plusieurs autres intégrales reste invariable quand la valeur de la première est variée. Alors les variations de la première intégrale ne sont plus libres. Dans ce mémoire, nous allons traiter la classe de problèmes qu'on appelle des maxima et des minima relatifs.

Soient

$$(1)\qquad I^0 = \iint\limits_C F^0(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')\,du\,dv,$$

$$(2)\qquad I' = \iint\limits_C F'(x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'')\,du\,dv$$

[1] *Sur les maxima et les minima des intégrales doubles.* Acta mathematica, tome 16, p. 65.

deux intégrales doubles, où comme auparavant

$$x' = \frac{\partial x}{\partial u}, \qquad y' = \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad z' = \frac{\partial z}{\partial u},$$

$$x'' = \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad y'' = \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad z'' = \frac{\partial z}{\partial v}$$

et F^0 et F' sont des fonctions régulières et bien définies. Les limites des deux intégrales sont les mêmes. Nous nous proposons de trouver une surface qui rende la première intégrale un maximum ou un minimum sous les conditions que la seconde conserve une valeur donnée et que la surface passe par un certain contour C dans l'espace. Nous nous bornerons pourtant à considérer des fonctions F^0 et F' telles, que les valeurs des intégrales soient indépendantes du choix des variables auxiliaires u et v.

Nous avons trouvé auparavant que, dans ce cas, les fonctions F^0 et F' doivent satisfaire aux relations I (4) [1]

$$F = x' \frac{\partial F}{\partial x'} + y' \frac{\partial F}{\partial y'} + z' \frac{\partial F}{\partial z'},$$

$$0 = x'' \frac{\partial F}{\partial x'} + y'' \frac{\partial F}{\partial y'} + z'' \frac{\partial F}{\partial z'},$$

$$F = x'' \frac{\partial F}{\partial x''} + y'' \frac{\partial F}{\partial y''} + z'' \frac{\partial F}{\partial z''},$$

$$0 = x' \frac{\partial F}{\partial x''} + y' \frac{\partial F}{\partial y''} + z' \frac{\partial F}{\partial z''}.$$

Il faut d'abord montrer qu'il existe des variations de la surface

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

pour lesquelles la seconde intégrale conserve sa valeur. Si nous étendons l'intégration sur la surface

$$x + \xi, \qquad y + \eta, \qquad z + \zeta$$

[1] Ces citations se rapportent à mon premier mémoire *Sur les maxima et les minima des intégrales doubles.*

nous obtenons la valeur de la variation correspondante de l'intégrale I' suivant I (16)

$$\Delta I' = \iint G' w\, du\, dv + (\ldots.)_2 + \ldots \tag{3}$$

en employant les mêmes notations qu'auparavant. Posons maintenant

$$\xi = k_1\xi_1 + k_2\xi_2, \qquad \eta = k_1\eta_1 + k_2\eta_2, \qquad \zeta = k_1\zeta_1 + k_2\zeta_2 \tag{4}$$

où k_1 et k_2 sont deux constantes quelconques et $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$ des fonctions arbitraires qui s'annullent aux limites. Ensuite

$$w_i = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} \xi_i + \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix} \eta_i + \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix} \zeta_i, \qquad (i=1,2)$$

$$M_i' = \iint G' w_i\, du\, dv.$$

On aura

$$w = k_1 w_1 + k_2 w_2$$

et

$$\Delta I' = k_1 M_1' + k_2 M_2' + (\ldots.)_2 + \ldots.$$

Les fonctions M_1 et M_2 sont complètement déterminées, aussitôt que nous avons fixé $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2$. Pour que l'intégrale I' conserve sa valeur, il faut que

$$0 = k_1 M_1' + k_2 M_2' + (\ldots.)_2 + \ldots.$$

Supposons

$$M_2' \gtrless 0.$$

Cela est toujours possible, sauf le cas, où

$$G' = 0.$$

Mais cette équation est une des conditions nécessaires pour que l'intégrale I' soit un maximum ou un minimum. C'est, par conséquent, un cas particulier qu'il faut exclure.

Si M_2' n'est pas nul, on a, suivant un théorème connu de la théorie des fonctions

$$k_2 = -\frac{M_1'}{M_2'} k_1 + k_1 \mathfrak{P}(k_1).$$

En substituant cette valeur dans les expressions (4), nous avons de variations qui ne changent pas la valeur de l'intégrale I'.

Nous avons ensuite la valeur de la variation de l'intégrale I^0:

$$\begin{aligned}\Delta I^0 &= \iint G^0 w\,du\,dv + (\ldots.)_2 \\ &= k_1 M_1^0 + k_2 M_2^0 + (\ldots.)_2, \\ M_i^0 &= \iint G^0 w_i\,du\,dv\end{aligned}$$

ou, en employant la valeur trouvée de k_2,

$$\Delta I^0 = k_1\left(M_1^0 - \frac{M_1'}{M_2'} M_2^0\right) + (k_1)_2 + \ldots. \tag{5}$$

Mais pour que ΔI^0 conserve toujours le même signe, il faut que le coefficient de k_1 s'annulle. Ainsi

$$M_1^0 - \frac{M_1'}{M_2'} M_2^0 = 0$$

ou

$$\frac{M_1^0}{M_1'} = \frac{M_2^0}{M_2'}. \tag{6}$$

Le premier membre dépend de ξ_1, η_1, ζ_1 et le second de ξ_2, η_2, ζ_2. Le quotient a donc une valeur constante, indépendante des variations, que nous appelons λ. Alors

$$M_1^0 - \lambda M_1' = 0$$

ou

$$\iint (G^0 - \lambda G') w_1\,du\,dv = 0$$

d'où résulte l'équation aux dérivées partielles du second ordre [1]

$$G = G^0 - \lambda G' = 0 \tag{7}$$

qui est analogue à celle que nous avons trouvée dans le cas des maxima et des minima absolus.

---

[1] Dans la suite une majuscule signifie toujours une expression de la forme

$$A^0 - \lambda A'.$$

Pour ramener la variation totale de l'intégrale I' ou de l'intégrale I^0 à la forme (3), nous sommes obligés de supposer ou bien que la surface primitive ne possède pas de lignes de discontinuité, c'est à dire des lignes le long desquelles la normale de la surface change brusquement sa direction, ou bien que les variations s'annullent le long de celles-ci. Cependant il est évident que chaque partie régulière de la surface doit satisfaire à l'équation

$$G = 0$$

où λ a toujours la même valeur. En effet, nous pouvons varier la surface, de manière qu'une partie régulière seule soit variée, et que le reste conserve sa forme. Alors cette partie doit satisfaire à l'équation (7).

Ensuite nous avons vu que la valeur de λ est indépendante des variations. Mais parmi celles-ci il en existe certainement, qui ne varient qu'une partie régulière de la surface. Mais la valeur correspondante de λ doit être la même, si toute la surface est variée. Par conséquent, la valeur de λ est la même pour chaque partie de la surface qui peut être variée.

Supposons maintenant qu'il existe des lignes de discontinuité sur la surface primitive et que les variations ne s'annullent pas suivant celles-ci. Alors la variation totale des intégrales n'est pas réductible à la forme (3). Nous avons déjà traité la même question pour le cas des maxima ou des minima absolus. Ici on peut procéder de la même manière et on trouve en posant

$$F = F^0 - \lambda F^{(1)}$$

que les expressions

$$(8) \qquad \frac{\partial F}{\partial x'}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial x''}\frac{\partial u}{\partial s}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial y''}\frac{\partial u}{\partial s}, \qquad \frac{\partial F}{\partial z'}\frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\partial F}{\partial z''}\frac{\partial u}{\partial s}$$

doivent avoir les mêmes valeurs aux deux côtés de la ligne de discontinuité, pour que l'intégrale I^0 puisse être un maximum ou un minimum. C'est, par conséquent, encore une condition nécessaire.

Nous avons vu que la surface primitive doit satisfaire à l'équation (7)

$$G = G^0 - \lambda G' = 0.$$

Supposons que nous ayons trouvé une solution de cette équation; il nous faut puis montrer, qu'elle donne un vrai maximum ou un vrai minimum ou que la variation totale ΔI^0 pour chaque variation, qui ne change pas la valeur de la seconde intégrale, conserve le même signe. Nous suivons la même marche que dans le cas des maxima et des minima absolus.

Ainsi, il se présente d'abord la question: Ayant trouvé une solution de l'équation (7) qui passe par le contour donné, est-ce qu'il existe une autre, qui à chaque point est infiniment voisine de la première? Il faut pourtant généraliser un peu la question. La quantité λ est une constante, dont la valeur est déterminée par la condition que la seconde intégrale I' conserve toujours la même valeur. Par conséquent, la valeur de λ n'est pas la même pour deux surfaces infiniment voisines. Il faut donc considérer λ comme une quantité variable, quand nous voulons répondre à la question énoncée.

On voit immédiatement qu'à la même surface il ne peut pas correspondre plusieurs valeurs de λ. On aurait

$$G^0 - \lambda G' = 0,$$

$$G^0 - \lambda_1 G' = 0$$

d'où suit

$$(\lambda - \lambda_1) G' = 0$$

et

$$\lambda = \lambda_1$$

car nous avons déjà exclu le cas

$$G' = 0.$$

Soit maintenant

$$x + \xi, \qquad y + \eta, \qquad z + \zeta$$

une nouvelle solution de l'équation (7), où pourtant la valeur de λ est changée en $\lambda + \lambda'$ on aura

$$G(x + \xi, y + \eta, z + \zeta, \lambda + \lambda') - G(x, y, z, \lambda) = 0.$$

Cette différence peut s'ecrire

$$G^0(x + \xi, y + \eta, z + \zeta) - \lambda G'(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$$
$$- [G^0(x, y, z) - \lambda G'(x, y, z)] - \lambda' G'(x + \xi, y + \eta, z + \zeta)$$

ou

$$\Delta G - \lambda' G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0$$

si nous entendons avec le symbole d'opération Δ, que λ soit regardé comme une constante.

Mais au lieu de considérer l'équation unique

$$G = 0$$

il vaut mieux considérer le système équivalent I (15)

$$(9)\qquad \begin{cases} \Gamma_1 = \Gamma_1^0 - \lambda \Gamma_1' = \dfrac{\partial F}{\partial x} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x''}\right) = \alpha G, \\ \Gamma_2 = \Gamma_2^0 - \lambda \Gamma_2' = \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y''}\right) = \beta G, \\ \Gamma_3 = \Gamma_3^0 - \lambda \Gamma_3' = \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) - \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z''}\right) = \gamma G. \end{cases}$$

De la première de ces équations nous aurons

$$\Gamma_1(x+\xi, y+\eta, z+\zeta, \lambda+\lambda') - \Gamma_1(x, y, z, \lambda)$$
$$= \Delta \Gamma_1 - \lambda' \Gamma_1'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta)$$

où en observant que

$$\Gamma_1' = \alpha G',$$

le second membre devient

$$\Delta \Gamma_1 - \lambda' \alpha G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0.$$

De la même manière nous formons les deux autres différences

$$\Delta \Gamma_2 - \lambda' \beta G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0,$$

$$\Delta \Gamma_3 - \lambda' \gamma G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) = 0.$$

Multiplions la première de ces équations par ξ, la seconde par η, la troisième par ζ et ajoutons; ensuite, multiplions par $du\,dv$ et intégrons dans l'intérieur du contour donné.

Alors nous aurons l'intégrale

$$(10) \quad \iint \{\xi \Delta\Gamma_1 + \eta \Delta\Gamma_2 + \zeta \Delta\Gamma_3 - \lambda' G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) w\} du dv,$$

$$w = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta.$$

Evidemment, cette intégrale double est nulle. Nous allons la transformer. D'abord on remarquera que les variations ξ, η, ζ, ne sont pas libres, elles sont assujetties à la condition que la seconde intégrale I' conserve sa valeur. Ainsi

$$\Delta I' = 0$$

ou, en arrêtant le développement aux termes du second ordre,

$$(11) \qquad 0 = \iint \{G'w + \Sigma B_{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu\} du dv$$

où τ_μ et τ_ν désignent les variations ξ, η, ζ et leurs dérivées du premier ordre. Les coefficients $B_{\mu\nu}$ de la forme quadratique sont des fonctions connues de x, y et z. Ensuite,

$$\iint \lambda' G'(x+\xi, y+\eta, z+\zeta) w du dv = \iint (\lambda' G'w + \lambda' \Sigma B'_{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu) du dv.$$

Enfin, nous avons montré dans le mémoire précédent, que, si nous arrêtons le développement de $\Delta\Gamma_1$, $\Delta\Gamma_2$ et $\Delta\Gamma_3$ aux termes du second ordre, l'intégrale

$$\iint \{\xi \Delta\Gamma_1 + \eta \Delta\Gamma_2 + \zeta \Delta\Gamma_3\} du dv$$

peut être transformée dans la forme suivante

$$\iint \{\Sigma A_{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu + \Sigma A'_{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu\} du dv.$$

La première forme quadratique provient uniquement des termes du premier ordre, ses coefficients $A_{\mu\nu}$ sont indépendants de τ_μ et τ_ν et ils sont des fonctions connues de x, y, z. Dans la seconde, au contraire, les coefficients $A'_{\mu\nu}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de τ_μ et τ_ν. Maintenant l'intégrale (10) peut s'écrire

$$(12) \qquad 0 = \iint \{\Sigma A_{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu + \Sigma A'_{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu - \lambda' G'w - \lambda' \Sigma B'_{\mu\nu} \tau_\mu \tau_\nu\} du dv.$$

En multipliant l'équation (11) par λ' et en l'ajoutant à l'équation (12), nous aurons

$$(13) \qquad 0 = \iint \{\Sigma [A_{\mu\nu} + A'_{\mu\nu} + \lambda'(B_{\mu\nu} - B'_{\mu\nu})] \tau_\mu \tau_\nu\} du dv.$$

Il s'agit de voir, si cette équation peut être satisfaite par des valeurs de ξ, η, ζ qui changent, réellement, la surface primitive. Il existe, évidemment, une infinité de manières à varier la surface, de sorte qu'elle coïncide avec elle-même.

Nous avons vu qu'il suffit de poser

$$\xi = al, \qquad \eta = bl, \qquad \zeta = cl$$

où a, b, c sont les cosinus directeurs de la normale de la surface primitive au point (x, y, z).

Par cette substitution la forme quadratique sous les signes sommes devient une forme quadratique de l, $\frac{\partial l}{\partial u}$ et $\frac{\partial l}{\partial v}$ ou de $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3$.

Ainsi, on aura de (13)

$$(14) \qquad 0 = \iint \{\Sigma (\bar{A}_{\mu\nu} + \bar{A}'_{\mu\nu}) \tau'_\mu \tau'_\nu\} du dv.$$

Les $\bar{A}_{\mu\nu}$ sont indépendantes de l et de ses dérivées et proviennent uniquement des $A_{\mu\nu}$ de l'équation (13). Les $\bar{A}'_{\mu\nu}$ sont des fonctions linéaires et homogènes de l, $\frac{\partial l}{\partial u}$, $\frac{\partial l}{\partial v}$ et de λ'.

Dans le mémoire précédent, nous avons vu que si la forme quadratique

$$\Sigma \bar{A}_{\mu\nu} \tau'_\mu \tau'_\nu$$

est définie, on peut toujours fixer une limite de l et de ses dérivées du premier ordre ainsi que de λ', de sorte que pour des valeurs de ces variables, qui sont inférieures à cette limite, la forme quadratique

$$\Sigma (\bar{A}_{\mu\nu} + \bar{A}'_{\mu\nu}) \tau'_\mu \tau'_\nu$$

soit aussi une forme définie.

Mais alors, il n'existe pas d'autre solution de l'équation (14) que

$$\tau'_1 = \tau'_2 = \tau'_3 = 0.$$

Par conséquent, la surface déjà trouvée est unique, c'est à dire, il n'existe pas d'autre surface, qui satisfait à une équation

$$G = 0$$

où la valeur de λ diffère très peu de celle de l'équation primitive, qui passe par le contour donné et pour laquelle les valeurs des coordonnées et de leurs premières dérivées dans chaque point diffèrent très peu des valeurs dans les points correspondants de la surface primitive.

Ainsi, il faut calculer la forme quadratique

$$\Sigma \bar{A}_{\mu\nu} \tau'_\mu \tau'_\nu$$

ou plutôt l'intégrale double

$$\iint \{\Sigma \bar{A}_{\mu\nu} \tau'_\mu \tau'_\nu\} du\, dv \tag{15}$$

pour reconnaître, si la forme quadratique sous les signes sommes est une forme définie, ou non. Nous avons vu que la forme quadratique en question provient uniquement des termes du premier ordre de l'expression

$$\xi \Delta \Gamma_1 + \eta \Delta \Gamma_2 + \zeta \Delta \Gamma_3.$$

Par conséquent, l'intégrale (15) n'est autre chose que l'intégrale

$$\iint \{\xi \delta \Gamma_1 + \eta \delta \Gamma_2 + \zeta \delta \Gamma_3\} du\, dv. \tag{16}$$

Dans la seconde partie du mémoire précédent nous avons fait le calcul d'une intégrale semblable, mais ce calcul étant assez pénible, il suffit de se rappeler les résultats qu'on y a obtenus. D'après les formules II (6), II (7) et II (17) on aura pour l'intégrale (16) l'expression

$$\iint \left\{ F_1 \left(\frac{\partial w}{\partial u}\right)^2 + F_2 \left(\frac{\partial w}{\partial v}\right)^2 + 2F_3 \frac{\partial w}{\partial u} \frac{\partial w}{\partial v} + F_4 w^2 \right\} du\, dv \tag{17}$$

où

$$w = \alpha \xi + \beta \eta + \gamma \zeta,$$

$$\alpha = \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}, \qquad \beta = \begin{vmatrix} z' & z'' \\ x' & x'' \end{vmatrix}, \qquad \gamma = \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}.$$

Ensuite, F_1, F_2, F_3 et F_4 sont des facteurs, définis par les formules I (8), II (13) et II (14). Ils sont tous de la forme

$$F_1 = F_1^0 - \lambda F_1'.$$

On voit aisément que l'on a

$$w = k.l,$$

$$k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

et, par conséquent, que w et l s'annullent en même temps.

La forme quadratique sous les signes sommes est définie, si dans le contour donné

$$(18) \qquad \begin{gathered} F_1 F_2 - F_3^2 > 0, \\ F_1 F_4 > 0, \end{gathered}$$

ou, la dernière condition n'étant pas remplie, s'il est possible de trouver deux fonctions finies et continues B et B_1 de sorte que

$$(19)\ F_1\left\{(F_1 F_2 - F_3^2)\left(\frac{\partial B}{\partial u} + \frac{\partial B_1}{\partial v} + F_4\right) - F_1 B_1^2 + 2F_3 B_1 B - F_2 B^2\right\} > 0.$$

Nous avons transformé cette condition et nous avons vu qu'elle est toujours remplie, s'il existe une intégrale finie et continue de l'équation

$$(20) \qquad -\frac{\partial}{\partial u}\left(F_1\frac{\partial U}{\partial u} + F_3\frac{\partial U}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(F_2\frac{\partial U}{\partial v} + F_3\frac{\partial U}{\partial u}\right) + F_4 U = 0$$

qui ne s'annulle pas dans l'intérieur du contour d'intégration de l'intégrale (17). Ainsi, cette condition est suffisante mais nous n'avons pas démontré qu'elle est nécessaire comme dans le cas des maxima et des minima absolus. La démonstration appliquée dans ce cas n'est plus valable, car les variations ne sont pas libres; elles sont assujetties à la condition qu'elles ne changent pas la valeur de la seconde intégrale I'. Nous laissons, pourtant, ce point pour le moment.

Supposons, maintenant, que les conditions (18) et (19) soient remplies. Alors la forme quadratique sous les signes sommes de (17) est définie, et d'après ce que nous avons déjà dit, la surface est unique dans la signification que nous avons donné à ce mot. Mais, comme les fonctions

F_1, F_2, F_3, F_4 sont des fonctions continues de x, y, z et de leurs dérivées, on voit, aisément, que les conditions précédentes sont aussi remplies pour chaque autre surface qui diffère très peu de la surface primitive. Ainsi, nous pouvons construire autour de celle-ci une certaine aire, de sorte que, si nous y prenons un contour arbitraire et qu'il existe une surface qui satisfasse à une équation

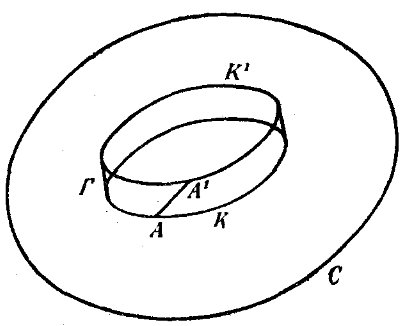
$$G = 0$$

qui passe par ce contour et qui diffère très peu de la surface primitive, cette nouvelle surface soit aussi unique. La valeur de λ dans l'équation $G = 0$ n'est pas nécessairement la même que dans l'équation qui nous donne la surface primitive; elle peut aussi en différer un peu.

Dans le cas des maxima et minima absolus, nous avons donné encore une condition pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum, qui nous servait à distinguer un maximum d'un minimum. Dans le cas actuel, nous allons procéder de la même manière. Nous appelons chaque équation

$$G = 0,$$

où λ diffère très peu de la valeur primitive, une équation G et aussi chaque surface, qui satisfait à une telle equation, une surface G. Sur la surface G, qui passe par le contour donné C nous traçons un certain contour fermé K. Par ce contour K nous faisons passer une surface quelconque et sur cette surface Γ nous traçons un autre contour K', très voisin du contour K et qui ne le coupe pas, et supposons qu'il existe une surface G, qui passe par K'. Il existe évidemment une infinité de tels contours K' sur la surface Γ. Nous avons vu qu'il n'est pas nécessaire de supposer que les contours K et K' et la surface Γ soient réguliers. Ils peuvent aussi être composés d'un nombre fini de parties régulières. Il faut seulement que les deux contours ne se coupent pas.



Considérons l'intégrale I^0 étendue sur la partie extérieure du contour K de la surface primitive, sur la partie de la surface Γ, qui est située entre les contours K et K', et, enfin, sur la surface G, qui passe par le contour K'. Cette intégrale, que nous appelons $\bar{I}^0$, peut être considérée comme une variation de l'intégrale I^0, étendue sur la surface primitive. D'après les formules III (1) et III (2), on aura

$$(21) \qquad \Delta I^0 = \bar{I}^0 - I^0 = \int_K \mathcal{E}^0 l \sin \omega \, ds + \iint_K G^0 w \, du \, dv + (l)_2 .$$

Ici, la fonction $\mathcal{E}^0$ est définie par les formules III (16) ou III (22). Ensuite, l est la longeur de la projection de la distance AA' sur le plan tangent de la surface Γ dans le point A, ω l'angle que fait cette projection avec la tangente de K dans ce point, et enfin ds l'élément de l'arc de K.

Mais les variations de la surface primitive doivent être telles, que la seconde intégrale I' ne change pas sa valeur. Alors, en formant la même différence pour l'intégrale I', on aura

$$(22) \qquad 0 = \Delta I' = \int_K \mathcal{E}' l \sin \omega \, ds + \iint_K G' w \, du \, dv + (l)_2 + \ldots$$

Multiplions l'équation (22) par $-\lambda$ et ajoutons le produit à l'équation (21). Nous aurons

$$\Delta I^0 = \int_K (\mathcal{E}^0 - \lambda \mathcal{E}') l \sin \omega \, ds + \iint_K (G^0 - \lambda G') w \, du \, dv + (l)_2 + \ldots$$

ou, en remarquant que

$$G^0 - \lambda G' = G = 0$$

et en introduisant la notation

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^0 - \lambda \mathcal{E}',$$

$$(23) \qquad \Delta I^0 = \int_K \mathcal{E} l \sin \omega \, ds + (l)_2 + \ldots$$

Mais, pour que la surface primitive rende, réellement, l'intégrale I^0 un maximum ou un minimum, il faut que pour chaque contour K et chaque surface Γ la différence ΔI^0 ne change jamais son signe. Ainsi

$$\Delta I^0 < 0 \quad \text{pour un maximum}$$

$$\Delta I^0 > 0 \quad \text{pour un minimum.}$$

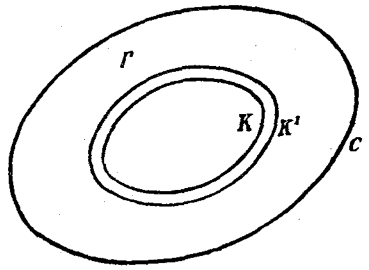
Pour des valeurs assez petites de l le signe du second membre (23) dépend du signe de son premier terme, l'intégrale

$$\int_K \mathfrak{E} l \sin \omega \, ds,$$

et pour que cette intégrale conserve toujours le même signe, quels que soient le contour K et la surface Γ, il faut que la fonction $\mathfrak{E}$ ne change jamais son signe. La nouvelle condition nécessaire pour l'existence d'un maximum ou d'un minimum est, par conséquent, pour le cas d'un maximum, que la fonction $\mathfrak{E}$ ne devienne jamais positive et pour le cas d'un minimum que la fonction $\mathfrak{E}$ ne devienne jamais négative.

D'après la dernière forme que nous avons donnée à la fonction $\mathfrak{E}$ III (22), il suit que, la condition III (23) remplie, elle ne s'annulle que si la surface Γ est tangente à la surface G le long du contour K. Dans le cas où la condition III (23) n'est pas remplie, il faut faire une recherche spéciale.

Supposons maintenant que les conditions (18) et (19) soient remplies et que la fonction $\mathfrak{E}$ ne change pas son signe. Alors, nous pouvons entourer la surface primitive d'une aire telle que dans celle-ci pour chaque contour il n'existe qu'une seule surface G, qui diffère très peu de la surface primitive et en la resserrant, s'il le faut, telle que la fonction $\mathfrak{E}$ conserve le même signe pour ces nouvelles surfaces. Certainement, cela arrive, si la condition III (23) est remplie.



Imaginons, ensuite, dans l'aire A une surface Γ, régulière ou du moins composée d'un nombre fini de surfaces régulières qui passe par le contour primitif C, et sur Γ deux contours K et K' très voisins qui ne se coupent pas. Supposons que les deux contours soient tels qu'il existe des surfaces G, qui passent par ces contours et qui diffèrent très peu de la surface primitive. Évidemment K et K' ne sont pas arbitraires, mais il en existe toujours une infinité. Cela résulte immédiatement d'une considération géometrique. Comme la surface Γ est située dans l'aire A, il suit qu'il n'existe qu'une seule surface G pour chacun des deux contours K et K'.

Considérons, ensuite, l'intégrale I^0 étendue d'abord sur la partie de Γ, au dehors de K', puis sur la surface G qui passe par K'. En appelant Ω la partie de Γ dans l'intérieure de K et $\delta\Omega$ la partie entre K et K', nous désignons notre intégrale I^0 par

$$I^0(\Omega + \delta\Omega).$$

De même, nous désignerons l'intégrale I^0, étendue sur la partie de Γ au dehors de K et sur la surface G qui passe par K, par

$$I^0(\Omega).$$

D'après ce que nous avons dit, les deux fonctions $I^0(\Omega + \delta\Omega)$ et $I^0(\Omega)$ sont complètement définies. On aura donc

$$I^0(\Omega + \delta\Omega) - I^0(\Omega) = \iint\limits_{K'} F^0 du\,dv - \iint\limits_{K} F^0 du\,dv - \iint\limits_{K}^{K'} F^0 du\,dv.$$

On voit, facilement, que le second membre peut s'écrire de la manière suivante

$$(24)\quad I^0(\Omega + \delta\Omega) - I^0(\Omega) = -\int\limits_K \mathfrak{E}^0 l \sin\omega\, ds - \iint\limits_K G^0 w\, du\, dv + (l)_2 + \ldots$$

Formons la même différence pour la seconde intégrale I'. Nous aurons

$$I'(\Omega + \delta\Omega) - I'(\Omega) = -\int\limits_K \mathfrak{E}' l \sin\omega\, ds - \iint\limits_K G' w\, du\, dv + (l)_2.$$

Or, l'intégrale I' doit toujours conserver la même valeur pour toutes les variations en question. Par conséquent, on a

$$(25)\qquad 0 = -\int\limits_K \mathfrak{E}' l \sin\omega\, ds - \iint\limits_K G' w\, du\, dv + (l)_2 + \ldots$$

Multiplions l'équation (25) par la valeur de λ qui appartient à la surface

G qui passe par K, et ajoutons le produit à l'équation (24). L'intégrale double disparaît, et il reste

$$(26) \qquad I^0(\Omega + \delta\Omega) - I^0(\Omega) = -\int_K \mathfrak{G} l \sin\omega\, ds + (l)_2 + \dots$$

Supposons que la fonction $\mathfrak{G}$ ne devienne jamais négative. Alors, il suit de l'équation (26) que l'intégrale $I^0(\Omega)$ va toujours en décroissant, si Ω va en croissant et, par conséquent, que $I^0(\Omega)$ atteint sa plus petite valeur, quand le contour K atteint le contour primitif C. Mais, alors, l'intégrale $I^0(\Omega)$ devient

$$I^0(\Omega) = \iint_G F^0 du\, dv,$$

où l'intégration est étendue sur la surface primitive G qui passe par le contour C. De l'autre côté on a

$$I^0(0) = \iint_\Gamma F^0 du\, dv$$

et par conséquent

$$(27) \qquad \iint_G F^0 du\, dv < \iint_\Gamma F^0 du\, dv.$$

Ce raisonnement exige que la fonction $\mathfrak{G}$ ne soit pas identiquement nulle sur la surface Γ, mais, il est facile de s'assurer que cela n'est pas possible, en suivant les mêmes considérations que dans le cas des maxima et des minima absolus.

On démontre aussi de la même manière qu'auparavant que l'inégalité (27) subsiste encore, si la surface Γ est tout à fait irrégulière, pourvue que les intégrales I^0 et I' aient un sens defini. L'existence d'un minimum est donc établie. De la même manière on démontre l'existence d'un maximum si la fonction $\mathfrak{G}$ ne devient jamais positive. Ainsi, nous sommes arrivés au résultat suivant: L'intégrale I^0 devient un maximum ou un minimum en même temps que l'intégrale I' a une valeur donnée, si les conditions (18) et (19) sont remplies et que la fonction $\mathfrak{G}$ conserve le même signe pour la surface donnée par l'équation

$$G = 0$$

à savoir, un minimum si la function $\mathcal{E}$ ne devient jamais négative et un maximum si la fonction $\mathcal{E}$ ne devient jamais positive.

Il y a, pourtant, une circonstance à se rappeler. La démonstration précédente repose, évidemment, sur le fait que la fonction $I^0(\Omega)$ est complètement déterminée, quand le contour K est fixé. Mais, cela n'est vrai que quand nous nous bornons à considérer de telles surfaces G, où non seulement les valeurs des coordonnées d'un point quelconque mais aussi de leurs dérivées du premier ordre diffèrent très peu des valeurs dans le point correspondant de la surface primitive. Par conséquent, nous n'avons établi la propriété maximale ou minimale de la surface que dans le cas où non seulement les variations mais aussi leurs dérivées du premier ordre sont infiniment petites.

Jusqu'ici, nous n'avons pas imposé aux variations ξ, η, ζ de la surface cherchée d'autres restrictions que celle que la valeur de la seconde intégrale I' doit être invariable. Mais, il est facile d'en imposer d'autres. Ainsi, on peut demander que la surface cherchée soit renfermée dans une certaine partie de l'espace, limitée par une surface fermée. Alors, il peut arriver que la surface cherchée rencontre la surface de la limite. Dans ses recherches sur le célèbre problème isopérimétrique dans le plan, Steiner a énoncé les deux théorèmes suivants.

»Si la courbe cherchée coïncide dans une partie finie avec la courbe de limite, les deux courbes se touchent dans les deux points de rencontre.»

»Si la courbe cherchée rencontre la courbe de limite dans un seule point, et que l'on néglige les variations où la courbe ne rencontre pas la limite, les tangentes des deux branches forment dans le point de rencontre des angles égaux avec la tangente de la courbe de limite.»

Steiner a trouvé ces deux théorèmes par une méthode synthétique, et il prétend même que le Calcul des Variations ne possède pas les moyens pour les démontrer. M. Weierstrass a réfuté cela, en démontrant deux théorèmes généraux, dans la théorie des maxima et des minima des intégrales simples, dont ceux de Steiner sont des cas spéciaux.

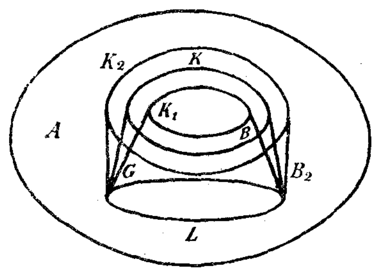
Nous allons démontrer pour les intégrales doubles deux théorèmes analogues aux théorèmes de Steiner.

Soit I^0 l'intégrale double dont nous cherchons le maximum ou le minimum sous les conditions que l'intégrale I' conserve sa valeur et que la surface cherchée reste toujours dans l'intérieure d'une certaine partie de l'espace, limitée par la surface fermée A. Supposons que nous ayons trouvé une surface qui satisfait à l'équation

$$G = 0$$

et que cette surface G coupe la surface A suivant un certain contour K qui peut être fermé ou non.

Prenons sur la surface A deux contours K_1 et K_2 très voisins de K et qui ne le coupent pas, ensuite sur la surface G un contour L. Faisons passer par L et K_1 et par L et K_2 deux surfaces arbitraires très voisines de G.



Sur la surface G entre L et K il peut y avoir des lignes de discontinuité, mais alors, il faut que suivant celles-ci les conditions (8) soient remplies.

Calculons maintenant la variation de l'intégrale I^0, si nous intégrons sur la surface B_2 et la partie de A qui est située dans l'intérieure de K_2, au lieu d'intégrer sur la surface G et la partie de A correspondante.

D'après les formules (21), (22) et (23) on aura

$$(28) \qquad \Delta I^0 = \int_K \mathcal{E}\, l \sin\omega\, ds + (l)_2 + \ldots;$$

de même si nous remplaçons B_2 par B_1

$$(29) \qquad \Delta I^0 = \int_K \mathcal{E}\, l_1 \sin\omega_1\, ds + (l_1)_2 + \ldots$$

Supposons, pour fixer les idées, qu'il s'agisse d'un minimum. Alors, nous avons trouvé comme condition nécessaire que la fonction $\mathcal{E}$ ne devienne jamais négative. On a ensuite dans (28)

$$l > 0, \qquad \sin\omega > 0,$$

mais alors, on voit qu'en posant dans (29)

$$l_1 > 0$$

on a nécessairement

$$\sin \omega_1 < 0.$$

Par conséquent, pour que la variation totale ΔI^0 ne change pas son signe, il faut que nous ayons

$$\mathcal{E} = 0$$

le long du contour K. Mais nous avons vu que si la condition III (23) est remplie

$$F_3^{(\bar{\mu})2} - F_1^{(\bar{\mu})} F_2^{(\bar{\mu})} < 0$$

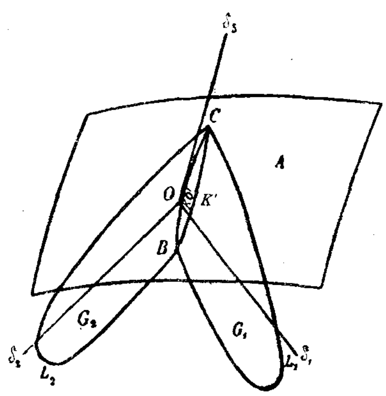
la fonction $\mathcal{E}$ ne s'annulle que pour le cas où les deux surfaces G et A sont tangentes le long du contour K.

Voilà, justement, la généralisation du premier théorème de STEINER au cas des intégrales doubles.

Passons maintenant au second théorème. Supposons que nous ayons trouvé comme solution de notre problème que la surface G, qui satisfait à l'équation

$$G = 0,$$

soit composée de deux parties différentes G_1 et G_2 qui se coupent le long d'une certaine courbe K sur la surface A. Prenons deux points quelconques B et C de la courbe K et traçons sur A entre B et C une nouvelle courbe K'. Ensuite, sur les surfaces G_1 et G_2 deux courbes L_1 et L_2. Faisons passer par L_1 et K' une surface arbitraire Γ_1, très voisine de G_1 et telle que l'intégrale I' ne change pas sa valeur, si l'on intègre sur la surface Γ_1 au lieu de sur la surface G_1. Enfin, par L_2 et K' une autre surface arbitraire Γ_2, qui a des propriétés analogues à celles de la surface Γ_1.



Appelons I_1^0 et I_2^0 les valeurs de l'intégrale I^0 étendue sur les surfaces G_1 et G_2 respectivement, et de même $\bar{I}_1^0$ et $\bar{I}_2^0$ les valeurs correspondantes sur les surfaces Γ_1 et Γ_2. Indiquons aussi par les indices 1 et 2, si les valeurs des coordonnées x, y, z ou de leurs dérivées se rapportent à la surface G_1 ou à la surface G_2.

D'après la formule I (5) nous aurons

$$\bar{I}_1^0 - I_1^0 = \int\limits_K \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x_1'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y_1'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z_1'} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \right.$$
$$\left. - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x_1''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y_1''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z_1''} \right] \frac{\partial u}{\partial s} \right\} ds + (\ldots)_2$$

car l'intégrale double disparaît, parce que l'intégration est étendue sur la surface G_1. De même

$$\bar{I}_2^0 - I_2^0 = - \int\limits_K \left\{ \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x_2'} + \eta \frac{\partial F}{\partial y_2'} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z_2'} \right] \frac{\partial v}{\partial s} \right.$$
$$\left. - \left[\xi \frac{\partial F}{\partial x_2''} + \eta \frac{\partial F}{\partial y_2''} + \zeta \frac{\partial F}{\partial z_2''} \right] \frac{\partial u}{\partial s} \right\} ds + (\ldots)_2.$$

Il faut prendre le signe — pour que l'intégrale simple soit prise dans le même sens. Ainsi, en posant

$$\Delta I^0 = \bar{I}_1^0 + \bar{I}_2^0 - I_1^0 - I_2^0,$$

on aura

$$(30) \quad \Delta I^0 = \int\limits_K \left\{ \left[\xi \left(\frac{\partial F}{\partial x_1'} - \frac{\partial F}{\partial x_2'} \right) + \eta \left(\frac{\partial F}{\partial y_1'} - \frac{\partial F}{\partial y_2'} \right) + \zeta \left(\frac{\partial F}{\partial z_1'} - \frac{\partial F}{\partial z_2'} \right) \right] \frac{\partial v}{\partial s} \right.$$
$$\left. - \left[\xi \left(\frac{\partial F}{\partial x_1''} - \frac{\partial F}{\partial x_2''} \right) + \eta \left(\frac{\partial F}{\partial y_1''} - \frac{\partial F}{\partial y_2''} \right) + \zeta \left(\frac{\partial F}{\partial z_1''} - \frac{\partial F}{\partial z_2''} \right) \right] \frac{\partial u}{\partial s} \right\} ds + (\xi, \eta, \zeta, \ldots)_2.$$

Pour transformer cette intégrale simple nous introduisons un nouveau système de coordonnées dans un point quelconque O de la courbe K. Comme l'axe des (∂_3) nous choisissons la tangente de la courbe K, ensuite, comme l'axe des (∂_1) la normale de la courbe K qui est située dans le plan tangent de la surface G_1 et, enfin, comme l'axe des (∂_2) la normale de la courbe K, qui est située dans le plan tangent de la surface G_2.

Les cosinus directeurs que font ces axes de coordonnées avec les axes des X, Y et Z sont, respectivement, Pour l'axe des (δ_1)

$$\cos\alpha_1'', \qquad \cos\beta_1'', \qquad \cos\gamma_1''.$$

Pour l'axe des (δ_2)

$$\cos\alpha_2'', \qquad \cos\beta_2'', \qquad \cos\gamma_2''.$$

Pour l'axe des (δ_3)

$$\cos\alpha', \qquad \cos\beta', \qquad \cos\gamma'.$$

Au point O de la courbe K correspond un point O' de la courbe K', dont les coordonnées sont

$$x+\xi, \qquad y+\eta, \qquad z+\zeta.$$

Soit δ_1, δ_2, δ_3 les coordonnées de O' dans le nouveau système, nous aurons

$$\begin{aligned}
\xi &= \delta_1 \cos\alpha_1'' + \delta_2 \cos\alpha_2'' + \delta_3 \cos\alpha',\\
\eta &= \delta_1 \cos\beta_1'' + \delta_2 \cos\beta_2'' + \delta_3 \cos\beta',\\
\zeta &= \delta_1 \cos\gamma_1'' + \delta_2 \cos\gamma_2'' + \delta_3 \cos\gamma'.
\end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs de ξ, η, ζ dans la formule (30), la quantité sous le signe somme devient

$$\begin{aligned}
&\delta_1 \Bigg\{\left[\cos\alpha_1''\left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}-\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)+\cos\beta_1''\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}-\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)+\cos\gamma_1''\left(\frac{\partial F}{\partial z_1'}-\frac{\partial F}{\partial z_2'}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s}\\
&\qquad -\left[\cos\alpha_1''\left(\frac{\partial F}{\partial x_1''}-\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)+\cos\beta_1''\left(\frac{\partial F}{\partial y_1''}-\frac{\partial F}{\partial y_2''}\right)+\cos\gamma_1''\left(\frac{\partial F}{\partial z_1''}-\frac{\partial F}{\partial z_2''}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial s}\Bigg\}\\
&+\delta_2 \Bigg\{\left[\cos\alpha_2''\left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}-\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)+\cos\beta_2''\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}-\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)+\cos\gamma_2''\left(\frac{\partial F}{\partial z_1'}-\frac{\partial F}{\partial z_2'}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s}\\
&\qquad -\left[\cos\alpha_2''\left(\frac{\partial F}{\partial x_1''}-\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)+\cos\beta_2''\left(\frac{\partial F}{\partial y_1''}-\frac{\partial F}{\partial y_2''}\right)+\cos\gamma_2''\left(\frac{\partial F}{\partial z_1''}-\frac{\partial F}{\partial z_2''}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial s}\Bigg\}\\
&+\delta_3 \Bigg\{\left[\cos\alpha'\left(\frac{\partial F}{\partial x_1'}-\frac{\partial F}{\partial x_2'}\right)+\cos\beta'\left(\frac{\partial F}{\partial y_1'}-\frac{\partial F}{\partial y_2'}\right)+\cos\gamma'\left(\frac{\partial F}{\partial z_1'}-\frac{\partial F}{\partial z_2'}\right)\right]\frac{\partial v}{\partial s}\\
&\qquad -\left[\cos\alpha'\left(\frac{\partial F}{\partial x_1''}-\frac{\partial F}{\partial x_2''}\right)+\cos\beta'\left(\frac{\partial F}{\partial y_1''}-\frac{\partial F}{\partial y_2''}\right)+\cos\gamma'\left(\frac{\partial F}{\partial z_1''}-\frac{\partial F}{\partial z_2''}\right)\right]\frac{\partial u}{\partial s}\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Le coefficient de δ_3 s'annulle d'après les formules III (8) et I (4). Ensuite on a pour le coefficient de δ_1 d'après la formule III (16) l'expression

$$-\mathfrak{E}_2 = -\mathfrak{E}(x, y, z, x_2', y_2', z_2', x_2'', y_2'', z_2'', x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1'').$$

Enfin, pour le coefficient de δ_2 on a

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}(x, y, z, x_1', y_1', z_1', x_1'', y_1'', z_1'', x_2', y_2', z_2', x_2'', y_2'', z_2'').$$

Par conséquent, on aura

$$\Delta I^0 = \int_K (\mathfrak{E}_1\delta_2 - \mathfrak{E}_2\delta_1)\, ds + (\ldots .)_2 .$$

Mais, l'intégration est étendue sur une partie arbitraire de la courbe K. Donc, pour que la variation totale ΔI^0 conserve toujours un signe invariable, il faut que la fonction sous le signe somme

$$\mathfrak{E}_1\delta_2 - \mathfrak{E}_2\delta_1$$

conserve toujours un signe invariable. Mais, cette quantité représente à un facteur près, qui n'est pas nul, la distance du point O' au plan

$$\mathfrak{E}_1\delta_2 - \mathfrak{E}_2\delta_1 = 0 .$$

Il faut donc que le point O' soit toujours situé du même côté de ce plan. Le point O' appartient à la surface A et, par conséquent, le plan

$$\mathfrak{E}_1\delta_2 - \mathfrak{E}_2\delta_1 = 0$$

doit être le plan tangent de la surface A au point O.

Ensuite soient α_1 et α_2 les angles que font les axes (δ_1) et (δ_2) avec le plan

$$\mathfrak{E}_1\delta_2 - \mathfrak{E}_2\delta_1 = 0,$$

ces angles étant comptés dans des directions opposées, on aura

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} = \frac{\mathfrak{E}_1}{\mathfrak{E}_2} .$$

Mais les axes ∂_1 et ∂_2 sont situés dans les plans tangents des surfaces G_1 et G_2 et sont, d'ailleurs, des normales de la courbe K. On peut donc énoncer le théorème suivant:

»Si les deux surfaces G_1 et G_2 se coupent le long d'une courbe K tracée sur la surface A, il faut, pour qu'un maximum ou un minimum soit possible, que les sinus des angles, que font les plans tangents des surfaces G_1 et G_2 avec le plan tangent de la surface A au même point, soient proportionels aux fonctions $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_1$, ces angles étant comptés dans des directions opposées.»

On reconnaît facilement que ces deux théorèmes correspondent aux deux théorèmes donnés par M. WEIERSTRASS dans la théorie des maxima et minima des intégrales simples, dont ceux de STEINER sont des cas spéciaux.