PREMIÈRE PARTIE.

CHAPITRE I.

Propriété générale des systèmes d'équations aux dérivées partielles.

1. On appelle *multiplicité à n dimensions d'un espace à n + p dimensions* un système de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ de n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Si une telle multiplicité satisfait à une ou plusieurs équations aux dérivées partielles, entre les x, les z et leurs dérivées, elle satisfait aussi aux équations qui s'en déduisent par différentiation. En s'élevant aux ordres supérieurs, on obtient de la sorte un nombre illimité d'équations; si on ne considère pas celles-ci comme distinctes des premières, il y a lieu de se demander s'il peut exister des systèmes comprenant un nombre illimité d'équations ainsi distinctes, et s'il peut exister des multiplicités définies comme solutions de pareils *systèmes illimités* d'équations.

Nous verrons qu'il n'en est rien. Par exemple, on sait[1] que la condition nécessaire et suffisante pour que la solution générale d'un système d'équations aux dérivées partielles ne dépende que d'un nombre fini de constantes arbitraires, est que l'on puisse à l'aide de ces équations exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre des z, en fonction des dérivées d'ordre inférieur, des x et des z. Un pareil système est nécessairement limité.

2. Considérons d'abord le cas simple d'une seule fonction z de deux variables, x et y, définie par un système donné d'équations aux dérivées

---

[1] Voir, LIE, *Theorie der Transformationsgruppen,* Erster Abschnitt, p. 179.
BOURLET, *Sur les équations aux dérivées partielles simultanées,* Annales de l'école normale, 1891, Suppl.

partielles. Considérons les équations d'ordre h de ce système, et mettons-les sous une *forme canonique,* en les résolvant par rapport à une ou plusieurs dérivées d'ordre h,

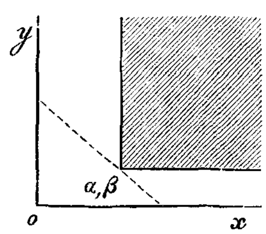
$$z_{\alpha,h-\alpha} = \frac{\partial^h z}{\partial x^\alpha \partial y^{h-\alpha}} = \psi_{h,\alpha}$$

de telle façon que la fonction $\psi_{h,\alpha}$ ne contienne que des dérivées d'ordre h, $z_{\alpha', h-\alpha'}$ telles que l'on ait

$$\alpha' < \alpha .$$

Une pareille réduction est toujours possible. De plus, les équations d'ordre supérieur, qu'on en déduit par différentiation, se présentent encore sous forme canonique.

Représentons alors dans un plan, la dérivée $z_{\alpha,\beta}$ par le point de coordonnées α, β: les dérivées d'un même ordre sont situées sur une droite:



$$x + y = \text{const.}$$

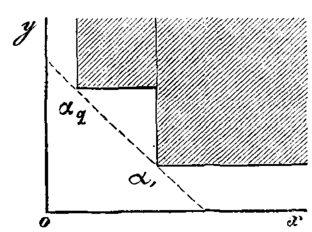
La présence, dans le *système canonique,* d'une équation résolue par rapport à $z_{\alpha,\beta}$, entraîne, pour les systèmes d'ordre supérieur, celle d'équations résolues par rapport à toutes les derivées, dont les points représentatifs sont situés dans l'angle formé par les parallèles aux axes menées par le point α, β, ou sur ces parallèles. Si donc il y a des équations résolues par rapport à une ou plusieurs dérivées d'ordre h:

$$(1) \qquad z_{\alpha_1, h-\alpha_1}, \; z_{\alpha_2, h-\alpha_2}, \; \ldots, \; z_{\alpha_q, h-\alpha_q}$$

avec

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_q ,$$

on aura, à partir d'un certain ordre, des équations résolues par rapport à toutes les dérivées de z, $z_{\alpha,\beta}$, excepté pour



$$\alpha < \alpha_q \quad \text{ou} \quad \beta < h - \alpha_1 ;$$

il peut même se présenter plusieurs équations résolues par rapport à une même dérivée $z_{\alpha,\beta}$; il nous suffit de ne conserver qu'une seule d'entre elles, celle, par exemple, qui s'obtient en différentiant la dérivée d'indice α le plus élevé, parmi les dérivées (1).

Le nombre des dérivées qui ne figurent pas dans les premiers membres, pour un ordre déterminé, est alors constant quel que soit cet ordre, et égal à $h - \alpha_1 + \alpha_q$. Si alors le système n'est pas limité, c'est qu'il y a lieu d'ajouter des équations nouvelles, lesquelles, combinées avec les précédentes, peuvent se mettre encore sous forme canonique. Or, après $h - \alpha_1 + \alpha_q$ équations nouvelles, au plus, on trouve un ordre s, tel que toutes les dérivées d'ordre s et d'ordre supérieur de z s'expriment en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Le système est alors *nécessairement limité,* et toute équation nouvelle, ajoutée aux précédentes, se ramène à une équation d'ordre inférieur à s, laquelle peut être ou n'être pas analytiquement indépendante des premières. Dans tous les cas, le système est donc limité.

3. La proposition subsiste dans le cas d'une multiplicité, que j'appellerai *de deuxième espèce,* formée de p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ dépendant chacune de *deux* variables indépendantes, x_1, y_1, pour z_1, x_2, y_2 pour $z_2, \ldots, x_p, y_p$ pour z_p: ces variables peuvent d'ailleurs ne pas être toutes différentes. Ici, on dressera encore une liste des dérivées d'ordre h, en rangeant d'abord celles de z_1, $z_{1,\alpha\beta}$ $\left(z_{1,\alpha\beta} = \frac{\partial^{\alpha+\beta} z_1}{\partial x_1^\alpha \partial y_1^\beta}\right)$ suivant les indices α décroissants, puis celles de z_2, de la même manière, et ainsi de suite. En suivant cette liste, on peut mettre les équations d'un même ordre h, que comprend le système, sous une *forme canonique,* c'est-à-dire, en les résolvant par rapport aux dérivées d'ordre h:

$$z_{i,\alpha,h-\alpha} = \psi_{i,\alpha,h-\alpha}$$

de telle façon que les dérivées d'ordre h, qui figurent dans $\psi_{i,\alpha,h-\alpha}$ suivent $z_{i,\alpha,h-\alpha}$ dans la liste. Cette forme a encore la propriété manifeste de rester canonique après différentiation.

Dans les premiers membres de ces équations figurent par leurs dérivées une ou plusieurs fonctions z. D'après le paragraphe précédent, on ne peut ajouter qu'un nombre fini d'équations nouvelles, résolues par rapport aux dérivées de ces fonctions. Si donc le système n'est pas limité, on fera apparaître, après un nombre fini d'additions d'équations nouvelles, une on plusieurs fonctions nouvelles z, et ainsi de suite. Finalement, on aura dans les premiers membres, toutes les fonctions z, après quoi, en ajoutant encore un nombre fini d'équations nouvelles, on arriverait à exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Sous cette forme, le système est alors nécessairement *limité*.

4. Pour généraliser la proposition, je la supposerai établie pour toute multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, et l'étendrai à celles de $n^{\text{ième}}$ espèce.

Soit, celle-ci, formée de p fonctions, $z_1, z_2, \ldots, z_p$, chacune de n variables indépendantes, z_i, par exemple, étant fonction de $x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,n}$. On posera

$$z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n} z_i}{\partial x_{i,1}^{\alpha_1}\, \partial x_{i,2}^{\alpha_2} \ \ldots \ \partial x_{i,n}^{\alpha_n}},$$

Comme dans les cas précédents, on dressera une liste des dérivées d'un même ordre, en rangeant les dérivées de z_1, $z_{1,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ suivant les indices α_1 décroissants, celles ayant même indice α_1, suivant les indices α_2 décroissants, et ainsi de suite, et de même pour les fonctions suivantes $z_2, \ldots, z_p$. D'après cette liste, il est encore possible de mettre les équations d'ordre h sous une forme canonique se conservant par différentiation:

$$z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n} = \psi_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}, \qquad (\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=h) \tag{2}$$

les dérivées d'ordre h qui figurent dans $\psi_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ suivant $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ sur la liste.

Çela fait, supposons que la fonction z_i figure dans l'un des premiers membres de ces équations, par sa dérivée $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$. Dans les équations d'ordre supérieur, on a, par le fait, des équations résolues par rapport à toutes les dérivées de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$. Nous considérons l'ensemble des autres dérivées de z_i, d'ordre h et d'ordre supérieur, comme appartenant à une multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, définie comme il suit. Prenons comme fonctions les dérivées de z_i, d'ordre h, distinctes de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$; et soit $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ l'une quelconque d'entre elles: l'un au moins des indices β est inférieur à l'indice α correspondant, car on a:

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n.$$

Si, $\beta_n < \alpha_n$, on considère seulement les dérivées de $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ prises par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, et non à x_n. Parmi les autres $z_{i,\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ on prend celles pour lesquelles on a: $\beta_{n-1} < \alpha_{n-1}$, et on considère toutes leurs dérivées, sauf celles prises par rapport à x_{n-1}, et ainsi de suite. De cette façon, on fait entrer toutes les dérivées de z_i, d'ordre égal ou supérieur à h, qui ne sont pas dérivées de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$, dans une multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, car une telle dérivée a l'un au moins de ses indices inférieur au nombre correspondant de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. De plus, cette multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce ne comprend aucune dérivée de $z_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$.

On fera ainsi pour toutes celles des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ qui figurent dans les premiers membres du système (2). Or, d'après ce qui a été admis sur les multiplicités de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce, on ne peut ajouter qu'un nombre fini d'équations nouvelles résolues par rapport aux dérivées de ces fonctions, ainsi mises à part: il en est même certaines qui s'introduisent nécessairement, celles qui expriment que deux des dérivées de la multiplicité de $n - 1^{\text{ième}}$ espèce sont identiques. Si donc le système n'est pas limité, on fera apparaître, dans les premiers membres, après un nombre fini d'additions d'équations, une ou plusieurs nouvelles fonctions z, et ainsi de suite. Finalement, on arriverait encore à un système nécessairement *limité,* permettant d'exprimer toutes les dérivées d'un certain ordre en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Donc:

Théorème I. *Un système d'équations aux dérivées partielles étant défini d'une manière quelconque, ce système est nécessairement limité, c'est-à-dire qu'il existe un ordre fini s, tel que, toutes les équations d'ordre supérieur à s que comprend le système, se déduisent par de simples différentiations des équations d'ordre égal ou inférieur à s.*

5. La méthode suivie dans cette analyse conduit à d'autres résultats. En différentiant les équations d'un système canonique, on a négligé ce fait qu'une même dérivée peut, dans certains cas, s'exprimer de plusieurs manières différentes, pour n'envisager qu'une seule de ces expressions. Si on exprime que ces différentes valeurs doivent être égales, on forme ainsi des équations, qui, si elles ne sont pas des conséquences analytiques de celles déjà connues, appartiennent à la catégorie des équations nouvelles qu'il faut ajouter au système.

Dans le cas où ce procédé n'ajoute pas d'équations nouvelles, on dit, ou que *les conditions d'intégrabilité sont satisfaites,* ou que le système est *complètement intégrable,* ou qu'il est *en involution.*

D'après cela, étant donné un système quelconque de ρ équations aux dérivées partielles, on peut, selon la marche suivie, le mettre sous forme canonique, puis différentier ses équations, et exprimer, s'il y a lieu, les conditions d'intégrabilité. Nos raisonnements montrent que, en suivant cette voie, on arrive, après un *nombre limité d'opérations,* ou à un *système complètement intégrable,* ou à un système définissant toutes les dérivées d'un certain ordre s, en fonction des dérivées d'ordre inférieur. Si on différentie ces équations d'ordre s, puis qu'on écrive les conditions d'intégrabilité relatives aux dérivées d'ordre $s + 1$, ou bien on trouve qu'elles sont des conséquences analytiques des équations d'ordre égal ou inférieur à s, ou bien on obtient de nouvelles équations d'ordre s ou inférieur. Dans ce cas, on ajoute ces équations au système proposé, et on répète les mêmes opérations. Finalement, les dérivées d'ordre au plus égal à s étant en nombre fini, on arrive, après un *nombre limité d'opérations,* ou à un système incompatible, ou à un système complètement intégrable, dont la solution généralene dépend alors que d'un nombre fini de constantes arbitraires. Donc:

Théorème II. *Etant donné un système quelconque d'équations aux dérivées partielles, on peut, après un nombre limité de différentiations et d'éliminations, ou bien montrer qu'il est incompatible, ou bien le mettre sous forme d'un système complètement intégrable, dont la solution générale dépend alors, suivant les cas, de fonctions ou de constantes arbitraires.*

6. L'existence des solutions de ces systèmes complètement intégrables, dans toute leur généralité, a fait l'objet de plusieurs travaux remarquables, particulièrement de MM. Meray et Riquier[1] et Bourlet[2], qui ont continué les savantes recherches de Cauchy, de M. Darboux[3] et de Mme de Kowalevski[4]. Le développement de ces travaux n'a pas place ici; j'en

[1] Meray et Riquier, Annales de l'école normale supérieure, 1890.

[2] Bourlet, loc. cit.

[3] G. Darboux, Comptes rendus de l'académie des sciences, t. 80, p. 101 et 317.

[4] Sophie von Kowalevski, Journal de Crelle, t. 80.

retiendrai seulement, pour l'utilité de ce qui suivra, ce fait que la solution générale d'un système complètement intégrable dépend de fonctions ou de constantes arbitraires. Je remarquerai de plus, ce qui est encore un résultat des travaux que je viens de citer[1], que les équations d'un système complètement intégrable permettent de former les développements en séries des solutions; les coefficients de ces séries, c'est-à-dire les valeurs que prennent, pour un système donné $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$, de valeurs des variables indépendantes, les fonctions z et leurs dérivées, sont assujettis seulement à satisfaire aux équations du système, de telle sorte qu'un certain nombre d'entre eux peuvent être choisis *arbitrairement,* sous certaines conditions de convergence seulement.

CHAPITRE II.

Les groupes de Lie.

1. Je rappelle d'abord quelques définitions[2]. Etant données n variables, ou coordonnées d'un point d'un espace R_n à n dimensions, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, considérons n autres variables $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, définies en fonction des premières par les équations:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (i=1,2,\ldots,n) \tag{1}$$

Si inversement, on peut résoudre ces équations par rapport aux x en fonction des x', on dit qu'elles représentent une *transformation,* substituant les x' aux x. Une transformation peut être considérée, soit comme un simple *changement de variables,* soit comme une transformation ponctuelle de l'espace R_n en un autre espace R'_n. Ainsi, les équations:

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \qquad y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

[1] Bourlet, loc. cit., p. 52. (Suppl.)

[2] Sophus Lie, *Theorie der Transformationsgruppen,* Erster Abschnitt, Einleitung.

représentent, soit un changement de coordonnées rectangulaires, soit une rotation du plan autour de l'origine.

Etant défini un ensemble de transformations, on dit qu'il constitue un *groupe de transformations,* si la succession de deux d'entre elles, effectuées l'une après l'autre, constitue encore une transformation de l'ensemble.

Nous supposerons toujours, avec M. LIE, que toute transformation (1) d'un groupe vérifie un système d'équations aux dérivées partielles entre $x_1, x_2, \dots, x_n$, d'une part, $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ considérées comme fonctions des variables précédentes et leurs dérivées, d'autre part, et que, réciproquement, toute solution d'un pareil système définit une transformation du groupe. Nous supposerons en outre que ce système n'est formé que *d'équations analytiques* par rapport à tous les arguments, variables, fonctions et dérivées qui y figurent, et qu'il est *irréductible.* J'appellerai *groupe de Lie,* un groupe ainsi défini; il est *fini* ou *infini,* suivant que sa transformation générale dépend de *constantes* ou de *fonctions* arbitraires; il est *continu,* c'est-à-dire, que l'on peut passer de l'une quelconque de ses transformations à une autre par une variation continue de ces arbitraires.

2. Quant au système d'équations qui définit les transformations du groupe (1), je supposerai toujours qu'il est mis sous forme *complètement intégrable,* opération que l'on sait effectuer; alors, si le système est d'ordre N, toute équation d'ordre inférieur ou égal à N, que l'on pourrait déduire de ce système par des différentiations, suivies de l'élimination des dérivées d'ordre supérieur à N, est nécessairement une *conséquence analytique* des équations de ce système; en outre, toute équation d'ordre supérieur à N, satisfaite par toutes les solutions de ce système, se déduit nécessairement par différentiation des équations de ce système. Soit, ce système, formé de ρ équations:

$$W_h(x_1, \dots, x_n, x'_1, \dots, x'_n, \dots, x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n}, \dots) = 0 \qquad (h=1,2,\dots,\rho) \tag{2}$$

en posant:

$$x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n} = \frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_n} x'_i}{\partial x_{x_1}^{\alpha_1} \partial x_{x_2}^{\alpha_2} \dots \partial x_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

Il comprend μ_0 équations distinctes d'ordre *zéro,* μ_1 équations distinctes d'ordre *un*, ..., μ_N équations distinctes d'ordre N, c'est-à-dire que, des μ_K équations d'ordre K, par exemple, on ne peut pas déduire d'équations d'ordre inférieur par élimination des dérivées d'ordre K; ces μ_K équations comprennent d'ailleurs celles qu'on obtient en différentiant les équations d'ordre $K - 1$. On a:

$$\rho = \mu_0 + \mu_1 + \cdots + \mu_N$$

et le groupe est *fini,* si μ_N est égal au nombre des dérivées d'ordre N, *infini,* s'il lui est inférieur.

On pourra d'ailleurs, suivant les cas, supposer le système (2) *prolongé* jusqu'à un ordre Q supérieur à N en, lui adjoignant les μ_{N+1} équations distinctes d'ordre $N + 1$, μ_{N+2} d'ordre $N + 2, \ldots, \mu_Q$ d'ordre Q, qui se déduisent des μ_N équations d'ordre N, par $1, 2, \ldots, Q - N$ dérivations successives. Quand nous parlerons des équations du système (2), d'ordre au plus égal à K, ce nombre K pourra être quelconque, inférieur, égal, ou supérieur à N; et il faudra entendre par là l'ensemble des μ_0 équations d'ordre $0, \mu_1$ d'ordre $1, \ldots, \mu_K$ d'ordre K, qui viennent d'être formées.

Ces équations peuvent prendre une autre forme qui nous sera utile dans la suite. Les μ_0 équations d'ordre zéro n'entraînent pas de relation entre $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seulement, de sorte qu'elles permettent d'exprimer un certain nombre des fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, en fonction des autres et de $x_1, x_2, \ldots, x_n$; plus généralement, elles permettent d'exprimer $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et de ε_0 paramètres, $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, que j'appellerai *paramètres d'ordre zéro:*

$$(A_0) \qquad x'_h = \varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0). \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n)}$$

Ensuite, les μ_1 équations du premier ordre donnent certaines des dérivées du premier ordre en fonction des autres, de $x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; ou mieux, elles donnent les dérivées du premier ordre, en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, et de ε_1 paramètres nouveaux $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, dits *paramètres du premier ordre:*

$$(A_1) \qquad \frac{\partial x'_h}{\partial x_i} = \varphi_{h,0,0,\ldots,1,\ldots,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1).$$

Et ainsi de suite, jusqu'à un ordre quelconque K, les dérivées d'ordre K s'exprimant en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, des ε_0 paramètres d'ordre *zéro*, ε_1 d'ordre *un*, ..., et de ε_K *paramètres d'ordre* K, $\lambda_1^K, \lambda_2^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K$:

$$(A_K) \qquad x'_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \varphi_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K). \atop {(h=1,2,\ldots,n) \quad (a_1+a_2+\ldots+a_n=K)}$$

L'ensemble des équations (A_0), (A_1), ..., (A_K) est équivalent au système (2) pris jusqu'à l'ordre K.

Dans les fonctions φ qui figurent dans ces équations, les paramètres λ sont *essentiels*, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de fonctions des λ et de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, en *nombre inférieur* à $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_K$, telles que les φ puissent s'exprimer à l'aide des x et de ces fonctions seulement. Il en résulte que les équations (A_0) peuvent être résolues par rapport à $\lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0$, les équations (A_1), par rapport à $\lambda_1^1, \lambda_2^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1$, et ainsi de suite, pour tout système de valeurs des x' satisfaisant aux équations (2).

Notons en outre qu'on peut toujours trouver au moins une solution des équations (2), représentée par des fonctions $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$, qui prennent, ainsi que leurs dérivées, dans le voisinage d'un point quelconque:

$$x_1 = x_{10}, \qquad x_2 = x_{20}, \quad \ldots, \quad x_n = x_{n0}$$

des valeurs définies par les formules (A), où l'on donne aux λ des *valeurs arbitraires*, et aux x, les valeurs $x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}$.

3. Cela posé, soit T une transformation déterminée, mais quelconque, du groupe:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

et effectuons sur les x' le changement de fonctions défini par la transformation T:

$$(3) \qquad \bar{x}'_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n).$$

Les $\bar{x}'$, fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et leurs dérivées, s'expriment en fonction des x' et de leurs dérivées, et réciproquement, les équations (3) étant résolubles par rapport à $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$. Le système (2) se change ainsi en un système:

$$(2') \qquad \overline{W}_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \ldots, \bar{x}'_n, \ldots, \bar{x}'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \ldots) = 0$$

et les équations (A) se transforment en des équations (A'):

$$(A'_0) \qquad \bar{x}'_h = \bar{\varphi}_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(A'_K) \quad \bar{x}'_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \bar{\varphi}_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K)$$

où les paramètres λ sont encore *essentiels* dans les fonction $\bar{\varphi}$, car si leur nombre pouvait s'abaisser, il en serait de même, en revenant aux fonctions initiales x', pour les fonctions φ.

Toute solution de (2′) se déduit d'une solution de (2) par la transformation (3), de sorte que, si

$$(4) \qquad x'_i = F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

est la solution générale de (2), celle de (2′) est:

$$(5) \qquad \bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = G_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Or, ceci représente la transformation obtenue par la succession des transformations (4), puis (5), toutes deux appartenant au groupe. Par suite, toute solution de (2′) satisfait aussi aux équations:

$$(2'') \qquad W_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \bar{x}'_1, \bar{x}'_2, \ldots, \bar{x}'_n, \ldots, \bar{x}'_{i,a_1,a_2,\ldots,a_n}, \ldots) = 0,$$

système qui peut se mettre sous la forme:

$$(A''_0) \qquad \bar{x}'_h = \varphi_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \lambda_2'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(A''_K) \quad \bar{x}'_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n} = \varphi_{h,a_1,a_2,\ldots a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \lambda_1'^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}'^1, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K)$$

où figurent $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_K$ *paramètres essentiels* nouveaux $\lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0$, $\lambda_1'^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}'^1, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K$. A tout système de valeurs attribuées aux x et aux λ dans les équations (A') correspond donc, dans les équations (A'') un système de valeurs des x et des λ', qui rend les seconds membres de (A'') égaux respectivement à ceux de (A'):

$$(6) \qquad \bar{\varphi}_{h,a_1,a_2,\ldots,a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K)$$
$$= \varphi_{h,a_1,a_1,\ldots,a_n}(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K),$$

les x ayant mêmes valeurs dans les deux systèmes.

Ces équations (6) peuvent donc être résolues par rapport aux λ' et sont compatibles. Elles donnent pour les différents ordres successifs:

$$
(7)\quad
\begin{aligned}
&\lambda_i'^0 = L_i^0(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0), && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_0)\\
&\lambda_i'^1 = L_i^1(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1) && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_1)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_i'^K = L_i^K(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}^0, \lambda_1^1, \ldots, \lambda_{\varepsilon_1}^1, \ldots, \lambda_1^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}^K) && (i=1,2,\ldots,\varepsilon_K)
\end{aligned}
$$

où les fonctions L_i^K ne dépendent que des paramètres λ, d'ordre au plus égal à K. Inversement on peut résoudre ces équations (7) par rapport aux λ; car, s'il en était autrement, elles entraîneraient au moins une relation de la forme:

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1'^0, \ldots, \lambda_{\varepsilon_0}'^0, \ldots, \lambda_1'^K, \ldots, \lambda_{\varepsilon_K}'^K) = 0,$$

laquelle serait ainsi conséquence des équations (6). Alors, en substituant dans les fonctions $\bar{\varphi}$ les paramètres λ' aux paramètres λ, on pourrait, dans ces fonctions $\bar{\varphi}$, abaisser le nombre des paramètres en vertu de la relation précédente; et ceci est impossible, puisque les λ sont *essentiels* dans les fonctions $\bar{\varphi}$.

Les formules (7) établissent ainsi l'identité des systèmes (A') et (A''), ou encore l'équivalence des systèmes (2') et (2''). Donc:

Théorème I. *Les équations de définition des transformations d'un groupe de Lie restent invariantes lorsqu'on effectue sur les x', un changement de fonctions défini par une transformation quelconque du groupe.*

4. Par une marche parallèle, on pourrait résoudre les μ_0 équations d'ordre zéro par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, car elles ne peuvent entraîner de relation entre les fonctions $x_1', x_2', \ldots, x_n'$, toute transformation ayant nécessairement une inverse. On formerait ainsi un système analogue au système (A). En effectuant alors sur les variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, la transformation *inverse* de T:

$$x_i = f_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$$

le système (2) se changerait en un système équivalent au suivant:

$$W_h(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots, x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}, \ldots) = 0$$

où les dérivées $x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}$ sont prises par rapport aux variables $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$. Donc:

Théorème II. *Les mêmes équations restent invariantes, par un changement de variables indépendantes, défini par une transformation inverse d'une transformation quelconque du groupe.*

5. Il se déduit de là de nouvelles conséquences. Les systèmes (2) et (2′) ont mêmes solutions, et en particulier, la suivante:

$$\bar{x}'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

correspondant à la transformation T. On peut donc dans (4), disposer des fonctions F, c'est-à-dire trouver une transformation S du groupe, de façon que les relations (5) deviennent:

$$\bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2 \ldots, F_n) = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Ceci exige:

$$F_i = x_i,$$

ce qui fait apparaître, parmi les transformations du groupe, la *transformation identique.* Ensuite, puisqu'il en est ainsi, on peut déterminer S de façon que l'on ait:

$$\bar{x}'_i = f_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = x_i.$$

Ceci exige que les fonctions F satisfassent aux identités:

$$f_i(F_1, F_2, \ldots, F_n) = x_i$$

et alors la transformation S donne:

$$x_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n),$$

c'est-à-dire, qu'elle est *inverse de T*, transformation arbitraire du groupe. Donc:[1]

Théorème III. *Tout groupe de Lie contient la transformation identique et ses transformations sont deux à deux inverses.*

Ceci permet d'établir la réciproque des Théorèmes I et II. Soit, en effet, T, une transformation, qui effectuée sur les fonctions x':

$$\bar{x}'_i = f_i(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$$

laisse invariant le système (2). Ce système (2) étant satisfait pour la transformation identique:

$$x'_i = x_i$$

aura donc aussi pour solution:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

c'est-à-dire que le groupe contient la transformation T. En opérant de même pour le changement de variables indépendantes, on voit finalement que:

Théorème IV. *Un groupe de Lie étant défini par le système d'équations aux dérivées partielles, complètement intégrable:*

$$(2) \qquad W_h(x_1, x_2, \ldots, x_n, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, \ldots, x'_{i,\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n}, \ldots) = 0 \quad (h=1,2,\ldots,\rho)$$

la condition nécessaire et suffisante pour que ce groupe contienne une transformation T, est que cette dernière, effectuée, soit sur les variables indépendantes x, soit sur les fonctions x', laisse invariant le système (2).

---

[1] Je dois cette démonstration de cette proposition à l'obligeance de M. Engel, qui a bien voulu me la communiquer. Je répète d'ailleurs que tous les résultats de ce chapitre sont dus à M. Lie, qui les a exposés en particulier dans le mémoire suivant: *Die Grundlagen für die Theorie der unendlichen continuirlichen Transformationsgruppen,* Leipziger Berichte, 1891.