SUR LA THÉORIE DES CAISSES DE PENSION

PAR

L. LINDELÖF
à HELSINGFORS.

Lorsqu'on veut se rendre compte de l'état d'une caisse de pension, il faut calculer d'un côté la valeur actuelle de ses revenues et de l'autre celle de ses dépenses, parmi lesquelles figurent surtout les engagements de la caisse soit envers les sociétaires eux-mêmes, soit envers leurs familles. Ce calcul doit, pour être complet, embrasser non seulement les sociétaires ou membres actuels, mais aussi les membres futurs. Tant qu'il s'agit des membres actuels, le calcul peut s'effectuer par les règles ordinaires de la théorie des rentes viagères, pourvu que les éléments statistiques nécessaires soient donnés. Le calcul relatif aux membres futurs est ordinairement sujet à plus de difficulté et d'incertitude. Cependant il y a un cas où ce calcul peut se faire presque avec la même certitude que pour les membres actuels; c'est celui où le nombre des membres actifs (c. à d. de ceux qui ne sont pas encore pensionnés) reste constant. Pour ce cas j'ai été conduit, en examinant l'état de quelques caisses particulières,[1] à employer un procédé, qui me semble très commode et en même temps aussi rigoureux que possible. Ne l'ayant pas rencontré ailleurs, j'ai cru qu'il pourrait mériter d'être porté à la connaissance de ceux qui s'occupent de telles enquêtes.

---

[1] Deux de ces enquêtes ont été publiées sous les titres: *Statistisk undersökning af ställningen i Finska Skolstatens Pensionskassa vid 1892 års ingång,* Helsingfors 1892, et *Nytt bidrag till belysande af ställningen i Folkskollärarenes i Finland enke- och pupillkassa,* Helsingfors 1893. La troisième, qui vient d'être terminée, est relative à la caisse de pension des marins finlandais.

Considérons, pour fixer les idées, une caisse qui doit fournir des pensions à un certain groupe d'employés, et admettons que le nombre des places ou des emplois qui s'y rapportent, ne varie pas avec le temps. Soit i l'âge d'un membre, lorsqu'il entre dans le groupe, et u celui auquel il en sort pour devenir pensionnaire. Chaque membre qui atteint l'âge u ou qui meurt avant de l'atteindre, sera immédiatement remplacé par un nouveau membre de l'âge i. Cela posé, nous fixons par la pensée un certain emploi, occupé actuellement par un membre de l'âge x, et nous nous proposons d'abord de calculer la valeur actuelle des pensions que la caisse aura à payer à ce membre et à tous ses successeurs dans le même emploi.

Désignons par C_x la valeur actuelle d'une somme 1 payable lorsque le membre (x) quitte sa place, soit comme pensionnaire, soit par la mort, par p_x la valeur actuelle de la pension qui lui est assurée à partir de l'âge u, et par P_x celle des pensions que la caisse aura à payer tant à cet employé qu'à tous ses successeurs futurs dans le même emploi; on aura évidemment

$$P_x = p_x + C_x . P, \tag{1}$$

P étant la valeur moyenne de P_x pour un nouveau membre au moment de son entrée en service. Quant à cette valeur, on pourrait se contenter de faire $P = P_i$ en supposant i constant, mais on arrive à une détermination plus rationnelle de P de la manière suivante. La formule générale (1), appliquée à un nouveau membre qui entre à l'âge i, donne

$$P_i = p_i + C_i P.$$

Si l'on connaît les âges d'entrée de tous les employés actuels ou d'un autre groupe quelconque suffisamment nombreux et qu'on prenne la moyenne des deux membres de l'équation précédente relativement à ce groupe, on trouve

$$P = p + C.P,$$

p étant la valeur moyenne de p_i et C celle de C_i. Il en résulte

$$P = \frac{p}{1 - C}, \tag{2}$$

et en substituant cette valeur dans l'équation (1),

$$P_x = p_x + \frac{C_x}{1 - C} p. \tag{3}$$

Dans cette expression de P_x le premier terme p_x se rapporte au fonctionnaire actuel (x); le second terme

$$\frac{C_x}{1 - C} p \tag{4}$$

représente la valeur des pensions qui seront payées à ses successeurs.

Considérons maintenant une place de sociétaire actuellement libre, mais qui sera immédiatement remplie. La valeur des pensions relatives à une telle place est, d'après la formule (3),

$$p + \frac{C}{1 - C} p = \frac{1}{1 - C} p. \tag{5}$$

En faisant la somme des expressions (4) et (5) relativement à tous les emplois existants, on trouve pour la valeur actuelle totale F des pensions des membres futurs la formule

$$F = \frac{\Sigma C_x + m}{1 - C} p, \tag{6}$$

où la somme Σ doit comprendre tous les fonctionnaires actuels et m signifie le nombre des charges vacantes.

Si l'on fait, dans l'expression précédente,

$$\frac{\Sigma C_x + m}{1 - C} = A, \tag{7}$$

cette quantité A a une signification remarquable. Elle représente évidemment la valeur actuelle d'une somme 1 qui serait servie chaque fois qu'un nouveau membre entre dans le groupe des sociétaires, ce qu'on pourrait exprimer plus simplement en disant que A représente *le nombre escompté des entrées.* Ce nombre joue un rôle important non seulement dans le calcul des pensions, mais aussi dans celui des contributions des membres perçues au profit de la caisse. L'expression (6) du capital des pensions des membres futurs se réduit par là simplement à

$$F = Ap.$$

La pension assurée à un sociétaire de l'âge x n'étant autre chose qu'une rente viagère différée à l'âge u, sa valeur p_x s'obtient par des règles connues. Ayant construit une table de ce valeurs, on calcule facilement à son aide la moyenne p de la fonction p_x pour un membre entrant en service. Quant à la fonction C_x, elle s'obtient par la formule

$$C_x = A_x + \frac{D_u}{D_x}(1 - A_u),$$

où l'on a désigné par

A_x la valeur actuelle d'une somme 1 assurée sur une tête de x ans, et par

$D_x = l_x v^x$ le nombre escompté des vivants (l_x) à l'âge x dans la table de mortalité des sociétaires, v étant la valeur actuelle d'une somme 1 payable au bout d'un an.

Nous avons admis dans ce qui précède, que toute place de sociétaire, devenue libre, sera immédiatement occupée par un nouveau membre. En réalité il n'en est pas ainsi; ordinairement il se passe un certain temps entre la sortie d'un membre et l'entrée de son successeur. En désignant par τ cet intervalle de temps, supposé constant, et par $[m]$ le nombre escompté des m vacances actuelles, chacune d'elles étant considérée au moment de sa cessation, l'expression de Λ deviendra

$$\Lambda = \frac{v^\tau \Sigma C_x + [m]}{1 - v^\tau C}$$

et l'on aura comme précédemment

$$F = \Lambda p.$$

Jusqu'ici il n'a été question que d'une seule catégorie de pensionnaires. Supposons maintenant qu'il y ait deux classes de pensions différentes, que l'âge d'entrée dans la première classe soit a et dans la seconde b ($a > b$) et qu'on n'entre dans la première classe qu'en passant par la seconde. Soit Λ_1 le nombre escompté des entrées de nouveaux membres dans la classe I et Λ_2 celui des entrées dans la classe II. Pour mieux distinguer les deux classes, nous désignons l'âge d'un fonctionnaire actuel par x_1 ou x_2, suivant qu'il appartient à la première ou à la seconde classe, et pareillement par m_1 et m_2 les nombres des places actuellement vacantes dans les deux classes. D'après l'équation (7), qui a une application immédiate à l'égard de la classe I, on trouve

$$(8) \qquad A_1 = \frac{\Sigma x_1 + m_1}{1 - C_a}.$$

Quant à la classe II, il faut observer que toute entrée d'un nouveau membre dans la première classe produit une vacance dans la seconde et qu'elle est par conséquent accompagnée de l'entrée d'un nouveau membre aussi dans celle-ci. En calculant A_2 il faut donc considérer les membres des deux classes comme formant un seul groupe, auquel on applique la formule (7). On trouve ainsi

$$(9) \qquad A_2 = \frac{\Sigma x_1 + \Sigma x_2 + m_1 + m_2}{1 - C_b},$$

la somme Σx_1 étant relative à tous les membres actuels de la classe I et Σx_2 relative à tous ceux de la classe II. (Il est bien entendu que les pensionnaires ne sont pas ici compris parmi les membres de la caisse.)

Soit maintenant $p_x^{(1)}$ la valeur actuelle de la pension assurée à un membre de la classe I dont l'âge actuel est x, et $p_x^{(2)}$ celle de la pension assurée à un membre du même âge de la classe II. La valeur actuelle de toutes les pensions à payer aux membres futurs de la classe I sera évidemment

$$F_1 = A_1 p_a^{(1)}.$$

Pour la classe II cette valeur serait de même $A_2 p_b^{(2)}$, si tous les membres qui entrent dans cette classe devaient y rester toute leur vie. Mais comme un certain nombre de ceux-là avanceront plus tard (à l'âge a) à la classe I pour remplir les places devenues vacantes dans celle-ci, la-dite valeur sera par là diminuée d'une partie correspondante. Chaque fois qu'un tel avancement a lieu, un terme $p_a^{(2)}$ disparaîtra de la somme des pensions de la classe II, et le nombre escompté de ces avancements étant A_1, la partie dont il s'agit sera evidemment $A_1 p_a^{(2)}$. La valeur escomptée des pensions qui seront réellement payées aux membres futurs de la classe II, se réduit par conséquent à

$$F_2 = A_2 p_b^{(2)} - A_1 p_a^{(2)}.$$

Ces valeurs de F_1 et F_2 subsistent encore si chaque vacance, au lieu d'être remplie immédiatement, comme nous l'avons supposé, doit durer un certain temps τ; seulement les expressions de A_1 et A_2 doivent en ce cas subir certaines modifications, faciles à trouver, mais auxquelles nous ne nous arrêterons pas ici.

Si les vacances survenues dans la classe I ne se remplissent pas toutes moyennant des avancements de la classe II, mais seulement pour une partie α, l'autre partie $1 - \alpha$ des vacances étant remplie par des personnes jusque-là étrangères à la caisse, l'expression (9) de A_2 doit être remplacée par celle-ci:

$$A_2 = \frac{\Sigma C_{x_2} + m_2 + \alpha(\Sigma C_{x_1} + m_1)}{1 - C_b}$$

et la valeur de F_2 deviendra

$$F_2 = A_2 p_b^{(2)} - \alpha A_1 p_a^{(2)},$$

tandis que les expressions de A_1 et de F_1 resteront inaltérées.

Considérons encore le cas où il y a trois classes de pension différentes, et supposons que la première classe soit recrutée uniquement parmi les membres de la seconde et celle-ci uniquement parmi les membres de la troisième. En distinguant par les indices $1, 2, 3$ les valeurs de x, m, A et F relatives à ces différentes classes et désignant respectivement par a, b, c $(a > b > c)$ l'âge d'entrée dans chacune d'elles, on trouvera, par un raisonnement analogue à celui qui précède,

$$A_1 = \frac{\Sigma C_{x_1} + m_1}{1 - C_a},$$

$$A_2 = \frac{\Sigma C_{x_1} + \Sigma C_{x_2} + m_1 + m_2}{1 - C_b},$$

$$A_3 = \frac{\Sigma C_{x_1} + \Sigma C_{x_2} + \Sigma C_{x_3} + m_1 + m_2 + m_3}{1 - C_c}.$$

Si l'on introduit encore les notations $p_x^{(1)}, p_x^{(2)}, p_x^{(3)}$ pour désigner la valeur actuelle de la pension assurée à un membre de x ans, suivant qu'il appartient à la classe I, II ou III, la somme des valeurs escomptées des pensions que la caisse aura à payer aux membres futurs dans chacune de ces classes, sera respectivement

$$F_1 = A_1 p_a^{(1)},$$

$$F_2 = A_2 p_b^{(2)} - A_1 p_a^{(2)},$$

$$F_3 = A_3 p_c^{(3)} - A_2 p_b^{(3)}.$$

Les exemples qui précèdent, doivent suffire pour faire comprendre la nature et la portée de notre méthode. Nous n'avons parlé que des pensions dont jouissent les membres eux-mêmes à partir d'un certain âge. Mais il est évident que la méthode se prête tout aussi bien au calcul des pensions qui peuvent être assurées à leurs veuves et orphélins, ainsi qu'à celui des cotisations annuelles des membres, comme nous l'avons prouvé en détail dans les enquêtes déjà citées.

Il est à remarquer que notre méthode ne suppose pas la connaissance du nombre réel des pensionnaires à une époque quelconque de l'avenir et que nous avons ainsi pu éviter les calculs assez prolixes par lesquels on a essayé d'évaluer approximativement ce nombre.[1] Tout ce que nous présumons, c'est que le nombre des sociétaires actifs ou plutôt celui de leurs places reste constant.

C'est du reste le seul cas dans lequel le problème admette une solution tant soit peu exacte. Sans doute le nombre des emplois qui intéressent une caisse de pension, peut varier avec le temps, ces établissements ayant souvent une tendance à élargir leurs sphères d'activité, mais les variations de ce genre ont un caractère trop fortuit pour qu'on puisse en tenir compte autrement que par une estimation toujours très incertaine.

---

[1] Voir à ce sujet la communication intéressante de G. Eneström, portant le titre: *Härledning af en allmän formel för antalet pensionärer, som vid en godtycklig tidpunkt förefinnes inom en sluten pensionskassa,* insérée dans Öfversigt af K. Svenska Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar, Stockholm 1893.