# ANGENÄHERTE DARSTELLUNG DER KVADRATWURZEL EINER VERÄNDERLICHEN MITTELST EINFACHER BRÜCHE

VON

P. TCHEBYCHEW.

Aus dem Russischen[1] übersetzt von O. Backlund.

§ 1. Bei der Berechnung von Kvadraturen muss man häufig, wegen Integrationsschwierigkeiten, die (zu integrirenden) Functionen durch angenäherte Ausdrücke ersetzen. Wenn die Integrationsschwierigkeiten von einem Radicale zweiten Grades herrühren, so kann man mit grossem Vortheil als angenäherten Ausdruck des Radicales

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

die Function

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

anwenden, welche man mittelst des ersten Theoremes erhält, das ich in meinem Mémoire: *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions,*[2] bewiesen habe. Stellt man sich die Aufgabe, die Grenzen der relativen Fehler für alle Werthe von $x$ zwischen $x = 1$ und $x = h > 1$ möglichst eng zu machen, so wird die beste Darstellung des Radicales

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

durch die Function

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}$$

[1] Записки Импер. Академiи Наукъ. Bd. 61, St. Petersburg 1889.

[2] Mémoires de l'Académie Impériale. Tome VII, 1858.

diejenige sein, für welche die Verhältnisse

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\cdots+\frac{B_n}{C_n+x}},$$

$$\frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\cdots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

zwischen $x=1$ und $x=h$ möglichst wenig sich von 1 entfernen. Eine solche Darstellung des Radicales

$$\sqrt{\frac{1}{x}}$$

können wir mit Hülfe des erwähnten Theoremes finden, indem wir es zur Bestimmung der Grössen

$$A, B_1, B_2, \ldots, B_n, \qquad C_1, C_2, \ldots, C_n$$

anwenden, so dass der Logarithmus der Verhältnisse

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{x}}}{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\cdots+\frac{B_n}{C_n+x}}$$

oder

$$\frac{A+\frac{B_1}{C_1+x}+\frac{B_2}{C_2+x}+\cdots+\frac{B_n}{C_n+x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

möglichst wenig von 0 abweicht, wenn $x$ von $x=1$ bis $x=h$ sich ändert. Wenn wir annehmen, dass in dem Intervalle $x=1$, $x=h$ die Grenzwerthe des letzten Verhältnisses

$$l, \frac{1}{l} > l$$

sind, so können wir uns mit Hülfe des erwähnten Theoremes von der Möglichkeit überzeugen, diese Grenzen der Einheit zu nähern, indem die $2n + 1$ Constanten der Function

$$y = \frac{A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}}{\sqrt{\frac{1}{x}}}$$

$$= \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}\right]$$

in passender Weise bestimmt werden, vorausgesetzt, dass $y$ von $x = 1$ bis $x = h$ weniger als $2n + 2$ Mal die Grenzwerthe

$$l, \frac{1}{l}$$

erreicht.

Hieraus folgt, dass die grösste Annäherung der Grenzwerthe

$$l, \frac{1}{l}$$

an die Einheit nur bei solchen Werthen von

$$A, B_1, B_2, \dots, B_n, \qquad C_1, C_2, \dots, C_n,$$

stattfindet, für welche die Function

$$(1) \qquad y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}\right]$$

im Intervalle $x = 1$, $x = h$ wenigstens $2n + 2$ Mal die Grössen

$$l, \frac{1}{l}$$

erreicht ohne sie zu überschreiten.

Wir werden jetzt zeigen, wie auf Grundlage des angeführten sowohl die Grösse $l$ wie die Function $y$, welche zur Lösung unserer Aufgabe führen, gefunden werden können.

§ 2. Da die Function $y$ zwischen $x = 1$, $x = h$ über die Werthe $l$ und $\frac{1}{l}$ hinausgeht, wenn sie in diesem Intervalle für irgend einen von $1$ und $h$ verschiedenen Werth von $x$ gleich $l$ oder $\frac{1}{l}$ wird, ohne dass $\frac{dy}{dx} = 0$, so müssen nach dem oben auseinandergesetzten mindestens $2n + 2$ verschiedene Werthe von $x$, von $x = 1$ an bis $x = h$, gleichzeitig den Gleichungen

$$(l^2 - y^2)(1 - l^2y^2) = 0$$

und

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1 - x)(h - x) = 0$$

genügen, wo nach (1) die linken Seiten rationelle Brüche darstellen, deren gemeinschaftlicher Nenner

$$(C_1 + x)^4(C_2 + x)^4 \ldots (C_n + x)^4$$

ist und deren Zähler $(4n + 2)^{\text{ten}}$ Grades sind. Aus der Zusammensetzung dieser Gleichungen geht hervor, dass die gemeinschaftlichen Wurzeln, die von $x = 1$ und $x = h$ verschieden sind, vielfache Wurzeln sein müssen. In Folge dessen können diese Gleichungen für $2n + 2$ verschiedene Werthe von $x$ nicht gleichzeitig stattfinden, ohne $4n + 2$ gemeinschaftliche Wurzeln, gleiche oder verschiedene, zu besitzen. Diess setzt aber ihre Identität voraus, da sie nach dem eben auseinandergesetzten vom $4n + 2^{\text{ten}}$ Grade sind. Identisch können diese Gleichungen sein, nur wenn

$$(l^2 - y^2)(1 - l^2y^2) = C\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x(1 - x)(h - x),$$

wo $C$ eine Constante bedeutet. Hieraus geht dann die folgende Differentialgleichung hervor:

$$\sqrt{C}\,\frac{dy}{\sqrt{(l^2 - y^2)(1 - l^2y^2)}} = \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)(h - x)}}. \tag{2}$$

Unter den verschiedenen Functionen $y$, welche dieser Gleichung für irgend welche Constanten $l$ und $C$ genügen, ist es nicht schwer diejenige zu unterscheiden, welche zur Lösung unserer Aufgabe führt. Zu dem Zwecke bemerken wir, dass laut (1)

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

zu einer Gleichung $2n^{\text{ten}}$ Grades führt; von $x = 0$ bis $x = \infty$ kann daher die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ nur $2n$ Mal Null werden. Da sie aber nach dem angeführten im Intervalle

$$x = 1, \qquad x = h$$

wenigstens $2n$ Mal Null wird, so kann sie in den Intervallen

$$x = 0, \qquad x < 1$$

und

$$x > h, \qquad x = \infty$$

kein einziges Mal Null werden; und sie muss zwischen

$$x = 1, \qquad x = h$$

genau $2n$ Mal Null werden. Aus der Gleichung (2) erhält man demnach zwischen den Integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}, \qquad \int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}},$$

$$\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}, \qquad \int_l^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}$$

die folgenden Verhältnisse:

$$(3) \qquad \frac{\displaystyle\int_0^l \frac{dy}{\sqrt{(l^2-y^2)(1-l^2y^2)}}}{\displaystyle\int_l^{\frac{1}{l}} \frac{dy}{\sqrt{(y^2-l^2)(1-l^2y^2)}}} = (2n+1)\frac{\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\displaystyle\int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}.$$

§ 3. Auf Grund dieser Gleichung kann man die Grösse $l$ mittelst des Verhältnisses zwischen den Integralen

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}, \qquad \int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}$$

leicht ermitteln.

Von den verschiedenen Formeln, die dazu dienen können, wollen wir im vorliegenden Falle die folgende benutzen

$$(4) \qquad l^4 = 1 - 16q^{2n+1}\left(\frac{1 + q^{4n+2} + q^{12n+6} + \dots}{1 + q^{2n+1} + q^{6n+3} + \dots}\right)^8$$

$$= 1 - 16q^{2n+1}\left(\frac{\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{2(2n+1)i(2i+1)}}{\sum\limits_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{(2n+1)i(2i+1)}}\right)^8,$$

wo

$$q = e^{-\pi\frac{\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)(h-x)}}}{\int_1^h \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)(h-x)}}}}.$$

Diese Formel zeigt, wie $l$ und $\frac{1}{l}$ bei wachsendem $n$ sich der Einheit rasch nähern, und wie in Folge dessen die relativen Fehler der Formel

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x},$$

welche eine Annäherung des Radicales $\sqrt{\frac{1}{x}}$ darstellt, rasch abnehmen.

Indem wir durch $\theta$ eine Grösse, die zwischen 0 und 1 liegt, bezeichnen, so stellt $l^{2\theta-1}$ alle Werthe zwischen $l$ und $\frac{1}{l}$ dar. Hiernach finden wir mit Rücksicht auf die erwähnte Beschaffenheit der Function

$$y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}\right]$$

die folgende Gleichung zur Bestimmung des Werthes des Radicales $\sqrt{\frac{1}{x}}$:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = l^{1-2\theta}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}\right]. \tag{5}$$

§ 4. Die Grössen

$$A, B_1, B_2, \dots, B_n, \qquad C_1, C_2, \dots, C_n,$$

welche in dieser Formel auftreten, können leicht ermittelt werden, und zwar mittelst des Integrales der Gleichung (2), das mit Rücksicht auf (3) erhalten wird. Denn schreiben wir dieses Integral unter der Form

$$y = \sqrt{x}\left[A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \dots + \frac{B_n}{C_n + x}\right],$$

so finden wir, dass hier die Grössen

$$A, B_1, B_2, \dots, B_n, \qquad C_1, C_2, \dots, C_n$$

mit Hülfe von elliptischen Functionen mit dem Modul

$$k = \sqrt{1 - \frac{1}{h}} \tag{6}$$

und mit Anwendung der bekannten Bezeichnung

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\varphi}}$$

sich durch folgende Formeln darstellen lassen:

$$A = \frac{1}{l\sqrt{h}\left[1 + 2\,\mathrm{dn}\frac{2K}{2n+1} + 2\,\mathrm{dn}\frac{4K}{2n+1} + \dots + 2\,\mathrm{dn}\frac{2nK}{2n+1}\right]},$$

$$B_m = \frac{2\sqrt{h}\,\mathrm{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\,\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\left[1 + 2\,\mathrm{dn}\frac{2K}{2n+1} + \dots + 2\,\mathrm{dn}\frac{2nK}{2n+1}\right]},$$

$$C_m = \frac{\mathrm{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}{\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}}h.$$

Bemerken wir, dass

$$\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}$$

für $m = 0$ in die Einheit übergeht und den Werth nicht ändert, wenn $m$ durch $-m$ ersetzt wird, so können wir die Summe

$$1 + 2\operatorname{dn}\frac{2K}{2n+1} + 2\operatorname{dn}\frac{4K}{2n+1} + \dots + 2\operatorname{dn}\frac{2nK}{2n+1}$$

unter der Form

$$\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}$$

schreiben, wo angenommen wird, dass die Summe sich über alle Werthe

$$m = -n\,,\; -(n-1)\,,\; \dots,\; -1\,, 0\,, 1\,,\; \dots,\; n-1\,,\; n$$

erstreckt. Demzufolge erhalten wir

$$A = \frac{1}{l\sqrt{h}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}\,, \qquad B_m = \frac{2\sqrt{h}\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}$$

und

$$\frac{B_m}{C_m + x} = \frac{2\sqrt{h}\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}{\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1}}h + x}$$

$$= \frac{2\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{l\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{h}}{x\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1} + h\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Weil der Ausdruck

$$\frac{\operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}}{\sum \operatorname{dn}\frac{2mK}{2n+1}} \cdot \frac{\sqrt{h}}{x\operatorname{sn}^2\frac{2mK}{2n+1} + h\operatorname{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}$$

für $m = 0$ in

$$\frac{1}{l\sqrt{h}\sum \mathrm{dn}\frac{2mK}{2n+1}} = A$$

übergeht und unverändert bleibt, wenn $m$ das Zeichen ändert, so giebt er, indem man über alle die Werthe

$$m = -n\,,\ -(n-1)\,,\ \ldots\,,\ -1\,,\ 0\,,\ 1\,,\ \ldots\,,\ n-1\,,\ n,$$

summirt, die Summe

$$A + \frac{B_1}{C_1 + x} + \frac{B_2}{C_2 + x} + \ldots + \frac{B_n}{C_n + x}\,.$$

Folglich ergiebt sich aus der Gleichung (5) folgende Formel zur Bestimmung des Radicales $\sqrt{\frac{1}{x}}$, vorausgesetzt, dass $x$ die Grenzen $x = 1$, $x = h$ nicht überschreitet:

$$\sqrt{\frac{1}{x}} = \frac{\sum \dfrac{\sqrt{h}\,\mathrm{dn}\dfrac{2mK}{2n+1}}{x\,\mathrm{sn}^2\dfrac{2mK}{2n+1} + h\,\mathrm{cn}^2\dfrac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta}\sum \mathrm{dn}\dfrac{2mK}{2n+1}}\,. \tag{7}$$

§ 5. Aus der Gleichung (7) ist es nicht schwer eine Formel abzuleiten, welche die Grenzwerthe des Integrales

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\,du$$

giebt, und zwar mit Hülfe von Integralen, welche die Function $V$ ausserhalb des Radicalzeichens enthalten. Dazu ist nothwendig, dass die Functionen $U$ und $V$ für alle Werthe der Veränderlichen $u$ zwischen den Integrationsgrenzen positiv bleiben.

Wenn durch

$$M\,,\ M_0 < M$$

die Grenzen bezeichnet werden, welche die Function $V$ dabei nicht überschreitet, so bleibt

$$\frac{V}{M_0}$$

zwischen den Grenzen

$$1\,,\,\frac{M}{M_0}$$

eingeschlossen, oder zwischen den Grenzen

$$1\,,\,h$$

indem

$$h=\frac{M}{M_0}$$

gesetzt wird. Hieraus geht hervor, dass für alle Werthe von $u$, über welche das Integral

$$\int\frac{U}{\sqrt{V}}du$$

ausgedehnt wird, die Gleichung (7) für

$$x=\frac{V}{M_0}$$

anwendbar ist, wenn

$$h=\frac{M}{M_0}.$$

Führen wir also diese Ausdrücke für $x$ und $h$ in (7) ein, so ergiebt sich

$$\sqrt{\frac{M_0}{V}}=\frac{\sum\dfrac{\sqrt{M_0M}\,\mathrm{dn}\,\dfrac{2mK}{2n+1}}{V\,\mathrm{sn}^2\dfrac{2mK}{2n+1}+M\,\mathrm{cn}^2\dfrac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta}\sum\mathrm{dn}\,\dfrac{2mK}{2n+1}}$$

oder nach Theilung durch $\sqrt{M_0}$:

$$\sqrt{\frac{1}{V}}=\frac{\sum\dfrac{\sqrt{M}\,\mathrm{dn}\,\dfrac{2mK}{2n+1}}{V\,\mathrm{sn}^2\dfrac{2mK}{2n+1}+M\,\mathrm{cn}^2\dfrac{2mK}{2n+1}}}{l^{2\theta}\sum\mathrm{dn}\,\dfrac{2mK}{2n+1}}.$$

Da der Annahme gemäss die Function $U$ für alle Werthe von $u$, über welche das Integral

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\,du$$

sich erstreckt, positiv bleibt, so erhält man aus dieser Gleichung

(8) $$\int \frac{U}{\sqrt{V}}\,du = \frac{\sum \int \frac{\sqrt{M}\,\mathrm{dn}\,\frac{2mK}{2n+1}\,U\,du}{\sqrt{V\,\mathrm{sn}^2\frac{2mK}{2n+1} + M\,\mathrm{cn}^2\frac{2mK}{2n+1}}}}{l^{2\theta}\sum \mathrm{dn}\,\frac{2mK}{2n+1}}.$$

Weil

$$h = \frac{M}{M_0},$$

so wird mit Rücksicht auf (6)

(9) $$M_0 = M(1 - k^2).$$

Dies ist eine Relation zwischen

$$M,\ M_0,$$

— den Grenzwerthen, die die Function $V$ bei der Integration nicht überschreiten darf — und dem Modul

$$k,$$

der zur Bildung der Formel (8) und der Gleichung (4) dient.

Indem wir der Kürze halber

$$\mathrm{sn}\,\frac{2mK}{2n+1}$$

durch

$$s_m$$

bezeichnen, erhalten wir

$$\mathrm{cn}\,\frac{2mK}{2n+1} = \sqrt{1 - s_m^2}, \qquad \mathrm{dn}\,\frac{2mK}{2n+1} = \sqrt{1 - k^2 s_m^2},$$

$$\sum \mathrm{dn}\,\frac{2mK}{2n+1} = 1 + 2\sqrt{1 - k^2 s_1^2} + 2\sqrt{1 - k^2 s_2^2} + \ldots + 2\sqrt{1 - k^2 s_n^2}.$$

Setzen wir ferner

$$(10)\qquad S = 1 + 2\sqrt{1 - k^2 s_1^2} + 2\sqrt{1 - k^2 s_2^2} + \ldots + \sqrt{1 - k^2 s_n^2}$$

und

$$(11)\qquad F(s) = \frac{\sqrt{M}\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int \frac{U du}{V s^2 + M(1 - s^2)},$$

so wird die Gleichung (8)

$$(12)\qquad \int \frac{U}{\sqrt{V}} du = \frac{1}{l^{2\theta}}[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)].$$

Weil die Grösse $\theta$ zwischen 0 und 1 eingeschlossen ist, so giebt diese Gleichung die folgenden beiden Ausdrücke für die Grenzwerthe des Integrales

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du:$$

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du \overline{\overline{>}} F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n),$$

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du \overline{\overline{<}} \frac{1}{l^2}[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)],$$

wo die Grösse $l$ gemäss der Gleichung (4) bestimmt wird, aus der hervorgeht, dass $l$, bei wachsendem $n$, der Einheit sich rasch nähert.

§ 6. Indem wir jetzt zur Anwendung der abgeleiteten Formeln übergehen, beginnen wir mit dem Falle

$$U = 1, \qquad V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$$

wo $\lambda < 1$. Die untere Grenze des Integrales

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}} du = \int \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

möge 0 sein; alsdann wird der grösste Werth der Function

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$$

innerhalb der Integrationsgrenzen 1 sein, und daher können wir in Übereinstimmung mit unserer Annahme über die Bezeichnung setzen

$$M = 1.$$

Die Gleichung (9) giebt nun

$$M_0 = 1 - k^2,$$

wo $M_0$ die untere Grenze von

$$V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u$$

bedeutet, für welche die Formel (12) anwendbar ist. Da die Function $V$ für die Werthe der Veränderlichen $u$, über welche das Integral

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

sich erstreckt, über die Grenze $M_0$ nicht hinausgehen darf, so muss für alle diese Werthe von $u$

$$1 - \lambda^2 \sin^2 u \overline{\overline{>}} 1 - k^2$$

und folglich

$$\sin u \overline{\overline{<}} \frac{k}{\lambda}.$$

Wenn

$$\lambda \leqq k,$$

so wird diese Bedingung offenbar für jeden reellen Werth von $u$ erfüllt. Für den Fall

$$\lambda \leqq k$$

kann also die Formel (12) auf das Integral

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

angewandt werden, wie gross $u$ auch sein mag.

Im Falle

$$\lambda > k$$

wird dieser Bedingung genügt nur von solchen Werthen von $u$, die

$$\arcsin \frac{\lambda}{k}$$

nicht überschreiten; folglich können dann unsere Formeln auf das Integral

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

angewandt werden, nur wenn der Bedingung

$$u \overline{\overline{<}} \arcsin \frac{\lambda}{k}$$

genüge geleistet wird.

Wenn wir in der Formel (11)

$$U = 1, \qquad V = 1 - \lambda^2 \sin^2 u, \qquad M = 1$$

setzen und 0 als untere Integrationsgrenze nehmen, so finden wir im vorliegenden Falle

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int_0^u \frac{du}{(1 - \lambda^2 \sin^2 u) s^2 + 1 - s^2}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S \sqrt{1 - \lambda^2 s^2}} \operatorname{arc\,tang} (\sqrt{1 - \lambda^2 s^2} \operatorname{tang} u).$$

Mit Hülfe dieser Function so wie der Grössen

$$s_1, s_2, \ldots, s_n, S$$

die durch eine elliptische Function (§ 5) mit dem Modul $k$ bestimmt werden, finden wir mit Rücksicht auf (12) eine Gleichung, welche die Grenzwerthe des Integrales

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

geben, Grenzwerthe, die bei wachsendem $n$ sich einander sehr rasch nähern.

§ 7. Bei der speciellen Annahme

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

wird

$$q = e^{-\pi},$$

und die Gleichung (4), durch welche die Grösse $l$ für die verschiedenen Werthe von $n$ bestimmt wird, geht in die folgende über:

$$l^4 = 1 - 16e^{-(2n+1)\pi}\left(\frac{1 + e^{-(4n+2)\pi} + e^{-(12n+6)\pi} + \ldots}{1 + e^{-(2n+1)\pi} + e^{-(6n+3)\pi} + \ldots}\right)^8.$$

Diese Gleichung giebt für

$$n = 1, 2, \ldots$$

resp.

$$l^2 = 0.9993549,$$

$$l^2 = 0.9999988,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus zu ersehen ist, wie die Grenzwerthe des Integrales

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}},$$

die mit Hülfe der Gleichung (12) erhalten werden, bei wachsendem $n$ sich einander rasch nähern.

Setzen wir nun

$$n = 1$$

so erhalten wir

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}}[F(0) + 2F(s_1)].$$

Für

$$k = \sqrt{\frac{1}{2}}, \qquad n = 1$$

geht die Gleichung, welche $S$ bestimmt, über in

$$S = 1 + 2\sqrt{1 - \frac{1}{2} s_1^2}$$

und

$$\operatorname{sn} \frac{2K}{3} = s_1$$

wird gleich 0.9002226; daher finden wir

$$S = 2.5424652.$$

Für $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ gestaltet sich also (11) folgendermassen

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2} s^2} \operatorname{arc\,tang} (\sqrt{1 - \lambda^2 s^2} \operatorname{tang} u)}{2.5424652 \sqrt{1 - \lambda^2 s^2}}.$$

Setzen wir hier

$$s = 0, \qquad s = s_1 = 0.9002226,$$

so bekommen wir

$$F(0) = 0.3933195 u,$$

$$F(s_1) = \frac{0.3033402 \operatorname{arc\,tang} (\sqrt{1 - 0.8104007 \lambda^2} \operatorname{tang} u)}{\sqrt{1 - 0.8104007 \lambda^2}}.$$

Diese Ausdrücke, in die Gleichung (12) eingeführt, geben folgende Formel zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}:$$

$$\frac{1}{l^{2\theta}} \left[ 0.3933195 u + \frac{0.6066804 \operatorname{arc\,tang} (\sqrt{1 - 0.8104007 \lambda^2} \operatorname{tang} u)}{\sqrt{1 - 0.8104007 \lambda^2}} \right].$$

Für

$$n = 2$$

geht die Gleichung (12) im vorliegenden Falle über in

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}} = \frac{1}{l^{2\theta}}\left[Au + \frac{B_1}{R_1}\operatorname{arc\,tang}(R_1 \operatorname{tang} u) + \frac{B_2}{R_2}\operatorname{arc\,tang}(R_2 \operatorname{tang} u)\right].$$

wo

$$A = 0.2360679, \qquad B_1 = 0.4188060, \qquad B_2 = 0.3451258,$$
$$R_1 = \sqrt{1 - 0.4262987\lambda^2}, \qquad R_2 = \sqrt{1 - 0.9313130\lambda^2}.$$

Ähnliche Formeln in Bezug auf das Integral

$$\int_0^u \frac{1 + p\sin^2 u}{1 + q\sin^2 u}\frac{du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

werden aus (12) erhalten, wenn gesetzt wird:

$$U = \frac{1 + p\sin^2 u}{1 + q\sin^2 u}, \qquad V = 1 - \lambda^2\sin^2 u.$$

§ 8. Wenn wir in (12) für $U$ und $V$ verschiedene Functionen nehmen, so erhalten wir Formeln zur Bestimmung der Grenzwerthe von Integralen von der Form

$$\int \frac{U}{\sqrt{V}}du,$$

deren Berechnung nicht selten grosse Schwierigkeiten darbietet. In der Weise finden wir für

$$V = 1 - \lambda^2\sin^2 u, \qquad U = \Phi(\operatorname{tang} u),$$

wo $\Phi(\operatorname{tang} u)$ eine Function ist, die das Zeichen $+$ innerhalb der Integrationsgrenzen behält:

$$\int_0^u \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}du = \frac{1}{l^{2\theta}}[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)],$$

wo

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int\limits_0^u \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{1 - \lambda^2 s^2 \sin^2 u}\, du.$$

Nach dem, was im § 6 bemerkt wurde, finden diese Formeln für jedes $u$ statt, wenn

$$\lambda \leqq k.$$

Wenn diese Bedingung erfüllt wird, und $\frac{\pi}{2}$ als obere Grenze genommen, so leiten wir aus diesen Formeln die folgende ab:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}\, du = \frac{1}{l^{2\theta}}[F(0) + 2F(s_1) + 2F(s_2) + \ldots + 2F(s_n)],$$

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{1 - \lambda^2 s^2 \sin^2 u}\, du.$$

Setzen wir im letzten Integrale

$$\operatorname{tang} u = z,$$

so lässt sich dasselbe schreiben:

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{\Phi(z)\, dz}{1 + (1 - \lambda^2 s^2) z^2}.$$

Demnach geht die Gleichung (11), welche die Function $F(s)$ bestimmt, im vorliegenden Falle über in

$$F(s) = \frac{\sqrt{1 - k^2 s^2}}{S} \int\limits_0^{\infty} \frac{\Phi(z)\, dz}{1 + (1 - \lambda^2 s^2) z^2}.$$

Hieraus erhellt, dass die Formel, die wir zur Bestimmung des Integrales

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}\, du$$

erhalten haben, nur Integrale von der Form

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1+(1-\lambda^2 s^2)z^2}$$

enthält. Die Ausdrücke für diese Integrale sind für gewisse specielle Annahmen über die Function $\Phi(z)$ bekannt.

Beispielsweise für den Fall

$$\Phi(z) = z^{p-1}, \qquad 0 < p < 1,$$

finden wir

$$\int_0^\infty \frac{\Phi(z)\,dz}{1+(1-\lambda^2 s^2)z^2} = \int_0^\infty \frac{z^{p-1}\,dz}{1+(1-\lambda^2 s^2)z^2} = \frac{\pi}{2\sin\frac{p\pi}{2}(1-\lambda^2 s^2)^{\frac{p}{2}}},$$

und zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Phi(\operatorname{tang} u)\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}}$$

werden wir dann nach (12) haben:

$$F(s) = \frac{\pi\sqrt{1-k^2 s^2}}{2\sin\frac{p\pi}{2}(1-\lambda^2 s^2)^{\frac{p}{2}}\,S},$$

und folglich

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_1^2}{(1-\lambda^2 s_1^2)^p}}+\ldots+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_n^2}{(1-\lambda^2 s_n^2)^p}}}{l^{2\theta}\sin\frac{p\pi}{2}\,S}.$$

Führen wir hier den Ausdruck (10) für $S$ ein, so erhalten wir

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u\,du}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2 u}} = \frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta}\sin\frac{p\pi}{2}}\cdot\frac{1+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_1^2}{(1-\lambda^2 s_1^2)^p}}+\ldots+2\sqrt{\frac{1-k^2 s_n^2}{(1-\lambda^2 s_n^2)^p}}}{1+2\sqrt{1-k^2 s_1^2}+\ldots+2\sqrt{1-k^2 s_n^2}}.$$

In dem speciellen Falle, wo $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $n = 1$ angenommen werden, giebt diese Gleichung mit Rücksicht auf

$$s_1 = \operatorname{sn} \frac{2K}{3} = 0.9002226$$

zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u \, du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

für $\lambda \overline{\overline{<}} \sqrt{\frac{1}{2}}$ die folgende Formel

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta} \sin \frac{p\pi}{2}} \left[ 0.3933195 + \frac{0.6066805}{(1 - 0.8104007\lambda^2)^{\frac{p}{2}}} \right],$$

wo

$$l^2 = 0.9993549.$$

Setzen wir $n = 2$, mit Beibehaltung desselben Moduls, so finden wir zur Bestimmung des Integrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tang}^{p-1} u \, du}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 u}}$$

im Falle

$$\lambda \overline{\overline{<}} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

die Formel

$$\frac{\frac{1}{2}\pi}{l^{2\theta} \sin \frac{p\pi}{2}} \left[ 0.2360679 + \frac{0.4188060}{(1 - 0.4262987\lambda^2)^{\frac{p}{2}}} + \frac{0.3451258}{(1 - 0.9313130\lambda^2)^{\frac{p}{2}}} \right],$$

wo

$$l^2 = 0.9999988.$$