SUR UNE CLASSE DE TRANSCENDANTES NOUVELLES

PAR

EMILE PICARD
À PARIS.

(Premier mémoire.)

Je me propose, dans ce travail, de démontrer l'existence d'une classe de transcendantes nouvelles qui généraliseront les fonctions doublement périodiques. Les fonctions que nous allons considérer admettent toutes une période Ω, mais le changement de z en $z + \Omega'$ modifie les fonctions de la manière suivante. Soit

$$\begin{aligned} u' &= R_1(u, v, \ldots, w), \\ v' &= R_2(u, v, \ldots, w), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ w' &= R_m(u, v, \ldots, w), \end{aligned}$$

une substitution *birationnelle* quelconque, relative à m lettres $u, v, \ldots, w$. Je me propose de montrer qu'*il existe une infinité de systèmes de m fonctions*

$$f(z),\ \varphi(z), \ldots, \psi(z)$$

uniformes dans tout le plan, n'ayant que des discontinuités polaires, et jouissant des propriétés suivantes:

Elles admettent la période Ω, et on a, par le changement de z en $z + \Omega'$

$$\begin{aligned} f(z + \Omega') &= R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \varphi(z + \Omega') &= R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(z + \Omega') &= R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)]. \end{aligned}$$

(Dans la suite, pour la commodité des calculs, nous poserons, ce qui ne diminue en rien la généralité: $\Omega = \omega' i$, $\Omega' = \omega$, en désignant par ω et ω' des quantités réelles positives.)

On trouvera simplement, dans ce premier mémoire, avec quelques propositions auxiliaires qui ne sont pas par elles-mêmes sans intérêt, la démonstration de l'existence des transcendantes dont je viens de parler. Le mode de démonstration employé me paraît digne d'attention; j'applique à un problème relatif à la théorie des fonctions ces méthodes d'approximations successives si fécondes dans la théorie des équations différentielles ordinaires et des équations aux dérivées partielles, méthodes d'autant plus intéressantes qu'on peut varier presque à l'infini les conditions de leur application, et je ne doute pas que des considérations plus ou moins analogues à celles dont je fais ici usage ne puissent être utilisées pour démontrer l'existence d'autres classes de fonctions.

C'est la considération de certaines équations différentielles ordinaires se rattachant aux travaux de M. SOPHUS LIE sur les groupes de transformations qui m'a conduit à l'étude des transcendantes précédentes: c'est un sujet que j'aborderai dans un second mémoire. On trouvera un résumé très succinct de ces recherches dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences (9 et 30 octobre 1893).

I.

1. Considérons m polynomes

$$P_1(u, v, \ldots, w), \; P_2(u, v, \ldots, w), \; \ldots, \; P_m(u, v, \ldots, w)$$

dépendant de m variables $u, v, \ldots, w$. On suppose que ces polynomes s'annulent pour

$$u = v = \ldots = w = 0.$$

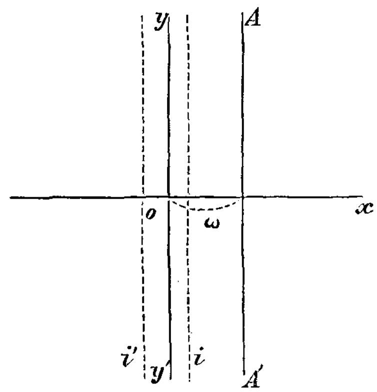
Soient ω et ω' deux constantes réelles et positives données. *Nous nous proposons d'abord de faire voir qu'on peut trouver une infinité de systèmes de m fonctions analytiques*

$$f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$$

de la variable complexe x, uniformes à droite de l'axe Oy (on pose $z = x + iy$), admettant la période $\omega' i$ et enfin satisfaisant aux équations fonctionnelles suivantes:

$$f(z + \omega) = P_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\varphi(z + \omega) = P_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(z + \omega) = P_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)].$$

Fig. 1.



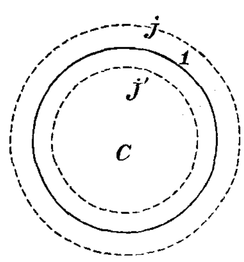
2. Démontrons d'abord un premier lemme qui va jouer dans notre analyse un rôle fondamental. Je désigne par $f(z)$ et $P(z)$ deux fonctions uniformes dans tout le plan, ayant $\omega' i$ pour période. En outre on a l'identité

$$f(z + \omega) = \mu f(z) + P(z),$$

μ étant une constante, qui ne satisfait pas à une relation que nous écrirons dans un moment. De plus, ayant tracé une suite de bandes parallèles à Oy et d'épaisseur ω, on suppose que $f(z)$ est holomorphe dans la première bande (et un peu à droite et à gauche de cette bande), tandis qu'on suppose seulement $P(z)$ holomorphe dans une bande étroite ii' contenant Oy. Soit dans cette dernière bande,

$$P(z) = \sum \left(A_\nu x^\nu + \frac{B_\nu}{x^\nu}\right)$$

Fig. 2.



en posant $x = e^{\frac{2\pi z}{\omega'}}$. Dans le plan de la variable x, nous aurons la convergence dans la couronne comprise entre deux circonférences j et j', à l'intérieur de laquelle se trouve la circonférence de rayon *un*. Supposons que dans cette couronne et sur les circonférences j et j' elles-mêmes, le maximum du module de $P(z)$ soit M. Il est facile d'avoir le développement de $f(z)$; soit:

$$f(z) = \sum \left(A'_\nu x^\nu + \frac{B'_\nu}{x^\nu}\right).$$

Nous poserons $e^{\frac{2\pi\omega}{\omega'}} = \lambda$; on a alors

$$A'_\nu(\lambda^\nu - \mu) = A_\nu, \qquad B'_\nu\left(\frac{1}{\lambda^\nu} - \mu\right) = B_\nu.$$

Nous supposons que, pour aucune valeur de l'entier positif ν, on n'ait

$$\text{soit } \mu = \lambda^\nu, \qquad \text{soit } \mu = \frac{1}{\lambda^\nu}.$$

Remplaçant enfin λ par $\frac{1}{\theta}$ $(\theta < 1)$, nous avons

$$A'_\nu = \frac{\theta^\nu}{1 - \mu\theta^\nu} A_\nu, \qquad B'_\nu = \frac{B_\nu}{\theta^\nu - \mu}.$$

On a donc

$$f(z) = \sum \frac{\theta^\nu}{1 - \mu\theta^\nu} A_\nu x^\nu + \frac{B_\nu}{\theta^\nu - \mu}\frac{1}{x^\nu},$$

ce que l'on peut écrire

$$f(z) = -\frac{1}{\mu}\sum \frac{B_\nu}{x^\nu} + \sum \frac{A_\nu \theta^\nu x^\nu}{1 - \mu\theta^\nu} + \sum \frac{B_\nu \theta^\nu}{\mu(\theta^\nu - \mu)x^\nu}.$$

Je dis que nous allons pouvoir trouver une limite de $|f(z)|$ sur les circonférences j et j'. Prenons d'abord la circonférence extérieure j. Les trois séries, dont la somme est égale à $f(z)$, convergent toutes sur cette circonférence. D'autre part A_ν et B_ν ont des modules moindres respectivement que

$$\frac{M}{\rho^\nu} \quad \text{et} \quad M\rho'^\nu$$

en désignant par ρ et ρ' les rayons des circonférences j et j'. On peut donc certainement fixer un nombre a, *indépendant de M*, tel que l'on ait

$$|f(z)| < a.M, \qquad \text{(sur la circonférence } j)$$

a dépend seulement de ω, ω', μ et de la position des droites i et i'.

Examinons maintenant la circonférence j'. Nous écrirons $f(z)$ sous la forme

$$f(z) = -\frac{1}{\mu}P(z) + \frac{1}{\mu}\Sigma A_\nu x^\nu + \sum \frac{A_\nu \theta^\nu x^\nu}{1 - \theta^\nu} + \sum \frac{B_\nu \theta^\nu}{\mu(\theta^\nu - \mu)x^\nu}.$$

Les trois séries du second membre convergent sur j', et on a de suite une limite supérieure de leur module en remplaçant A_ν et B_ν par leur module maximum; quant à $P(z)$, il a pour module maximum M. On pourra donc trouver une constante a' ne dépendant pas de M et telle que l'on ait

$$|f(z)| < a'.M \qquad \text{(sur la circonférence } j'\text{)}.$$

En désignant par a la plus grande des deux constantes positives a et a' nous aurons

$$|f(z)| < a.M$$

sur les circonférences j et j', et, par suite, dans l'aire annulaire limitée par ces circonférences. Nous avons donc le premier lemme que nous voulions établir. *On peut trouver une constante a telle que l'on ait dans la bande ii'*

$$|f(z)| < a.M,$$

a ne dépendant pas de M, mais seulement de ω, ω', μ et de la position des droites i et i'.

3. Un second lemme nous sera encore utile. Soient

$$f(x, y, \ldots, t), \ \varphi(x, y, \ldots, t), \ \ldots, \ \psi(x, y, \ldots, t),$$

m fonctions des m lettres $x, y, \ldots, t$ holomorphes dans le voisinage de $x = y = \ldots = t = 0$ et s'annulant pour ces valeurs. Nous considérons la transformation

$$(1) \qquad \begin{cases} x' = f(x, y, \ldots, t), \\ y' = \varphi(x, y, \ldots, t), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ z' = \psi(x, y, \ldots, t). \end{cases}$$

On peut, en général, par une substitution linéaire convenable faire en sorte que les termes du premier degré dans $f, \varphi, \ldots, \psi$ se réduisent respectivement à

$$\mu x, \nu y, \ldots, \pi t.$$

Faisons donc cette hypothèse, et soit depuis $|\mu| < 1$, $|\nu| < 1$, ..., $|\pi| < 1$. Nous voulons faire la remarque à peu près évidente que, *partant d'un système de valeurs* $(x, y, \ldots, t)$ *suffisamment voisines de zéro et effectuant un nombre indéfini de fois la substitution* (1), *les valeurs de* $x, y, \ldots, t$ *auront zéro pour limites.*

La démonstration est immédiate. Soit λ le module maximum de $\mu, \nu, \ldots, \pi$ ($\lambda < 1$), et désignons par M le module maximum des fonctions

$$f - \mu x, \ \varphi - \nu y, \ \ldots, \ \psi - \pi t$$

quand $x, y, \ldots, t$ reste à l'intérieur du cercle de rayon r ayant l'origine pour centre. Il suffira de faire la démonstration pour la transformation

$$x' = \lambda x + \frac{M}{1 - \frac{x + y + \ldots + t}{a}} - M - M\frac{x + y + \ldots + t}{a},$$

$$y' = \lambda y + \frac{M}{1 - \frac{x + y + \ldots + t}{a}} - M - M\frac{x + y + \ldots + t}{a},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t' = \lambda t + \frac{M}{1 - \frac{x + y + \ldots + t}{a}} - M - M\frac{x + y + \ldots + t}{a},$$

en donnant à $x, y, \ldots, t$ des valeurs réelles et positives. Or, dès la première transformation, les valeurs des différentes lettres deviennent égales, et nous sommes ramené par suite au cas d'une seule équation qui est bien connu, et est entièrement évident puisque de la relation

$$x' = \lambda x + \ldots$$

où λ est compris entre 0 et *un*, on conclut de suite, pour x suffisamment petit

$$x' < hx,$$

h étant compris entre λ et *un*. Donc au bout de n transformations successives, la valeur de x sera inférieure à

$$h^n x$$

et tendra par suite vers *zéro* quand n augmentera indéfiniment.

4. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théorème énoncé au paragraphe 1. En laissant de côté certains cas exceptionnels, on peut supposer en faisant une substitution linéaire convenable que les termes du premier degré dans

$$P_1(u, v, \ldots, w), \ P_2(u, v, \ldots, w), \ \ldots, \ P_m(u, v, \ldots, w)$$

se réduisent respectivement à

$$\mu_1 u, \mu_2 v, \ldots, \mu_m w$$

et écrivons

$$P_1 = \mu_1 u + Q_1, \qquad P_2 = \mu_2 v + Q_2, \quad \ldots, \quad P_m = \mu_m w + Q_m$$

les polynomes Q commençant nécessairement par des termes du second degré.

Ceci admis, en réduisant les P à leur premier terme, nos équations fonctionnelles deviennent

$$\begin{aligned} f(z+\omega) &= \mu_1 f(z), \\ \varphi(z+\omega) &= \mu_2 \varphi(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \psi(z+\omega) &= \mu_m \psi(z). \end{aligned}$$

On peut y satisfaire en prenant pour $f, \varphi, \ldots, \psi$ des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, admettant le multiplicateur *un* pour la période $\omega' i$ et respectivement les multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ pour la période ω.

Choisissons, arbitrairement d'ailleurs, un système

$$f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)$$

de fonctions doublement périodiques de seconde espèce, ayant les mêmes pôles que nous supposerons simples dans un rectangle de périodes.

Ces fonctions vont nous servir de première approximation.

Nous traçons à droite de Oy, dans le plan de la variable z, des parallèles à cet axe distantes de ω, soit

$$x = \omega, 2\omega, \ldots.$$

Nous avons ainsi une succession de bandes de largeur ω. Je considère alors les équations

$$(2)\qquad \begin{cases} f_1(z+\omega) = \mu_1 f_1(z) + Q_1[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)], \\ \varphi_1(z+\omega) = \mu_2 \varphi_2(z) + Q_2[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi_1(z+\omega) = \mu_m \psi_1(z) + Q_m[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)]. \end{cases}$$

Nous allons montrer qu'on peut trouver un système de fonctions uniformes $f_1(z), \varphi_1(z), \ldots, \psi_1(z)$ ayant la période $\omega' i$, satisfaisant à ces équations, et ayant *dans la première bande à droite de Oy* les mêmes pôles que $f_0(z), \ldots, \psi_0(z)$ (on peut supposer que ces dernières fonctions n'ont pas de pôles sur Oy) *avec les mêmes résidus.*

Faisons d'abord la démonstration en supposant que $f_0, \ldots, \psi_0$ n'ont qu'*un* pôle dans un rectangle de périodes. En désignant par p le degré des polynomes Q, nous pouvons satisfaire aux relations précédentes en prenant pour $f_1, \varphi_1, \ldots, \psi_1$ des polynomes de degré p en $f_0, \ldots, \psi_0$ et ne renfermant pas de terme du premier degré; ces relations détermineront dans ces polynomes les coefficients de tous les termes. Il ne pourrait y avoir d'impossibilité que si on avait une relation de la forme

$$\mu_1^{\nu_1} \mu_2^{\nu_2} \ldots \mu_m^{\nu_m} = \mu_i,$$

les ν étant des entiers positifs pour lesquels $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m \geqq 2$; *nous supposons qu'il n'existe pas entre les μ de relation de cette forme.* Au polynome trouvé pour f_1 on peut ajouter une fonction linéaire arbitraire de $f_0, \ldots, f_0^{(p-1)}$, soit

$$(\varepsilon)\qquad \alpha_0 f_0(z) + \alpha_1 f_0'(z) + \ldots + \alpha_{p-1} f_0^{(p-1)}(z).$$

La première des relations (2) ne cessera pas d'être satisfaite, quelles que soient les constantes α. Nous les déterminons de manière que $f_1(z)$ ait pour pôles simples les pôles de $f_0(z)$ situés dans la première bande avec le même résidu. On opère de même pour chacune des autres fonctions $\varphi_1(z), \ldots, \psi_1(z)$, qui se trouvent alors complètement déterminées.

Nous venons de supposer, dans la résolution des équations fonctionnelles (2), que $f_0, \ldots, \psi_0$ n'avaient qu'un seul pôle dans un rectangle de périodes. S'il y a plusieurs pôles, on détermine toujours de la même manière les polynomes de degré p en $f_0, \ldots, \psi_0$ ne renfermant pas de termes du premier degré, et au lieu d'ajouter ensuite une expression de la forme (ε) qui ne renfermerait pas assez de coefficients arbitraires, nous ajouterons l'expression générale d'une fonction doublement périodique de seconde espèce (aux multiplicateurs *un* et μ_1) décomposée en éléments simples et ayant pour pôles multiples d'ordre p les pôles de f_0. Nous pouvons alors disposer des coefficients de manière à avoir une fonction f_1 ayant pour pôles simples les pôles de f_0 avec les mêmes résidus respectifs.

Ayant ainsi déterminé $f_1, \varphi_1, \ldots, \psi_1$, nous continuons nos approximations. Des fonctions $f_1, \ldots, \psi_1$, on déduira des fonctions $f_2, \ldots, \psi_2$ absolument comme on a déduit $f_1, \ldots, \psi_1$ de $f_0, \ldots, \psi_0$. D'une manière générale, on a

$$f_n(z + \omega) = \mu_1 f_n(z) + Q_1[f_{n-1}(z), \varphi_{n-1}(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)],$$
$$\varphi_n(z + \omega) = \mu_2 \varphi_n(z) + Q_2[f_{n-1}(z), \varphi_{n-1}(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)],$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_n(z + \omega) = \mu_m \psi_n(z) + Q_m[f_{n-1}(z), \varphi_{n-1}(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)].$$

Tous les $f_n, \ldots, \psi_n$ ont respectivement les mêmes pôles que $f_0, \ldots, \psi_0$, *dans la première bande,* avec les mêmes résidus.

Nous devons maintenant nous poser la question suivante:

Ces approximations successives convergent-elles vers une limite? C'est là le point essentiel dans la démonstration, que nous allons maintenant examiner.

5. En posant d'une manière générale

$$f_n(z) = f_0(z) + F_n(z),$$
$$\varphi_n(z) = \varphi_0(z) + \Phi_n(z),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi_n(z) = \psi_0(z) + \Psi_n(z)$$

on a pour les fonctions $F_n, \ldots, \Psi_n$, *fonctions holomorphes dans la première bande*

$$(3)\begin{cases} F_n(z+\omega) = \mu_1 F_n(z) + Q_1[f_0 + F_{n-1}, \varphi_0 + \Phi_{n-1}, \ldots, \psi_0 + \Psi_{n-1}], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Psi_n(z+\omega) = \mu_n \Psi_n(z) + Q_m[f_0 + F_{n-1}, \varphi_0 + \Phi_{n-1}, \ldots, \psi_0 + \Psi_{n-1}]. \end{cases}$$

Supposons que dans la bande ii' (fig. 1), on ait

$$|f_0(z)| < M, \ \ldots, \ |\psi_0(z)| < M$$

et pareillement

$$|F_{n-1}(z)| < M_{n-1}, \ \ldots, \ |\Psi_{n-1}(z)| < M_{n-1}.$$

Remplaçons d'autre part dans $Q_1, \ldots, Q_m$ chaque coefficient par son module et désignons par q le polynome ainsi obtenu; nous aurons alors en nous reportant au lemme du paragraphe 1 et gardant pour a la signification de ce paragraphe (on prend pour a le plus grand des m nombres que donne le lemme)

$$|F_n(z)| < a.q(M + M_{n-1}, M + M_{n-1}, \ldots, M + M_{n-1}),$$

et cette inégalité valable dans la bande ii' s'applique aussi à $\Phi_n(z), \ldots, \Psi_n(z)$. Si donc nous posons

$$M_n = a.q(M + M_{n-1}, \ldots, M + M_{n-1})$$

nous pourrons écrire:

$$|F_n(z)| < M_n, \ \ldots, \ |\Psi_n(z)| < M_n \quad \text{(dans la bande } ii'\text{)}.$$

Or considérons la transformation

$$(4) \qquad x' = a.q(M + x, M + x, \ldots, M + x)$$

et cherchons si cette transformation effectuée n fois de suite sur une lettre x conduit vers une limite quand n augmente indéfiniment. On doit, conformément au lemme du paragraphe 2, former l'équation

$$x = a.q(M + x, \ldots, M + x).$$

Or si M est suffisamment petit, cette équation aura une racine voicine de zéro, puisque q est un polynome en $(M + x)$ commençant par un terme du second degré; il est clair que cette racine sera de l'ordre de M^2. D'autre part la dérivée du second membre de (4) par rapport à x sera visiblement aussi pour cette racine de l'ordre de M^2 et par suite d'un module moindre que *un*, si M est assez petit. Par conséquent en prenant la valeur initiale de x elle-même assez petite, la succession des valeurs déduites par la répétition de (4), tendra vers une limite et par conséquent toutes ces valeurs resteront moindres qu'un nombre K. On a ici comme valeur initiale de x la quantité M_1 qui est de l'ordre de M^2; nous sommes donc assuré que le nombre K est très petit quand M est lui-même très petit. Nous pouvons donc écrire que l'on a, *quel que soit* n

$$|F_n(z)| < K\,, \; \ldots\,, \; |\Psi_n(z)| < K, \quad \text{(dans la bande } ii'\text{)}$$

K étant une constante très petite en même temps que M.

6. Nous allons maintenant faire voir que

$$F_n(z)\,, \ldots\,, \Psi_n(z)$$

ont des limites, sous la condition que M soit assez petit. Nous avons

$$F_n(z + \omega) - F_{n-1}(z + \omega) = \mu_1(F_n(z) - F_{n-1}(z))$$
$$+ \; Q_1[f_0 + F_{n-1}\,, \ldots] - Q_1[f_0 + F_{n-2}\,, \ldots]$$

et des égalités analogues. Or, en s'appuyant sur les résultats du paragraphe précédent, on voit immédiatement que la différence qui forme les deux derniers termes du second membre est moindre que

$$\lambda \, . \, N_{n-1}\,,$$

λ désignant une constante indépendante de n et tendant vers zéro en même temps que M; quant à N_{n-1}, il représente le maximum des valeurs absolues des différences

$$F_{n-1}(z) - F_{n-2}(z)\;, \quad \Phi_{n-1}(z) - \Phi_{n-2}(z)\;, \quad \ldots\,, \quad \Psi_{n-1}(z) - \Psi_{n-2}(z)$$

dans la bande ii'. La lemme du paragraphe (1) nous donne donc

$$\begin{array}{ll} |F_n(z) - F_{n-1}(z)| < a\lambda . N_{n-1}, & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \text{(dans la bande } ii'\text{).} \\ |\Phi_n(z) - \Phi_{n-1}(z)| < a\lambda . N_{n-1}, & \end{array}$$

Ces inégalités sont fondamentales, et nous permettent d'achever la démonstration. On voit en effet que la série

$$F_1(z) + (F_2(z) - F_1(z)) + \dots + (F_n(z) - F_{n-1}(z)) + \dots$$

est convergente dans la bande ii', si on a

$$a\lambda < 1;$$

elle converge, dans ce cas, comme une progression géométrique décroissante. Or, l'inégalité précédente sera vérifiée si M est suffisamment petit: c'est là une condition que nous pouvons toujours réaliser, puisque les fonctions

$$f_0(z), \dots, \psi_0(z)$$

peuvent être multipliées par une constante arbitraire assez petite, avant de commencer le calcul des approximations successives. Nous arrivons donc alors à la conclusion suivante:

Quand n augmente indéfiniment, les fonctions

$$F_n(z), \Phi_n(z), \dots, \Psi_n(z)$$

convergent uniformément vers des limites

$$F(z), \Phi(z), \dots, \Psi(z),$$

z restant dans la bande ii'.

7. Les fonctions

$$F_n(z), \Phi_n(z), \dots, \Psi_n(z)$$

ayant des limites dans la bande ii', auront nécessairement aussi, d'après les relations (3), des limites dans la bande se déduisant de ii' par le changement de z en $z + \omega$. Ces limites notamment existeront sur la droite AA' (fig. 1), par suite dans toute la bande (yy', AA') et enfin évidemment, d'après la manière même dont nous y arrivons, un peu à droite et un peu à gauche de cette bande. Revenant maintenant à

$$f_n(z) = f_0(z) + F_n(z),$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi_n(z) = \psi_0(z) + \Psi_n(z)$$

nous voyons que les limites de

$$f_n(z), \dots, \psi_n(z)$$

sont les fonctions cherchées; désignons-les par $f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)$. Elles sont définies dans la première bande et un peu au delà à droite de AA' (il est inutile de parler du côté gauche). Les équations fonctionnelles elles mêmes

$$f(z+\omega) = P_1[f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)],$$
$$\varphi(z+\omega) = P_2[f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)],$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(z+\omega) = P_n[f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)]$$

définissent les fonctions de proche en proche dans le demi-plan à droite de Oy. Les valeurs des fonctions dans les différentes bandes à droite de Oy sont bien respectivement *les prolongements analytiques* les unes des autres, puisque les limites trouvées pour la première bande étaient susceptibles de s'étendre un peu au delà en satisfaisant aux équations fonctionnelles. *Nous avons donc démontré le théorème énoncé au paragraphe premier.* Il est à peine besoin d'ajouter que les fonctions $f, \varphi, \dots, \psi$ ne se réduisent pas à des constantes puisqu'elles ont des pôles dans la première bande.

II.

8. Quelques remarques sont nécessaires sur les hypothèses *d'inégalité* qu'exige la démonstration précédente.

D'abord, pour qu'on puisse appliquer le lemme du paragraphe 2, nous devons supposer que *l'égalité*

$$(5) \qquad \mu_i = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}}$$

ne peut être vérifiée, ν étant un entier quelconque positif ou négatif, pour aucune valeur de i entre 1 et m.

Nous avons fait ensuite une seconde hypothèse (§ 4) consistant *dans l'impossibilité d'une relation de la forme*

$$\mu_1^{\nu_1}\mu_2^{\nu_2}\ldots\mu_m^{\nu_m} = \mu_i$$

les ν étant des entiers positifs pour lesquels $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_m \geqq 2$. Au fond *cette restriction est inutile;* nous l'avons faite pour pouvoir calculer plus facilement nos fonctions approchées, mais un peu d'attention suffit pour montrer qu'une telle égalité n'est la cause d'aucune véritable difficulté. Nous nous sommes trouvé en définitive au paragraphe 4 devant le problème suivant: en désignant par $\psi(z)$ une fonction de seconde espèce pour laquelle on a

$$\psi(z + \omega' i) = \psi(z), \qquad \psi(z + \omega) = \lambda\psi(z),$$

trouver une fonction uniforme $f(z)$ ayant la période $\omega' i$ et telle que

$$f(z + \omega) = \mu f(z) + \psi(z).$$

Le cas que nous avons examiné correspondait à $\lambda \neq \mu$. On a de suite en effet une solution de l'équation précédente, en prenant

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{\lambda - \mu}.$$

Cette solution ne convient plus si $\lambda = \mu$; mais il suffit de considérer ce cas comme un cas limite. L'élément simple servant à décomposer $\psi(z)$

est fonction de son pôle, d'un certain coefficient et de λ; pour des valeurs regardées comme numériques des divers pôles et des divers coefficients, il ne reste que λ de variable, et nous pouvons regarder $\psi(z)$ comme fonction de z et λ, soit

$$\psi(z, \lambda).$$

Au lieu de prendre la valeur écrite plus haut pour $f(z)$, on peut prendre

$$f(z) = \frac{\psi(z, \lambda) - \psi(z, \mu)}{\lambda - \mu}$$

et par suite pour $\lambda = \mu$, nous avons

$$f(z) = \frac{\partial \psi(z, \lambda)}{\partial \lambda}.$$

C'est une fonction uniforme de z avec la période $\omega' i$ et satisfaisant à la relation

$$f(z + \omega) = \lambda f(z) + \psi(z),$$

et que l'on pourra évidemment exprimer au moyen des transcendantes de la théorie des fonctions elliptiques.

En résumé, *nos hypothèses d'inégalité se réduisent donc à l'impossibilité de relations de la forme* (5).

9. Je ferai encore une remarque importante relativement à l'emploi des approximations successives pour obtenir les fonctions cherchées. Nous sommes parti des fonctions de seconde espèce

$$f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z).$$

Nous aurions pu partir de fonctions uniformes quelconques admettant la période $\omega' i$, holomorphes dans la bande ii', et admettant une file de pôles (supposés simples) dans la première bande (yy', AA'). Il nous faut, dans ces nouvelles conditions, compléter un peu le lemme du paragraphe 2. Reprenons l'équation fonctionnelle

$$f(z + \omega) = \mu f(z) + P(z),$$

$P(z)$ désignant une fonction uniforme de période $\omega' i$, et holomorphe dans la bande ii'. Existe-t-il une fonction uniforme, holomorphe entre i' et

AA', et qui satisfasse à l'équation fonctionnelle ci-dessus? Reprenons le développement

$$P(z) = \Sigma A_\nu e^{\frac{2\nu\pi z}{\omega'}} + B_\nu e^{-\frac{2\nu\pi z}{\omega'}}$$

valable dans la bande ii'. En posant

$$f(z) = \Sigma A'_\nu e^{\frac{2\nu\pi z}{\omega'}} + B'_\nu e^{-\frac{2\nu\pi z}{\omega'}},$$

et en admettant que $f(z)$ soit holomorphe entre i' et AA', nous pouvons avec l'équation fonctionnelle déterminer les coefficients de $f(z)$. On obtient ainsi (§ 2)

$$f(z) = \sum \frac{A_\nu}{1 - \mu\theta^\nu} e^{\frac{2\nu\pi}{\omega'}(z-\omega)} + \frac{B_\nu}{\theta^\nu - \mu} e^{-\frac{2\nu\pi}{\omega'}z}.$$

D'ailleurs en désignant par d et d' les distances de l'origine à la droite i et à la droite i', on a

$$|A_\nu| < \frac{M}{e^{\frac{2\nu\pi d}{\omega'}}}, \qquad |B_\nu| < Me^{-\frac{2\nu\pi d'}{\omega'}}.$$

Il en résulte que la série représentant $f(z)$ sera certainement convergente pour

$$-d' < x < \omega + d, \qquad (z = x + iy).$$

Ce résultat obtenu, il n'y a aucune modification essentielle à faire à la série de nos raisonnements. Les fonctions successives données par les approximations

$$f_n(z), \varphi_n(z), \ldots, \psi_n(z)$$

auront les mêmes pôles dans la première bande que $f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)$. La convergence des approximations successives sera certaine, si $f_0, \ldots, \psi_0$ ont un module suffisamment petit, dans la bande ii' et dans celle qui s'en déduit par le changement de z en $z + \omega$.

III.

10. Au lieu des polynomes $P_1, P_2, \dots, P_m$ du paragraphe 1, considérons maintenant m *fonctions rationnelles*

$$R_1(u, v, \dots, w), \; R_2(u, v, \dots, w), \; \dots, \; R_m(u, v, \dots, w)$$

de m lettres $u, v, \dots, w$.

Nous allons montrer qu'on peut trouver des fonctions

$$f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)$$

uniformes dans la moitié du plan à droite de Oy, admettant la période $\omega' i$ et satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} f(z+\omega) = R_1[f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)], \\ \varphi(z+\omega) = R_2[f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \psi(z+\omega) = R_m[f(z), \varphi(z), \dots, \psi(z)]. \end{array} \right.$$

Nous ne diminuons pas la généralité en supposant que les R s'annulent pour $u = v = \dots = w = 0$ et que le dénominateur commun des R réduits à avoir même dénominateur prend la valeur *un* pour $u = v = \dots = w = 0$.

Nous ramènerons bien facilement ce cas au cas précédent. Remplaçons en effet $f, \varphi, \dots, \psi$ respectivement par

$$\frac{f}{1+\chi}, \frac{\varphi}{1+\chi}, \dots, \frac{\psi}{1+\chi}.$$

Les seconds membres des équations fonctionnelles deviendront des fractions rationnelles en $f, \varphi, \dots, \psi$ et χ avec même dénominateur. Nous aurons ainsi

$$\frac{f(z+\omega)}{1+\chi(z+\omega)} = \frac{P_1[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]}{1+P_{m+1}[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]},$$

$$\frac{\varphi(z+\omega)}{1+\chi(z+\omega)} = \frac{P_2[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]}{1+P_{m+1}[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\psi(z+\omega)}{1+\chi(z+\omega)} = \frac{P_m[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]}{1+P_{m+1}[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi]},$$

les P étant des polynomes. Les m premiers $P_1, P_2, \ldots, P_m$ s'annulent pour $f = \varphi = \ldots = \psi = 0$, quel que soit χ. Le polynome P_{m+1} s'annule pour $f = \varphi = \ldots = \psi = \chi = 0$.

Nous sommes donc amené à écrire les $m + 1$ équations

$$(7)\qquad \begin{cases} f(z+\omega) = P_1[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi], \\ \varphi(z+\omega) = P_2[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi], \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \chi(z+\omega) = P_{m+1}[f, \varphi, \ldots, \psi, \chi], \end{cases}$$

ce qui nous ramène au cas précédemment étudié. Les nombres μ qui jouent un rôle important s'obtiennent immédiatement. Les m premiers seront les racines de l'équation relative à la substitution linéaire formée avec les termes du premier degré, dans les numérateurs des R; quant au dernier μ_{m+1} il sera égal au degré des polynômes P. Les conditions d'inégalité qui doivent être vérifiées (§ 8) sont donc faciles à former.

11. Il n'est pas inutile de s'assurer que les fonctions dont nous venons d'établir l'existence ne se réduisent pas à des constantes. Nous sommes certain d'obtenir par les équations fonctionnelles (7) des fonctions $f, \varphi, \ldots, \psi, \chi$ qui ne se réduisent pas à des constantes; c'est ce que nous avons déjà dit à la fin du paragraphe 7. On peut se donner arbitrairement dans la première bande les files de pôles avec le résidu correspondant. Dans ces conditions il ne pourra pas arriver en général que les quotients

$$\frac{f}{1+\chi}, \frac{\varphi}{1+\chi}, \ldots, \frac{\psi}{1+\chi}$$

se réduisent à des constantes. Il suffit en effet d'avoir dans la première bande pour $f, \varphi, \ldots, \psi, \chi$ deux pôles distincts (c'est à dire différents d'un multiple de $\omega' i$) avec des résidus dont les rapports sont, pour l'un ou l'autre pôle, différents; on est alors assuré que les quotients précédents ne peuvent se réduire à des constantes.

12. Jusqu'à présent, nous n'avons obtenu que des fonctions uniformes dans une moitié du plan. Supposons maintenant que la transformation *rationnelle*

$$
(\mathrm{S}) \qquad \begin{cases} u' = R_1(u, v, \ldots, w), \\ v' = R_2(u, v, \ldots, w), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ w' = R_m(u, v, \ldots, w), \end{cases}
$$

soit de plus *birationnelle,* c'est à dire que des équations précédentes on puisse tirer $u, v, \ldots, w$ en fonctions rationnelles de $u', v', \ldots, w'$.

D'après le paragraphe 10, nous pourrons trouver des fonctions périodiques de période $\omega' i$ satisfaisant aux équations (6) et uniformes dans la moitié du plan à droite de Oy. Il est facile de voir que, dans le cas où nous nous plaçons maintenant, *ces fonctions seront uniformes dans tout le plan.* On a en effet la substitution inverse donnant les relations

$$
\begin{aligned}
f(z) &= Q_1[f(z+\omega), \varphi(z+\omega), \ldots, \psi(z+\omega)], \\
\varphi(z) &= Q_2[f(z+\omega), \varphi(z+\omega), \ldots, \psi(z+\omega)], \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\psi(z) &= Q_m[f(z+\omega), \varphi(z+\omega), \ldots, \psi(z+\omega)],
\end{aligned}
$$

les Q étant des fonctions rationnelles. Les fonctions définis à droite de Oy s'étendront donc de proche en proche dans les bandes successives à gauche de Oy et cette extension sera évidemment une extension analytique.

Nous arrivons donc au théorème suivant qui est le principal résultat de ce travail:

Etant donnée une substitution birationnelle arbitraire (S), *on peut trouver une infinité de systèmes de fonctions*

$$f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$$

uniformes dans tout le plan avec des discontinuités exclusivement polaires, ayant la période $\omega' i$, et satisfaisant aux équations fonctionnelles

$$\begin{aligned} f(z+\omega) &= R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ \varphi(z+\omega) &= R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)], \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \psi(z+\omega) &= R_m[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)]. \end{aligned}$$

IV.

13. Je dois, en terminant, rappeler un mémoire de M. Poincaré (*Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes,* Journal de mathématiques 1890) dans lequel l'éminent géomètre s'était proposé un problème analogue à celui que nous venons de traiter.

Soient m un nombre quelconque réelle ou imaginaire ($|m| > 1$) et

$$R_1, R_2, \ldots, R_n,$$

n fonctions rationnelles de n lettres. M. Poincaré se propose de chercher des fonctions uniformes de u

$$\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$$

telles que l'on ait

$$\begin{aligned} \varphi_1(mu) &= R_1[\varphi_1(u), \varphi_2(n), \ldots, \varphi_n(u)], \\ \varphi_2(mu) &= R_2[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(mu) &= R_n[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \end{aligned}$$

en se bornant aux fonctions *qui ne présentent pas pour $u = 0$ de point singulier essentiel.*

Si nous posons

$$u = e^z$$

les fonctions $\varphi(u)$ deviendront des fonctions uniformes de z

$$f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$$

admettant la période $2\pi i$, et en posant

$$\log m = \omega$$

(on prend une détermination fixe d'ailleurs quelconque de ce logarithme), on aura

$$\begin{aligned}
f_1(z+\omega) &= R_1[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)],\\
f_2(z+\omega) &= R_2[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)],\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_n(z+\omega) &= R_n[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)],
\end{aligned}$$

et nous obtenons ainsi des équations fonctionnelles toutes semblables à celles que nous avons étudiées dans ce mémoire.

L'hypothèse faite que $u = 0$ n'est pas un point singulier essentiel pour les fonctions φ entraîne *une certaine relation d'égalité pour les fonctions rationnelles R*. En admettant que les R s'annulent pour

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = 0$$

et que l'on ait, comme il est en général permis de le supposer, les développements dans le voisinage de *zéro*

$$\begin{aligned}
R_1(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) &= \mu_1\varphi_1 + \ldots,\\
R_2(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) &= \mu_2\varphi_2 + \ldots,\\
\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
R_n(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) &= \mu_n\varphi_n + \ldots,
\end{aligned}$$

les termes non écrits étant de degré supérieur au premier, *l'un des nombres μ doit être égal à m*. C'est à l'aide de développements ordonnés suivant les puissances entières et positives de e^z que M. Poincaré démontre l'existence des transcendantes dont il s'occupe, et qui pour des R donnés, ne dépendent que d'une ou plusieurs constantes arbitraires.

Les problèmes que nous avons traités sont donc en réalité différents de ceux qui ont occupé M. POINCARÉ dans le beau mémoire que nous avons cité, et je ne vois aucune autre manière d'établir l'existence des transcendantes que nous avons considéré ici que des méthodes d'approximations successives susceptibles d'ailleurs, comme on l'a vu, de toute la rigueur désirable.

Paris, le 30 décembre 1893.