ÜBER DIE DOPPELCURVE AUF DEN GERADLINIGEN FLÄCHEN

VON

A. WIMAN
in LUND.

1. Auf einer Regelfläche existirt bekanntlich stets eine Doppelcurve, welche jeder Erzeugenden in $n-2$ Punkten begegnet. Andere besonders auffallenden Gebilde auf der Fläche sind die Torsalen, d. h. Erzeugenden, welche von einer benachbarten getroffen werden; die Ebene dieser Linien berührt längs der ganzen Torsale, und ihr Schnittpunkt, der Torsal- oder Cuspidalpunkt, ist gemeinsamer Berührungspunkt jeder anderen Ebene durch die Torsale.

Bei der Untersuchung der Regelflächen hat man sich nun besonders mit der Doppelcurve und den Torsalen beschäftigt.[1] Ich habe in meiner Gradualdissertation gezeigt, wie diese Aufgabe, wenn die Fläche zu einem Tetraedralcomplexe (oder noch besser zu einem Abarte dieses Complexes)

---

[1] So ist die Theorie der Regelflächen 4. Grades von CHASLES, CAYLEY, SCHWARZ, CREMONA und ROHN behandelt worden. Vgl. auch SALMON-FIEDLER, *Analytische Geometrie des Raumes*, 2. Theil, 3. Auflage, S. 430, und STURM, *Die Gebilde* 1. *und* 2. *Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung,* 1. Theil (Leipzig 1892), S. 52. Eine Eintheilung der Regelflächen 5. Grades nach der Natur der Doppelcurve hat SCHWARZ gegeben, (Crelle's Journal, Bd. 67). Dieselbe Aufgabe bezüglich den Regelflächen 6. Grades haben dann BERGSTEDT (*Om regelytor af* 6. *graden,* Diss., Lund 1886) und FINK (*Über windschiefe Flächen im Allgemeinen und ins besondere über solche* 6. *Grades,* Diss. Aus dem Correspondenzblatt für die Gelehrten und Realschulen Würtembergs 1887) angegriffen; doch mit wenig Erfolg, es seien denn die Irrthümer des Letzterwähnten. Die vollständige Lösung habe ich in meiner im Texte besprochenen Arbeit (*Klassifikation af regelytorna af* 6. *graden,* Lund 1892) gegeben, deren Ergebnisse nächstens in diesen Acta dargelegt werden sollen.

gehört, auf die Untersuchung einer viel einfacheren Curve in Bezug auf einen Tetraedralcomplex (oder Abart desselben) reducirt werden kann. Diese Methode lässt sich für alle Regelflächen 6. Grades durchführen, weil der genannte Complex durch 13 Geraden gelegt werden kann, und somit jede R_6 zu einer (wohl im Allgemeinen endlichen) Zahl von Tetraedralcomplexen gehört.

In der vorliegenden Abhandlung will ich aber Bedingungen entwickeln, denen die Doppelcurve einer Regelfläche beliebigen Grades genügen muss. Die so erhaltenen möglichen Arten der Doppelcurve auf einer R_6 kommen sämmtlich vor, wie ich in der citirten Arbeit erwiesen habe. Somit lässt sich schliessen, dass man auch für die Regelflächen höheren Grades eine ziemlich gute Begrenzung der Möglichkeiten erhalten.

2. Zu diesem Zwecke suche ich zuerst mittelst der Theorie der reciproken Flächen allgemeine Formeln für die Zahl t_3 der dreifachen Punkte einer Regelfläche sowie für das Geschlecht P ihrer Doppelcurve zu entwickeln.[1] Es seien:

n Grad (Ordnung und Klasse zugleich) der Fläche.

a Ordnung des Tangentenkegels von einem Punkte an die Fläche oder Klasse eines Querschnitts der Fläche.

δ Zahl der Doppelkanten des Kegels oder der Doppeltangenten des Querschnitts.

$\varkappa$ Zahl der Rückkehrkanten des Kegels oder der Inflexionen des Querschnitts.

b die Ordnung der Doppelcurve.

D die Zahl der Punkte, in denen 2 Erzeugende mit gemeinsamer Berührungsebene zusammentreffen, und die Doppelcurve somit einen Doppelpunkt erhält; weil 2 Bedingungen bei einem solchen Punkte der Doppelcurve erfüllt sein müssen, lässt sich schliessen, dass es im Allgemeinen keine D giebt.

t_m ($m \geqq 3$) die Zahl m-facher Punkte der Fläche; die m Mäntel

[1] Die entsprechende Aufgabe betreffend den (in dieser Hinsicht wegen der Cuspidalcurve nicht als Specialfällen der allgemeinen Regelflächen zu behandelnden) abwickelbaren Flächen ist schon von CAYLEY (Quarterly Journal, Bd. 11) gelöst worden.

schneiden einander in $\frac{1}{2}m(m-1)$ Doppelcurvenzweigen. Es ist einleuchtend, dass es im Allgemeinen nur t_3 giebt.

τ die Zahl der Torsalpunkte.

ρ die Klasse der entwickelbaren Fläche, die von den Tangentialebenen längs der Doppelcurve gebildet wird.

p das Geschlecht der Regelfläche.

Übrigens sei angenommen, dass keine Cuspidalerzeugende und nur eine endliche Zahl von t_m (also keine mehrfachen Curven) vorkommen.

Die PLÜCKER'schen Gleichungen, denen die Querschnittscurve genügen muss, sind:

$$b = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - p, \tag{1}$$

$$a = 2(n-1) + 2p, \tag{2}$$

$$x = 3(n-2) + 6p, \tag{3}$$

$$\delta = 2p^2 + 2p(2n-7) + 2(n-2)(n-3). \tag{4}$$

Die Bestimmung der Schnittpunkte der 2. Polarfläche eines beliebigen Punktes mit der Berührungscurve des Tangentenkegels von demselben Punkte und mit der Doppelcurve giebt die Gleichungen:[1]

$$a(n-2) = x + \rho, \tag{5}$$

$$b(n-2) = \rho + \sum \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)t_m. \tag{6}$$

Daraus folgt

$$\sum \frac{1}{2}m(m-1)(m-2)t_m = \frac{1}{2}(n-2)(n-3)(n-4) - 3p(n-4). \tag{I}$$

Also

$$p \leqq \frac{1}{6}(n-2)(n-3). \tag{II}$$

[1] Vgl. SALMON-FIEDLER, *Geometrie des Raumes*, II, S. 650.

Im Allgemeinen hat somit eine Regelfläche

$$\frac{1}{6}(n-2)(n-3)(n-4)-p(n-4)$$

dreifache Punkte. Aber es kann ein m-facher Punkt $\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$ dreifache ersetzen; es stossen ja auch in ihm eben so viele Gruppen von je 3 Erzeugenden zusammen.

Die erhaltenen Ergebnisse (I) und (II) werden von etwa auftretenden Cuspidalerzeugenden nicht gestört; da dies wohl schon a priori einleuchtet, übergehen wir den nach den SALMON'schen Principen leicht zu führenden Beweis. Dagegen lässt sich die Ungleichung (II) nicht erweisen, wenn die Regelfläche sowohl eine mehrfache Curve als eine mehrfache Developpable besitzt, und Regelflächen mit solchen Singularitäten gehen nicht immer als Specialfälle anderer *desselben Grades* hervor, was den fehlenden Beweis durch Continuitätsbetrachtungen hätte ersetzen können.

Das Geschlecht P der Doppelcurve ist durch die Gleichung

$$P=\frac{1}{2}(b-1)(b-2)-k-D-\sum\frac{1}{8}(m+1)m(m-1)(m-2)t_m$$

bestimmt, wo k die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte bezeichnet. k kann aus 2 neuen Gleichungen ermittelt werden:[1]

$$(7)\qquad a(n-2)(n-3)=2(\delta+ab-2\rho-\tau),$$

$$(8)\qquad b(n-2)(n-3)=ab-2\rho-\tau-4\left[k+\sum\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)t_m\right].$$

Aus (7) erhalten wir die bekannte von LÜROTH gegebene Zahl der Torsalen: $2(n-2)+4p$. Ganz einfach ergiebt sich

$$(\mathrm{III})\qquad P=\frac{1}{2}(n-3)(n-4)+p(n-5)-D.$$

---

[1] Die Gleichungen (7) und (8) enthalten die Analyse der Durchschnittspunkte der Curven a, b mit der Fläche von der $(n-2)(n-3)$ Ordnung, welche die Berührungspunkte der doppelt berührenden Erzeugenden des Tangentenkegels ausschneidet, und sind nach den Gleichungen (10) und (11) in SALMON-FIEDLER's citirter Arbeit, S. 671, gebildet; weil aber dort nur t_3 angenommen sind, habe ich selbst in (8) berücksichtigen müssen, dass in einem m-fachen Punkte $\frac{1}{8}m(m-1)(m-2)(m-3)$ Paare von je 2 Erzeugenden zusammenstossen.

Wenn die Gleichung (I) besteht (entweder für die Fläche selbst oder nur für ihre Reciproke), können höchstens $\frac{1}{6}(n-2)(n-3)-p$ doppelte Erzeugende vorkommen, weil, wie man leicht findet, jede Doppellinie von $(n-4)$ anderen Erzeugenden in eben so vielen t_3 getroffen wird; und, wenn 2 Doppelgeraden zusammentreffen, vereinigen sich im gemeinsamen Punkte sowohl 4 t_3 als 4 der erwähnten Schnittpunkte. Also, wenn die angegebene Zahl doppelter Erzeugenden existirt, liegen alle mehrfachen Punkte auf ihnen. Allein es soll hervorgehoben werden, dass unter diesen doppelten Erzeugenden gelegentlich auch solche vorkommen können, welche die Ordnung der restirenden Doppelcurve um 2 reducirt: es sind diese aus 2 einander berührenden Torsalen mit verschiedenen Cuspidalpunkten zusammengesetzt; die reciproken Torsalen haben verschiedene Ebenen und gemeinsame Torsalpunkte und liefern somit nur Doppelpunkte im Querschnitte. [1]

Auf jeder doppelten Erzeugenden befinden sich 2 D: die Punkte, wo die beiden Mäntel einander berühren. Weil aber gleichzeitig die Doppelgerade aus der Doppelcurve ausgeschieden wird, reducirt sich P nur um je eine Einheit.

Man kann nun die beiden in eine Doppelgerade zusammenfallenden Erzeugenden durch eine sehr kleine Veränderung auseinandergehen denken, ohne dass die Regelfläche anderwärts wesentlich verändert sei. Die Regelfläche mit der doppelten Geraden erscheint so als Specialfall einer Fläche eines um eine Einheit höheren Geschlechtes ohne dieselbe, somit auch ohne die darauf befindlichen $n-4$ t_3; die Doppelcurve hatte in diesen $n-4$ Doppelpunkte, deren Wegfall P um $n-4$ erhöht. Durch diese Betrachtungen werden die Gleichungen (I) und (III) bestätigt.

Es erübrigt noch die Fälle von Berührungs- und Oskulations-Doppelcurven zu erwähnen. Im ersten Falle berühren 2 Mäntel einander längs der Curve; im zweiten oskuliren sie einander sogar, so dass die Erzeugende des einen Mantels zweite Haupttangente des anderen sein muss. [2]

---

[1] Beispiele und nähere Erörterungen solcher Singularitäten werden wir später bei Behandlung der Regelflächen 6. Grades geben.

[2] Als eine hieher gehörende Art nenne ich die von SCHWARZ besprochene Regelflächen 5. Grades mit 3 doppelten Kegelschnitten. Ich habe nämlich (*Klassifikation* etc., S. 87) erwiesen, dass sowohl 2 als auch alle 3 Kegelschnitte in speciellen Fällen unmittelbar aufeinander folgen.

Die Regelflächen 6. Grades ohne vielfache Curven sind somit vom Geschlechte 0, 1 oder 2, haben höchstens 2, bezw. 1 oder 0 doppelte Erzeugende, und die bezügliche obere Grenze des Geschlechts der Doppelcurve ist 3, 4 oder 5. Von den möglichen vielfachen Curven behandeln wir besonders die Leitgeraden. Die anderen Fälle sind: dreifache Erzeugende, dreifaches Kegelschnitt und dreifache gewundene C_3; im ersten Falle muss jede Ebene durch die dreifache Erzeugende einen Doppelcurvenpunkt enthalten (somit, weil die Schnittcurve eine C_3, $p=0$); im zweiten soll von jedem Punkte des Kegelschnittes drei Bisecanten der restirenden Doppelcurve ausgehen, welche somit eine unicursale gewundene C_4 specieller Art sein muss (also auch hier $p=0$); im dritten Falle ist gewöhnlich $p = 1$.

3. Die Gleichungen (2) und (3) werden nicht durch eine r-fache Leitgerade verändert. Als b-Curve sei nur der restirende Theil der Doppelcurve bezeichnet. Also

$$b = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - \frac{1}{2}r(r-1) - p. \tag{1'}$$

Die Formeln (5) und (6) werden bedeutend modificirt. Der 2. Polare ist die Leitgerade $(r-2)$-fach. Dort geht die a-Curve durch $2(r+p-1)$ Torsalpunkte[1] und durch $n-r$ andere Punkte, wo die Leitgerade von den Erzeugenden getroffen wird, welche in der durch die Scheitel des Berührungskegels und die Directrix bestimmten Ebene liegen. In diesen Punkten wird aber auch die 2. Polare von derselben Ebene berührt oder (wenn $r=2$) geht wenigstens dadurch, so dass jeder $r-1$ Schnittpunkte giebt.

Die b-Curve hat $b - \frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)$ Punkte auf der Leitgerade; denn jede Ebene durch diese enthält nur $\frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)$ andere b-Punkte als Schnittpunkte der in ihr liegenden Erzeugenden.

---

[1] Dass die erwähnte Zahl Torsalpunkte auf der Leitgerade liegt, wird im nächsten Paragraphen erwiesen.

Also

$$(5') \quad a(n-2) = \varkappa + \rho + 2(r+p-1)(r-2) + (n-r)(r-1),$$

$$(6') \quad b(n-2) = \rho + (r-2)\Big[b - \frac{1}{2}(n-r)(n-r-1)\Big] + \sum \frac{1}{2} m(m-1)(m-2) t_m.$$

Dies giebt

$$(\mathrm{I}') \quad \sum \frac{1}{2} m(m-1)(m-2)t_m = \frac{1}{2}(n-r-2)[(n-r-1)(n+2r-6)-6p].$$

Daraus folgt, dass, wenn $r < n-2$,

$$(\mathrm{II}') \qquad p \leqq \frac{1}{6}(n-r-1)(n+2r-6).$$

Wenn $r = n-2$, verschwinden beide Glieder der Gleichung (I′); die b-Curve kann ein Kegelschnitt sein und somit p den Werth $n-4$ erreichen.

Entsprechende Überlegungen lassen sich auch für die reciproke Fläche (wo r durch $n-r$ ersetzt wird) durchführen, wenn nur die Ursprüngliche keine vielfache Developpable (ausser etwa des Ebenenbüschels durch die Leitgerade) besitzt. Unter dieser Voraussetzung kann somit r in (II′) durch $n-r$ ersetzt werden, welches einen genaueren Werth für p liefert, wenn $r < \frac{n}{2}$.

Ganz einfach ergiebt sich das Geschlecht P' aus der Correspondenz zwischen den Punkten der b-Curve und den Erzeugenden der Regelfläche: jedem Punkte entsprechen die 2 durch ihn gehenden Erzeugenden, und jede Erzeugende trifft $n-r-1$ Punkte, welche ihm entsprechen. Ausserhalb der Leitgeraden befinden sich $2(n-r+p-1)$ Torsalpunkte; ihnen entsprechen coincidirende Erzeugende. In der Ebene jeder der gedachten Torsalen liegen $n-r-2$ andere Erzeugende, deren jede 2 coincidirende b-Punkte auf der Torsale ausschneidet. Dies giebt

$$2(n-r-2)(n-r+p-1)$$

Coincidenzen, welche Zahl indess mit 4 vermindert wird, so oft 2 Torsalen dieselbe Ebene haben, denn es entsteht dann ein Doppelpunkt D im Schnittpunkte. Dann kann P' aus ZEUTHEN's Gleichung[1]

$$c - c' = 2e'(p - 1) - 2e(P' - 1)$$

hergeleitet werden, welche die bekannte Relation zwischen den Geschlechtszahlen zweier einander entsprechenden Curven darstellt. Diese Gleichung gilt aber natürlich noch, wenn die Punkte der einen Curve eindeutig auf die Geraden einer Regelfläche überführt werden. Also ist hier:

$$e = 2, \qquad e' = n - r - 1, \qquad c = 2(n - r + p - 1),$$
$$c' = 2(n - r - 2)(n - r + p - 1) - 4D,$$

woraus

$$\text{(III')} \qquad P' = \frac{1}{2}(n - r - 2)(n - r - 3) + p(n - r - 2) - D.$$

Für $r = n - 2$ bezw. $n - 3$, ergiebt sich $P' = 0$ bezw. p, wie auch zu erwarten war. P' wird nicht durch das Auftreten einer doppelten Erzeugenden reducirt, denn die beiden Mäntel berühren einander nur in einem *neu hinzutretenden* Doppelpunkte; der andere ist auf der Directrix.

Die Regelflächen 6. Grades mit einer einfachen oder fünffachen Leitgerade sind natürlich immer unicursal. In den übrigen Fällen ($r = 2, 3, 4$) kann das Geschlecht höchstens den Werth 2 erreichen;[2] es sei denn, dass auch eine 2. Leitgerade auftrete. Wenn $r = 2$, lehrt die Gleichung (III'), dass $P' \overline{\overline{<}}\, 1, 3, 5$, je nachdem $p = 0, 1, 2$.

4. Die oberwähnte Gleichung ZEUTHEN's kann auch benutzt werden, um die Anzahl der Torsalpunkte τ' auf einer r-fachen Curve zu ermitteln, welcher jede Erzeugende nur in einem Punkte begegnet. In der Gleichung

$$c - c' = 2e'(p - 1) - 2e(p' - 1)$$

---

[1] Math. Ann., Bd. 3.

[2] FINK glaubt indess 6 Arten vom Geschlechte 3 ohne 2 Leitgeraden erhalten zu haben. Er geht aber von der unrichtigen Voraussetzung aus, dass eine *eindeutige* Correspondenz zwischen den einfachen Schnittpunkten einer beweglichen Tangente einer ebenen C_4 vom Geschlechte 3 bestehen könne. Durch einen Punkt gehen ja 10 anderwärts berührende Geraden.

hat man somit $c = 0$, $c' = \tau'$, $e' = r$, $e = 1$ zu setzen, wenn $p(p')$ das Geschlecht der Curve (der Regelfläche) bezeichnet. Also

$$\tau' = 2(p' - rp + r - 1).$$

Aus dem Umstande, dass $\tau' \geqq 0$, ergiebt sich eine obere Grenze für p, und zwar ist ersichtlich, dass, wenn $r > p' - 1$, nur 2 Lösungen möglich sind:

$$p = 0, \qquad \tau' = 2(r + p' - 1);$$
$$p = 1, \qquad \tau' = 2(p' - 1).$$

Jedoch giebt es nur die Lösung $p = 0$, wenn $p' = 0$.

Weil auf einer Erzeugenden $n - 2$ Doppelcurvenpunkte sich befinden, kann die Doppelcurve in höchstens $n - 2$ verschiedene zerfallen. Trifft dies bei einer rationalen Regelfläche ein, müssen jene $n - 2$ Curven auch unicursal und auf jeder 2 Torsalpunkte belegen sein. Wenn aber $p' = 1$, sind die Curven entweder vom Geschlechte 1 mit keinem oder unicursal mit 4 Torsalpunkten. Weil die gesammte Zahl der Torsalen $2n$ ist, müssen $\frac{n}{2}$ Curven dieser Art sein; somit ist es eine nothwendige Bedingung des Zerfallens, dass n gerade. Es können aber auch höchstens 3 solche Doppelcurven vom Geschlechte 1 vorkommen, denn auf einer ebenen C_3 können die Punkte nur auf 3 Weisen involutorisch-eindeutig einander zugeordnet werden, so dass die Verbindungsgerade entsprechender Punkte eine Curve vom Geschlechte 1 enveloppirt.[1] Zwischen den Erzeugenden der Regelfläche ($p' = 1$) bestehen also nur 3 solche Correspondenzen, und es mag wohl möglich sein, dass es Fälle giebt, in welchen jedes Paar entsprechender Erzeugenden in jeder der 3 Correspondenzen zusammentreffe.[2]

Auf den Regelflächen höheren Geschlechtes kann nur eine jeder Erzeugenden in nur einem Punkte begegnende rationale Doppelcurve vorkommen; die in derselben zusammenstossenden Erzeugenden sind einander wie die ausgezeichneten Punktpaare auf den ebenen hyperelliptischen Curven zugeordnet.

---

[1] Siehe CLEBSCH-LINDEMANN, *Vorlesungen über die Geometrie der Ebene,* S. 527, 607.

[2] FINK will zwar (S. 15 seiner schon erwähnten Arbeit) eine rationale R_6 entdeckt haben, zu deren Doppelcurve auch eine ebene C_3 vom Geschlechte 1 gehört. Eine solche fatale Entdeckung kann aber nur als Probe seiner unbefriedigenden Methode gelten.