ÜBER DIE STRUCTUR DER DISCRIMINANTEN UND RESULTANTEN VON BINÄREN FORMEN[1]

VON

FRANZ MEYER
in CLAUSTHAL.

1. Bricht man eine, nach steigenden Potenzen der Variabeln λ geordnete binäre Form:

$$(1)\quad f_m(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_k\lambda^k + a_{k+1}\lambda^{k+1} + \dots + a_m\lambda^m$$

hinter der k^{ten} Potenz von λ ab, so möge die so entstehende Form:

$$(2)\qquad \varphi_k(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \dots + a_k\lambda^k$$

als die »k^{te} Theilform» von f bezeichnet werden, und entsprechend der nach Heraushebung des Factors λ^k verbleibende Rest:

$$(3)\qquad \psi_{m-k}(\lambda) = a_k + a_{k+1}\lambda^1 + \dots + a_m\lambda^{m-k}$$

als »zugehörige Nebentheilform».

Gewisse Gründe sprechen dann dafür, dass in den Ausdruck für die Discriminante von f die Discriminanten sämmtlicher Theilformen (2), (3) als Bestandtheile eingehen werden.

Die hiermit aufgeworfene Frage soll im Folgenden ihre Erledigung in bejahendem Sinne finden: ein analoges Resultat wird sich dann auch für die Resultante von zwei Binärformen angeben lassen.

---

[1] Vgl. die vorläufigen Mittheilungen in den Göttinger Nachrichten 1895, N° 1 und 2.

Für zahlentheoretische Anwendungen dieser Ergebnisse hat man noch die Discriminante einer binären Form vermöge eines geeigneten Zahlenfactors zu »normiren».

Dabei wird sich zugleich die Frage beantworten lassen, was man überhaupt in der Zahlentheorie unter der Discriminante einer, ohne Binomialcoefficienten geschriebenen Binärform (1) zu verstehen hat.

2. In der Formentheorie legt man den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m$ von (1) Gewichte bei von den Werthen $m, m-1, \ldots, 1, 0$; dadurch wird die Discriminante von (1), eine homogene Form der a von der Ordnung $2(m-1)$, zugleich isobar d. i. alle Glieder der Discriminante erhalten das nämliche Gewicht $m(m-1)$.

Für unsern Zweck wird es sich indessen empfehlen, den k ersten Coefficienten in (1) resp. die Gewichte $k, k-1, \ldots, 2, 1$ beizulegen, allen übrigen aber das Gewicht Null.

Dann werden die einzelnen Glieder der Discriminante von (1) nicht alle das gleiche Gewicht besitzen, und es besteht die Vermuthung, dass gerade dem Aggregat der Glieder vom kleinsten Gewichte eine besonders einfache Eigenschaft zukommen wird.

Um zu dem gemeinten Aggregate zu gelangen, setze man in bekannter Weise:[1]

$$(4) \qquad a_0 = \varepsilon^k a_0', \qquad a_1 = \varepsilon^{k-1} a_1', \; \ldots, \; a_{k-1} = \varepsilon a_{k-1}', \qquad a_k = a_k',$$

entwickele die Discriminante nach steigenden Potenzen von ε, und ermittele den Coefficienten C der kleinsten Potenz von ε. Eben dies Product aus C und der kleinsten Potenz von ε liefert, wenn man von den a' wiederum zu den a zurückkehrt, das gewünschte Aggregat vom kleinsten Gewichte innerhalb der Discriminante.

3. Um den Coefficienten C bequem zu berechnen, bedienen wir uns der Wurzeln von f (1). Zu dem Behuf schicken wir folgenden Hülfssatz voraus:

Vermöge der Substitution (4) *zerfallen die m Wurzeln von f* (1), *als*

[1] Die Buchstaben a' in (4), wie die α und β in (5) und (6) bedeuten Grössen, die nicht zugleich mit ε verschwinden.

Functionen von ε betrachtet, in zwei Klassen; die erste umfasst k Wurzeln von der Form:

$$(5)\qquad \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k, \qquad (d > 1),$$ [1]

die zweite die $m - k$ übrigen von der Form:

$$(6)\qquad \alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m \qquad (e > 0).$$ [1]

Hierbei sind die Grössen $\varepsilon\alpha$ in (5) die Wurzeln von φ_k (2), und die Grössen α in (6) die Wurzeln von ψ_{m-k} (3).

Dass die Wurzeln von f die äussere Gestalt (5), (6) vermöge (4) erhalten, bedarf keines weiteren Beweises; auch, dass die $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_m$ in (6) die Wurzeln von ψ_{m-k} (3) sind, ergiebt sich fast unmittelbar, wenn man ε zu Null werden lässt, wodurch ja f_m in $\lambda^k\psi_{m-k}$ übergehen würde.

Es handelt sich also nur noch um den Nachweis, dass die $\varepsilon\alpha_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k$ in (5) die Wurzeln von φ_k (2) sind.

Wir betrachten zu dem Ende die Quotienten $\frac{a_0}{a_k}, \frac{a_1}{a_k}, \ldots, \frac{a_{k-1}}{a_k}$. Mit Rücksicht auf (4), (5), (6) und die eben erledigte Bedeutung der α in (6) hat man zunächst:

$$(-1)^k\frac{a_0}{a_k} = \frac{(-1)^m\frac{\varepsilon^k a_0'}{a_m}}{(-1)^{m-k}\frac{a_k}{a_m}} = \frac{(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1)\ldots(\varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k)(\alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1})\ldots(\alpha_m + \varepsilon^e\beta_m)}{\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m}$$

$$= \varepsilon^k(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k) + \ldots$$

wo die zuletzt rechterhand stehenden Punkte Glieder andeuten, die mit höheren Potenzen von ε behaftet sind.

Da aber linkerhand nur die k^{te} Potenz der willkürlichen Grösse ε auftritt, so muss dasselbe auch rechts stattfinden d. h. es ist

$$(7)\qquad (-1)^k\frac{\varepsilon^k a_0'}{a_k} = (\varepsilon\alpha_1)(\varepsilon\alpha_2)\ldots(\varepsilon\alpha_k).$$

---

[1] Um nicht in unnöthige Schwierigkeiten zu kommen, lassen wir es ganz dahin gestellt, welchen (ganzzahligen oder gebrochenen) Werth die später doch wieder herausfallenden Exponenten d und e in (5), (6) besitzen.

Entsprechend verfährt man mit dem nächstfolgenden Quotienten $\frac{a_1}{a_k}$:

$$(-1)^{k-1}\frac{a_1}{a_k} = \frac{(-1)^{m-1}\dfrac{\varepsilon^{k-1}a_1'}{a_m}}{(-1)^{m-k}\dfrac{a_k}{a_m}},$$

mithin kommt für den Zähler des letzten Bruches:

$$\begin{aligned}
&(-1)^{m-1}\frac{\varepsilon^{k-1}a_1'}{a_m}(\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m)\\
=\;&\big[(\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^d\beta_1)\ldots(\varepsilon\alpha_{k-1}+\varepsilon^d\beta_{k-1})(\alpha_{k+1}+\varepsilon^e\beta_{k+1})\ldots(\alpha_m+\varepsilon^e\beta_m)\\
&+\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\qquad\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\\
&+\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\qquad\quad\cdot\quad\cdots\quad\cdot\\
&+(\varepsilon\alpha_2+\varepsilon^d\beta_2)\ldots(\varepsilon\alpha_k+\varepsilon^d\beta_k)(\alpha_{k+1}+\varepsilon^e\beta_{k+1})\ldots(\alpha_m+\varepsilon^e\beta_m)\big]\\
&+\Big[(\varepsilon\alpha_1+\varepsilon^d\beta_1)\ldots(\varepsilon\alpha_k+\varepsilon^d\beta_k)\big\{(\alpha_{k+1}+\varepsilon^e\beta_{k+1})\ldots(\alpha_{m-1}+\varepsilon^e\beta_{m-1})+\ldots\\
&\qquad\qquad+(\alpha_{k+2}+\varepsilon^e\beta_{k+2})\ldots(\alpha_m+\varepsilon^e\beta_m)\big\}\Big].
\end{aligned}$$

Rechts muss sich wiederum Alles auf die $(k-1)^{\text{te}}$ Potenz von ε reduciren, und es wird somit, nach beiderseitiger Division mit $(\alpha_{k+1}\ldots\alpha_m)$:

$$(8)\qquad (-1)^{k-1}\frac{\varepsilon^{k-1}a_1'}{a_k} = (\varepsilon\alpha_1)(\varepsilon\alpha_2)\ldots(\varepsilon\alpha_{k-1})+\ldots+(\varepsilon\alpha_2)(\varepsilon\alpha_3)\ldots(\varepsilon\alpha_k).$$

Fährt man so fort, so erkennt man aus (7), (8) und den sich anschliessenden Formeln sofort, dass die Grössen $\varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \ldots, \varepsilon\alpha_k$ in (5) in der That mit den Wurzeln von φ_k (2) übereinstimmen.

Damit ist der zu Beginn dieser N° aufgestellte Hülfssatz[1] bewiesen.

4. Die Discriminante D_m einer binären Form f_m (1) werde, bis auf einen, später zu normirenden Zahlenfactor A_m, definirt als das Quadrat des

---

[1] Dieser Hülfssatz findet vielfache Anwendung in der Theorie von Singularitäten von Curven, vgl. die grosse Abhandlung des Verf. in den Wiener Monatsheften für Mathematik und Physik 1893.

Differenzenproductes der Wurzeln von f, multiplicirt mit der $2(m-1)^{\text{ten}}$ Potenz des Coefficienten a_m der höchsten Potenz von λ, in Zeichen:

$$(9)\quad D_m = A_m a_m^{2(m-1)} \Delta^2(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k, \alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m),$$

gemäss der Scheidung der Wurzeln von f in die beiden Gruppen (5), (6). Eben vermöge dieser Scheidung zerfällt das Quadrat des Differenzenproductes in drei wesentlich verschiedene Factoren:

$$1)\qquad \Delta^2(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k),$$

$$2)\qquad \Delta^2(\alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m),$$

3) das Quadrat des Productes aus den Differenzen je einer Grösse (5) und je einer Grösse (6).

Für den Factor 1) gilt aber:

$$1)\quad \Delta^2(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k) = \varepsilon^{k(k-1)}\Delta^2(\alpha_1 + \varepsilon^{d-1}\beta_1, \ldots, \alpha_k + \varepsilon^{d+1}\beta_k)$$
$$= \varepsilon^{k(k-1)}\Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k) + \ldots,$$

wo die zuletzt stehenden Punkte wieder Glieder bezeichnen, die mit höheren Potenzen von ε multiplicirt sind.

Entwickelt man andererseits die unter 2) und 3) aufgeführten Ausdrücke nach steigenden Potenzen von ε, so kommt:

$$2)\qquad \Delta^2(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_m) + \ldots,$$

$$3)\qquad (\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_m)^{2k} + \ldots,$$

wo es genügt, die (von ε freien) Anfangsglieder zu notiren.

Somit liefert die Entwickelung der Discriminante D_m (9) selbst nach steigenden Potenzen von ε: [1]

$$(9')\quad D_m = \varepsilon^{k(k-1)} A_m a_m^{2(m-1)} \Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)\Delta^2(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_m)(\alpha_{k+1}\alpha_{k+2}\ldots\alpha_m)^{2k} + \ldots.$$

Drückt man das hingeschriebene erste Glied von D_m wieder rückwärts durch die ursprünglichen Coefficienten a von f aus, so hat man genau das Aggregat der Glieder in D_m, welche das Minimalgewicht, nemlich $k(k-1)$, besitzen.

[1] Dass die Entwickelung von D_m mit der $k(k-1)^{\text{ten}}$ Potenz von ε beginnt, hätte, auch ohne irgend eine Kenntniss von der Gestalt der Wurzeln von f, aus der Bézout'schen Form der Discriminante D_m geschlossen werden können.

Bezeichnet man die Discriminanten von φ_k (2) und ψ_{m-k} (3) mit D_k resp. $D^{(m-k)}$, so ist, nach Analogie mit der Definition (9), und mit Rücksicht auf den Hülfssatz der N° 3:

$$(10) \qquad D_k = A_k a_k^{2(k-1)} \Delta^2(\varepsilon\alpha_1, \varepsilon\alpha_2, \ldots, \varepsilon\alpha_k) = \varepsilon^{k(k-1)} A_k a_k^{2(k-1)} \Delta^2(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k),$$

$$(11) \qquad D^{(m-k)} = A_{m-k} a^{2(m-k-1)} \Delta^2(\alpha_{k+1}, \alpha_{k+2}, \ldots, \alpha_m),$$

$$(12) \qquad (\alpha_{k+1}\alpha_{k+2} \ldots \alpha_m)^2 = \left(\frac{a_k}{a_m}\right)^{2k}.$$

Setzt man diese Werthe in das Anfangsglied (9′) von D_m ein, und beachtet, dass sich die Potenzen von a_m in Zähler und Nenner zusammenziehen, wie folgt:

$$(13) \qquad a_m^{2(m+1)} \frac{1}{a_k^{2(k-1)}} \frac{1}{a_m^{2(m-k-1)}} \frac{a_k^{2k}}{a_m^{2k}} = a_k^2,$$

so ist das gemeinte Aggregat der Glieder in D_m vom Minimalgewichte $k(k-1)$ identisch mit dem Producte:

$$(14) \qquad \frac{A_m}{A_k A_{m-k}} a_k^2 D_k D^{(m-k)}.$$

Damit ist der Satz bewiesen:

Legt man den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_m$ *einer binären Form* $f_m(\lambda)$:

$$f_m(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_{k-1}\lambda^{k-1} + a_k\lambda^k + \ldots + a_m\lambda^m$$

successive die Gewichte $k, k-1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0$ *bei, so zerfällt das Aggregat der Glieder in der Discriminante* D_m *von* f, *welche das Minimalgewicht* $k(k-1)$ *besitzen, abgesehen von einem Zahlenfactor, in die Factoren:*

$$a_k^2 D_k D^{(m-k)},$$

wo D_k, $D^{(m-k)}$ *die Discriminanten der Theilformen:*

$$\left\{\begin{aligned} \varphi_k(\lambda) &= a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k, \\ \psi_{m-k}(\lambda) &= a_k + a_{k+1}\lambda + \ldots + a_m\lambda^{m-k} \end{aligned}\right.$$

bedeuten.

Für $k = 0$ (resp. $k = m$) wird der Satz bedeutungslos, während er für $k = 1$ (resp. $k = m - 1$)[1] noch gültig bleibt, nur dass der Factor D_1 (resp. $D^{(1)}$) dann gar nicht auftritt, oder, was dasselbe ist, durch die Einheit zu ersetzen ist.

Symmetrischer hätte man den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_m$ die Gewichte $k, k-1, \ldots, 1, 0, 1, \ldots, m-k$ beilegen können; dann würde nur an Stelle des Minimalgewichts $k(k-1)$ unseres Satzes das Minimalgewicht $k(k-1) + (m-k)(m-k-1)$ treten.

5. Haben wir soeben den algebraischen Charakter des Ergebnisses hervortreten lassen, so möge nunmehr unser Augenmerk auf die geeignete Bestimmung der in (9′) und (14) auftretenden Zahlenfactoren gerichtet sein.

Für den Augenblick denke man sich die Form $f_m(\lambda)$ (1) vermöge einer zweiten Variabeln μ homogen gemacht. Man bilde sodann nach der Sylvester'schen Vorschrift die Resultante D'_m der Formen $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ und $\frac{\partial f}{\partial \mu}$, also

$$(15) \qquad D'_m = \begin{vmatrix} ma_0, & (m-1)a_1, & & \ldots, & 2a_{m-2}, & a_{m-1}, & \\ & ma_0, & (m-1)a_1, & \ldots, & & 2a_{m-2}, & a_{m-1}, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_1, & 2a_2, & & \ldots, & (m-1)a_{m-1}, & ma_m, & \\ & a_1, & 2a_2, & \ldots, & & (m-1)a_{m-1}, & ma_m, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

Nennen wir die Wurzeln von f kurz $A_1, A_2, \ldots, A_m$, so ist nach einer bekannten Formel[2] (Vgl. z. B. Faà di Bruno, l. c. p. 88 (13)):

$$(16) \qquad D'_m = (-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} m^{m-2} a_m^{2(m-1)} \Delta^2(A_1, A_2, \ldots, A_m).$$

---

[1] Der Fall $k = m - 1$ findet sich bei Faà di Bruno, *Theorie der binären Formen*, Deutsche Ausgabe, p. 90 unten.

[2] Die gemeinte Formel ist daselbst für die Resultante von $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial \lambda}$ und $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial \mu}$ aufgestellt, nach leichter Umrechnung geht daraus die Formel (16) das Textes hervor.

Nun ist $\Delta^2(A_1, A_2, \ldots, A_m)$, als ganzzahlige symmetrische Function der A, eine ganzzahlige ganzrationale Function der elementar-symmetrischen Functionen der A, und zwar vom Grade $2(m-1)$. Also ist das Product $a_m^{2(m-1)}\Delta^2(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ eine ganzzahlige homogene Form der Coefficienten a. Da das Gleiche auch von der linken Seite D'_m der Formel (16) gilt, so muss D'_m durch m^{m-2} theilbar [1] sein. Vergleicht man dies Resultat mit der Definition (9'), so erkennt man, dass man den Zahlenfactor A_m am geeignetsten gleich $(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}$ setzen wird:

(9'') $$D_m =$$
$$(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)} a_m^{2(m-1)}\Delta^2(\varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k, \alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m).$$

Dann besteht zwischen D_m und D'_m (15) der Zusammenhang:

(17) $$D_m = \frac{1}{m^{m-2}} D'_m,$$

und D_m ist ebenfalls eine ganzzahlige Form der a.

Damit reducirt sich der Zahlenfactor $\frac{A_m}{A_k A_{m-k}}$ in (14) auf

(18) $$\frac{(-1)^{\frac{1}{2}m(m-1)}}{(-1)^{\frac{1}{2}k(k-1)}(-1)^{\frac{1}{2}(m-k)(m-k-1)}} = (-1)^{k(m-k)}.$$

Auf Grund unseres Hauptsatzes können wir aber noch einen Schritt weiter gehen, und zeigen, dass die Form D_m (17) eine primitive ist d. h. dass der grösste gemeinschaftliche Theiler ihrer Coefficienten die Einheit ist.

Denn wäre dieser Theiler von der Einheit verschieden, so müsste er auch in jedem Bestandtheile von D_m aufgehen. Setzt man aber k gleich $m-1$, so ist, wie (14) lehrt, D_{m-1} ein solcher Bestandtheil. Dann müsste der gedachte Theiler auch in $D_{m-2}, D_{m-3}, \ldots, D_2$ aufgehen; es ist aber $D_2 = 4a_0a_2 - a_1^2$, also primitiv.

Wir drücken dieses Zwischenergebniss als einen besondern Satz aus:

Der grösste gemeinschaftliche Theiler aller Coefficienten der Discrimi-

[1] Die Theilbarkeit von D'_m durch m^{m-2} geht auch direct aus dem Hauptsatze hervor, wenn man in (14) $k = m - 1$ setzt.

nantendeterminante D'_m (15) *ist gleich* m^{m-2}, *und demnach ist die durch* (17) *oder* (9″) *definirte Discriminantenform* $D_m = \frac{1}{m^{m-2}} D'_m$ *primitiv.*

Damit ist beiläufig die Frage entschieden, was man in der Zahlentheorie unter der Discriminante einer, ohne Binomialcoefficienten geschriebenen Binärform zu verstehen hat.

Auf Grund der Formel (18) sprechen wir folgende Ergänzung unseres Hauptsatzes (N° 4) aus:

Der in dem Hauptsatze nicht berücksichtigte Zahlenfactor des Productes $a_k^2 D_k D^{(m-k)}$ *ist einfach gleich* $(-1)^{k(m-k)}$, *falls die Discriminante einer binären Form durch* (17) *definirt wird.*

6. Einfacher gestalten sich die analogen Verhältnisse bei der Resultante zweier Binärformen:

$$(19) \qquad \begin{cases} f_m(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k + a_{k+1}\lambda^{k+1} + \ldots + a_m\lambda^m, \\ g_n(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_l\lambda^l + b_{l+1}\lambda^{l+1} + \ldots + b_n\lambda^n. \end{cases}$$

Indem wir hier wiederum mit der k^{ten} resp. l^{ten} Potenz von λ abbrechen, erhalten wir die Theilformen:

$$(20) \qquad \begin{cases} \varphi_k(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + \ldots + a_k\lambda^k, \\ \varphi'_l(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + \ldots + b_l\lambda^l \end{cases}$$

nebst den zugehörigen Nebentheilformen:

$$(21) \qquad \begin{cases} \psi_{m-k}(\lambda) = a_k + a_{k+1}\lambda + \ldots + a_m\lambda^{m-k}, \\ \psi'_{m-l}(\lambda) = b_l + b_{l+1}\lambda + \ldots + b_n\lambda^{n-l}. \end{cases}$$

Unter der Resultante R_{mn} von f_m und g_n verstehen wir, wie üblich, die offenbar primitive Form:

$$(22) \qquad R_{mn} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & & \ldots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 & & \ldots \\ & b_0 & b_1 & b_2 & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \ldots \end{vmatrix}.$$

Vermöge der Wurzeln $A_1, A_2, \ldots, A_m, B_1, B_2, \ldots, B_n$ von f_m, g_n drückt sich R_{mn} (Vgl. z. B. FAÀ DI BRUNO, l. c. p. 53 (12) und p. 74 oben) aus, wie folgt:

$$
(23) \qquad \begin{aligned} R_{mn} = a_m^n b_n^m (A_1 - B_1)(A_2 - B_1)\ldots(A_m - B_1) \\ (A_1 - B_2)(A_2 - B_2)\ldots(A_m - B_2) \\ \cdot \qquad \cdot \quad \cdots \quad \cdot \\ (A_1 - B_n)(A_2 - B_n)\ldots(A_m - B_n). \end{aligned}
$$

Vermöge der Substitutionen:

$$
(24) \qquad \begin{cases} a_0 = \varepsilon^k a_0', & a_1 = \varepsilon^{k-1} a_1', \ \ldots, \ a_{k-1} = \varepsilon a_{k-1}', & a_k = a_k', \\ b_0 = \varepsilon^l b_0', & b_1 = \varepsilon^{l-1} b_1', \ \ldots, \ b_{l-1} = \varepsilon b_{l-1}', & b_l = b_l', \end{cases}
$$

nehmen die Wurzeln A, B die Gestalt an:

$$
(25) \begin{cases} \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^d\beta_1, \ldots, \varepsilon\alpha_k + \varepsilon^d\beta_k, \alpha_{k+1} + \varepsilon^e\beta_{k+1}, \ldots, \alpha_m + \varepsilon^e\beta_m & (d > 1, e > 0), \\ \varepsilon\alpha_1' + \varepsilon^{d'}\beta_1', \ldots, \varepsilon\alpha_l' + \varepsilon^{d'}\beta_l', \alpha_{l+1}' + \varepsilon^{e'}\beta_{l+1}', \ldots, \alpha_n' + \varepsilon^{e'}\beta_n' & (d' > 1, e' > 0). \end{cases}
$$

Führt man nunmehr das Product (23) aus, so ergiebt sich durch eine ganz ähnliche Rechnung, wie in N° 4, dass das Aggregat der mit der niedrigsten, nemlich $(kl)^{\text{ten}}$ Potenz von ε multiplicirten Glieder übereinstimmt mit dem Producte:

$$
(26) \qquad (-1)^{l(m-k)} R_{kl} R^{(m-k, n-l)},
$$

wo $R_{kl}, R^{(m-k,n-l)}$ die Resultanten der Formen (20) resp. (21) sind.

Somit gilt der Satz:

Legt man den Coefficienten $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, \ldots, a_m$; $b_0, b_1, \ldots, b_{l-1}, b_l, \ldots, b_n$ *der beiden binären Formen* $f_m(\lambda), g_m(\lambda)$, (19) *die Gewichte* $k, k-1, \ldots, 1, 0, 0 \ldots 0$ *resp.* $l, l-1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0$ *bei, so zerfällt das Aggregat der Glieder in der Resultante* R_{mn} *von* f *und* g, *welche das Minimalgewicht* kl *besitzen, in das Product*

$$
(-1)^{l(m-k)} R_{kl} R^{(m-k, n-l)},
$$

wo $R_{kl}, R^{(m-k,n-l)}$ *die Resultanten der Theilformen* $\varphi_k(\lambda), \varphi_l'(\lambda)$ (20) *resp. der Nebentheilformen* $\psi_{m-k}(\lambda), \psi_{n-l}'(\lambda)$ (21) *bedeuten.*

7. Die für die Discriminanten und Resultanten binärer Formen im Obigen aufgeworfenen und beantworteten Fragen lassen sich ohne Weiteres auch auf ternäre und höhere Formen ausdehnen; indessen stösst man hier auf solche Schwierigkeiten, dass eine Entscheidung vorderhand noch nicht möglich zu sein scheint.

Clausthal, d. 6 Februar 1895.