SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES[1]

PAR

JULIUS WEINGARTEN.

»Sæpe stilum vertas!»
(HORACE.)

Préface.

Le problème de la déformation des surfaces s'énonce comme il suit:

E, F, G étant des fonctions données des deux variables indépendantes u, v, trouver toutes les fonctions x, y, z de u et de v qui satisfont identiquement à l'équation

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$

où les du et dv peuvent être pris arbitrairement. (DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, III$^{\text{me}}$ partie, page 253.)

Nous ajouterons dans la suite la supposition que la quantité $EG - F^2$ ne s'annule pas pour toutes les valeurs des variables u et v. Car, en faisant l'hypothèse contraire, la solution du problème n'offre pas de difficultés particulières.

Le seul pas qu'on ait fait vers la solution de ce problème général est qu'on a établi une équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfont simultanément les trois fonctions x, y, z cherchées.

Cette équation est de la forme des équations étudiées par AMPÈRE. Mais il n'existe pas d'éléments linéaires (les surfaces développables exceptées) pour lesquels cette équation admette des intégrales intermédiaires du premier ordre, ou devienne intégrable par la méthode d'AMPÈRE.

---

[1] Ce Mémoire est sans aucune altération celui qui a remporté le grand prix des sciences mathématiques au concours proposé par l'Académie des Sciences de Paris (année 1894).

De plus, cette équation ne se prête pas immédiatement à la solution de la partie la plus intéressante du problème, à la solution de la question: trouver toutes les surfaces réelles applicables sur une surface réelle donnée.

En effet, possédant même toutes les solutions réelles de cette équation, il faudra encore séparer celles qui conviennent de celles qui ne conviennent pas.

Aussi n'a-t-on pas tiré le moindre parti de cette équation pour la découverte de *toutes* les surfaces admettant un élément linéaire donné, quel que soit cet élément linéaire.

C'est pourquoi nous avons essayé de reprendre le problème dans toute sa généralité, en suivant une voie nouvelle. Nous rattacherons la solution du problème de la déformation des surfaces à une autre équation aux dérivées partielles du second ordre, qui est aussi de la forme des équations d'Ampère, mais qui admet moyennant certaines conditions des intégrales intermédiaires du premier ordre. Nous établirons ces conditions et donnerons toutes les équations en question, qui sont intégrables par la méthode de Monge et d'Ampère.

Nous rechercherons d'autres cas, dans lesquels notre équation, que nous nommerons équation fondamentale, devient intégrable par la méthode de Laplace ou se ramène à une équation connue intégrée par Liouville. Nous ferons voir que cette équation fondamentale doit être regardée comme la source des découvertes de toutes les classes générales de surfaces applicables l'une sur l'autre qu'on connait aujourd'hui.

Quant au problème des surfaces réelles applicables sur une surface réelle donnée, toutes les solutions réelles de l'équation fondamentale suffisent pour déterminer toutes les surfaces réelles applicables sur la surface réelle donnée.

Nos efforts pour tirer de notre équation fondamentale une classe contenant *toutes* les surfaces qui admettent un élément linéaire essentiellement nouveau, ont échoué jusqu'à ce moment.

I.

En accordant une certaine préférence à la question:

> Trouver toutes les surfaces réelles applicables sur une surface réelle donnée,

nous supposerons, du moins provisoirement, que les variables indépendantes z et ω, qui entrent dans l'élément donné de la surface considérée, sont des quantités réelles, et que les fonctions réelles E', F', G', dans la forme différentielle quadratique

$$(a) \qquad ds^2 = E'dz^2 + 2F'dz\,d\omega + G'd\omega^2$$

qui détermine cet élément, restent continues et finies dans le domaine donné de ces variables, ainsi que la courbure totale, que nous désignerons par K en un point déterminé de la surface. Nous excluons le cas dans lequel K s'annule partout. La quantité $E'G' - F'^2$ sera désignée par la lettre Δ'.

Nous verrons bientôt que la restriction d'être réelles, à laquelle nous avons soumis les variables z et ω, ne jouera de rôle ni pour nos calculs, ni pour nos conclusions générales. Mais nous la maintiendrons pour le moment, parce qu'elle raccourcit l'explication et nous permet de mettre de côté des discussions d'un intérêt secondaire.

Au lieu de l'une des variables z et ω, par exemple au lieu de ω, nous ferons entrer une nouvelle variable t définie par l'équation

$$t = \int_{\omega_0}^{\omega} K\sqrt{\Delta'}\,d\omega,$$

l'intégration se rapportant seulement à la variable ω, et ω_0 étant une fonction arbitraire de la quantité z ou une constante. Cette substitution jouera un rôle dans nos calculs. Comme on en déduit

$$dt = \frac{\partial t}{\partial z}dz + K\sqrt{\Delta'}\,d\omega,$$

on peut tirer des deux équations précédentes les valeurs de ω et de $d\omega$ en fonction de z et t, et de dz et dt, et les substituer dans l'équation donnée pour ds^2.

Mais la détermination de $d\omega$ sera impossible pour toutes les valeurs de z et de ω qui annulent l'une ou l'autre des quantités K et Δ'. Nous bornerons donc nos recherches à un domaine des variables z et ω, ou à une région de la surface, où ne s'évanouit ni K, ni Δ'. (Quant à la quantité Δ' il ne faut éviter en vérité que les points ou les lignes dans lesquelles les courbes $z =$ const. touchent les courbes $\omega =$ const.) En convenant que $\sqrt{\Delta'}$ désigne la racine de même signe que K au point considéré de la surface, tous les éléments de l'intégrale t seront positifs ou négatifs, en même temps que la différence $\omega - \omega_0$, et cette quantité t ne s'annulera qu'aux points de la surface pour lesquels on a:

$$\omega - \omega_0 = 0.$$

Mais ω_0 étant une fonction arbitraire de z, on peut prendre pour le lieu des points $\omega - \omega_0 = 0$ une courbe arbitraire de notre surface. Cette courbe séparera en général deux régions de cette surface. Pour l'une de ces régions la quantité $\omega - \omega_0$ sera positive et négative pour l'autre.

Nous poserons encore

$$t = \frac{1}{\sqrt{\sigma}},$$

σ étant une variable toujours positive, mais $\sqrt{\sigma}$ sera toujours du signe de la quantité t.

Toutes ces suppositions étant admises, on aura

$$\frac{-d\sigma}{2\sqrt{\sigma^3}} = \frac{\partial t}{\partial z} dz + K\sqrt{\Delta'}\, d\omega$$

et en tirant la valeur de $d\omega$ de cette équation, et la substituant dans la formule (a), on trouvera

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

E, F, G désignant les quantités suivantes:

$$\begin{aligned}
E &= E' - \frac{2F'}{K\sqrt{\Delta'}}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right) + \frac{G'}{K^2\Delta'}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2, \\
F &= \qquad - \frac{F'}{2\sqrt{\sigma^3}\,K\sqrt{\Delta'}} + \frac{G'}{2\sqrt{\sigma^3}\,K^2\Delta'}\left(\frac{\partial t}{\partial z}\right), \\
G &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{G'}{4\sigma^3 K^2\Delta'}.
\end{aligned}$$

Nous supposons ces quantités exprimées en fonction de z et de $t = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, à l'aide de l'équation donnée pour la quantité t.

De ces équations on déduit la suivante:

$$K^2(EG - F^2) = \frac{1}{4\sigma^3},$$

ou encore, en posant $EG - F^2 = \Delta$:

$$(1) \qquad K\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

Mais, pour que cette dernière équation soit légitime, il faut déterminer la quantité $\sqrt{\Delta}$ en chaque point (z, t) de la surface proposée de la manière suivante:

Dans la région de la surface pour laquelle $\sqrt{\sigma}$ est une quantité positive, $\sqrt{\Delta}$ dénotera celle des deux racines de Δ qui est du même signe que la courbure totale K au point (z, t).

Dans la région des valeurs négatives de $\sqrt{\sigma}$, $\sqrt{\Delta}$ est pris avec le signe contraire de K au même point. La quantité $\sqrt{\Delta}$ changera donc de signe en traversant la ligne $t = 0$. Donc,

étant donné un élément linéaire quelconque par l'équation

$$ds^2 = E'dz^2 + 2F'dzd\omega + G'd\omega^2,$$

on peut toujours, à l'aide d'une quadrature, réduire cet élément à une autre forme

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

pour laquelle les fonctions E, F, G des variables z et σ satisfont à l'équation

$$(1) \qquad K\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

Cette réduction se fait d'une infinité de manières. Nous nommerons une telle forme: une forme *réduite,* et nous supposerons, dans la suite, que l'élément linéaire de la surface donnée soit ramené à une forme réduite.

Nous nous servirons, dans ce mémoire, des symboles $\left\{\begin{matrix} ik \\ h \end{matrix}\right\}$ de M. Christoffel, pour dénoter les six quantités, importantes dans la théorie des surfaces, qui se composent des trois coefficients E, F, G d'un élément linéaire et de leurs six dérivées premières par rapport aux variables indépendantes qui déterminent la situation d'un point dans la surface donnée. Nous ne reproduirons pas ici les formules explicites pour ces quantités, que l'on rencontre déjà dans le célèbre mémoire de Gauss, et nous supposons connu le mémoire de M. Christoffel: *Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke,* Abhandlungen der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 1868.

On y trouve la signification de ces symboles, d'ailleurs bien connue, et une formule générale pour la courbure totale K en un point quelconque d'une surface dont l'élément linéaire est donné par l'équation

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2.$$

Cette formule s'écrit avec nos notations dans la forme:

$$K\sqrt{\Delta} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\}\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\right] - \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\right]$$

et se réduit à la formule connue de Gauss, en développant le calcul, l'irrationnalité n'étant qu'apparente.

En substituant la valeur de $K\sqrt{\Delta}$ donnée par l'équation (1), l'équation précédente donnera:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\left\{\begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix}\right\}\frac{\sqrt{\Delta}}{G}\right] = \frac{\partial}{\partial \sigma}\left[\left\{\begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix}\right\}\frac{\sqrt{\Delta}}{G} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right].$$

Il existe donc une fonction φ des variables z et σ, ou si l'on veut, des variables z et $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$, définie par l'équation:

$$\varphi = \int_{z_0, \sigma_0}^{z, \sigma} \left(\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{G} d\sigma + \left[\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{G} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \right] dz \right), \tag{2}$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne joignant le point (z_0, σ_0) de la surface au point (z, σ). Si cette ligne traverse la courbe pour laquelle $\frac{1}{\sqrt{\sigma}} = t$ s'annule, le signe de la quantité $\sqrt{\Delta}$ change, en conséquence de la définition donnée de cette quantité, et elle-même s'annule aussi. Comme les quantités $\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}$ et $\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}$ tendent vers l'infini si Δ s'annule, on pourrait craindre que l'élément de cette intégrale cessât d'avoir un sens. Mais on se convaincra, par une discussion des formules explicites relatives à ces quantités, que les dérivées premières de la fonction φ restent finies au point d'intersection, et que l'intégration reste légitime quand on traverse la ligne $t = 0$.

On aurait pu éviter cette discussion facile, en introduisant seulement la variable t dans le calcul, et en observant qu'en vérité les quantités E, F, G ne sont pas connues sans ambiguité quand on se donne les valeurs correspondantes de z et de σ, mais qu'elles admettent des valeurs bien définies en *chaque point* de la surface, parceque pour un tel point les quantités z et $\sqrt{\sigma}$ sont des quantités données.

Mais nous conserverons la variable σ dans nos calculs, parce qu'elle joue un rôle capital dans nos recherches.

La fonction φ de l'équation (2) satisfait aux équations:

$$\tag{2'} \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{G} - \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \frac{\sqrt{\Delta}}{G} \end{aligned}$$

et admet en chaque point de la surface considérée des dérivées premières finies et continues. Comme elle contient les valeurs arbitraires

z_0 et σ_0, on pourra mettre à la place de φ toute autre fonction ne différant de φ que par une constante d'addition arbitraire.

Nous ferons encore usage dans la suite de quatre fonctions nouvelles a, b, α et β, qui sont définies au moyen de la fonction φ par les équations suivantes:

$$(3)\qquad \begin{aligned} a &= \sqrt{E}\sin(\omega+\varphi), & \alpha &= \sqrt{G}\sin\varphi, \\ b &= \sqrt{E}\cos(\omega+\varphi), & \beta &= \sqrt{G}\cos\varphi, \end{aligned}$$

dans lesquelles l'angle ω est choisi de façon à satisfaire aux relations:

$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{E}\sqrt{G}}, \qquad \sin\omega = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{E}\sqrt{G}},$$

la quantité $\sqrt{\Delta}$ ayant le même signe que dans la formule donnée pour la fonction φ.

On tire de ces équations:

$$(4)\qquad a\beta - b\alpha = \sqrt{\Delta},$$

et l'équation (1) se change en la suivante:

$$(1')\qquad K(a\beta - b\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

La connaissance des huit dérivées premières de ces quatre fonctions a, b, α, β, nous sera nécessaire. Elles se composent des dérivées de la fonction φ, et des dérivées des quantités E, F, G. Tirant les dérivées de φ de la formule (2'), et exprimant les dérivées des quantités E, F, G au moyen des symboles $\begin{Bmatrix} ik \\ h \end{Bmatrix}$ de Christoffel, on trouvera les équations, importantes dans la suite,

$$(5)\qquad \begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial z} &= -\frac{b}{\sqrt{\sigma}} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \alpha, & \frac{\partial a}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \alpha, \\
\frac{\partial b}{\partial z} &= \frac{a}{\sqrt{\sigma}} + \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} b + \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \beta, & \frac{\partial b}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} b + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \beta, \\
\frac{\partial \alpha}{\partial z} &= -\frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \alpha, & \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} a + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \alpha, \\
\frac{\partial \beta}{\partial z} &= \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} b + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} \beta, & \frac{\partial \sigma}{\partial \sigma} &= \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} b + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \beta,
\end{aligned}$$

auxquelles nous ajouterons les formules bien connues

$$(5') \qquad \frac{\partial \log \sqrt{\Delta}}{\partial z} = \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}, \qquad \frac{\partial \log \sqrt{\Delta}}{\partial \sigma} = \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Des équations (5), on tire les deux équations, capitales dans notre théorie

$$(6) \qquad \frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} + \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0, \qquad \frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} = 0.$$

Comme on a, en conséquence des équations (3), les trois autres:

$$(7) \qquad \begin{aligned} a^2 + b^2 &= E, \\ a\alpha + b\beta &= F, \\ \alpha^2 + \beta^2 &= G, \end{aligned}$$

en joignant ces équations aux équations (6):

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial \alpha}{\partial \sigma} + \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0, \\ &\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} = 0, \end{aligned}$$

on aura cinq équations auxquelles les quatre quantités a, b, α et β sont soumises. Cette circonstance n'est due qu'à l'existence de l'équation (1), laquelle n'est autre chose que le résultat de l'élimination des quatre quantités a, b, α, β entre les cinq équations.

Remarquons encore que, quatre fonctions a, b, α, β vérifiant ces cinq équations étant connues, ces fonctions vérifieront nécessairement les équations (5), ainsi que l'équation (1').

En effet, dérivant les équations (7) par rapport à z et à σ, on aura, en ajoutant les équations (6), huit équations pour déterminer les huit dérivées de ces quatre fonctions. En résolvant ces équations, on arrivera facilement aux équations (5). Mais pour que ces équations soient compatibles, il faut que les quatre conditions d'intégrabilité qu'elles exigent, se trouvent vérifiées. En les formant on trouve qu'elles se réduisent à une seule:

$$(1') \qquad K(a\beta - b\alpha) = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}},$$

d'où résulte notre proposition.

Si l'on embrasse à la fois les quantités *réelles* et *imaginaires,* les formules établies gardent leur généralité.

L'équation (1)

$$K\sqrt{\Delta} = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}$$

subsistera encore, en fixant convenablement les signes correspondants des deux racines $\sqrt{\Delta}$ et $\sqrt{\sigma}$, ainsi que les formules que nous venons de développer, à l'exception d'un cas particulier. Ce cas, qui ne se présente jamais quand on n'emploie que des variables indépendantes *réelles,* se présentera si l'un ou l'autre des deux coefficients E, G, de l'élément réduit, s'évanouit pour toutes les valeurs des variables z et σ, supposées imaginaires, ou si ces deux coefficients s'annulent ensemble.

Alors une détermination de quatre quantités a, b, α, β vérifiant les équations (6) et (7), à l'aide des équations (3), sera illusoire.

Nous terminerons ce chapitre préliminaire, en donnant, pour ce cas, les valeurs de ces quatre quantités.

Si l'on suppose que $E = 0$ identiquement, on aura $\sqrt{\Delta} = iF$, et en choisissant convenablement la valeur correspondante de la racine $\sqrt{\sigma}$, on aura, au lieu de l'équation (1), la suivante:

$$KiF = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}.$$

Mais, si on a $E = 0$, la formule de Gauss nous donne presque immédiatement

$$-KF = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}}{F}\right),$$

et en substituant on trouve l'équation:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}}{F}\right) = \frac{\partial \frac{-i}{\sqrt{\sigma}}}{\partial \sigma}.$$

Donc, il existera une fonction φ définie par les deux équations

$$\frac{\partial \varphi i}{\partial \sigma} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial z}}{F}, \qquad \frac{\partial \varphi i}{\partial z} = -\frac{i}{\sqrt{\sigma}},$$

d'où on déduit φ par une quadrature.

En prenant les valeurs suivantes:

$$a = Fe^{-\varphi i}, \qquad \alpha = \frac{1}{2}(e^{\varphi i} + Ge^{-\varphi i}),$$

$$b = -iFe^{-\varphi i}, \qquad \beta = \frac{i}{2}(e^{\varphi i} - Ge^{-\varphi i}),$$

on vérifiera immédiatement les équations (6) et (7), ainsi que les équations (5).

Si l'on suppose $G = 0$, on aura de même

$$-KF = \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\sigma}}{F}\right)$$

et joignant cette équation à l'autre (1)

$$KiF = \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}},$$

on obtient la suivante

$$\frac{\partial\left(\frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\sigma}}{F}\right)}{\partial\sigma} = \frac{\partial\frac{-i}{\sqrt{\sigma}}}{\partial\sigma}.$$

On déterminera donc une fonction ψ à l'aide des deux équations

$$\frac{\partial\psi i}{\partial z} = \frac{\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial\sigma}}{F} + \frac{i}{\sqrt{\sigma}}.$$

$$\frac{\partial\psi i}{\partial\sigma} = 0.$$

En prenant les valeurs suivantes:

$$a = \frac{1}{2}(e^{\psi i} + Ee^{-\psi i}), \qquad \alpha = Fe^{-\psi i},$$

$$b = -\frac{i}{2}(e^{\psi i} - Ee^{-\psi i}), \qquad \beta = iFe^{-\psi i},$$

on verifiera facilement les équations (6) et (7) ainsi que les équations (5).

F ne s'annulera jamais, en supposant $E=0$ ou $G=0$, parce que nous avons exclu formellement l'hypothèse $EG-F^2\equiv 0$.

Si E et G s'évanouissent à la fois, on aura l'une ou l'autre des deux déterminations des quantités a, b, α, β.

Ainsi, quand on emploie la substitution

$$t=\frac{1}{\sqrt{\sigma}}=\int_{\omega_0}^{\omega} K\sqrt{\Delta'}\,d\omega$$

pour une forme quelconque du carré de l'élément linéaire donné

$$ds^2 = E'dz^2 + 2F'dzd\omega + G'd\omega^2,$$

il prend la forme

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

qui donne toujours naissance à quatre fonctions a, b, α, β bien déterminées des variables z et σ [1] (ou de z et de $\frac{1}{\sqrt{\sigma}}$), vérifiant les équations:

$$a^2+b^2=E, \quad a\alpha+b\beta=F, \quad \alpha^2+\beta^2=G,$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial z}-\frac{\partial a}{\partial\sigma}+\frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}=0, \qquad \frac{\partial\beta}{\partial z}-\frac{\partial b}{\partial\sigma}-\frac{a}{\sqrt{\sigma}}=0,$$

et en conséquence les équations (5).

Donc, la restriction adoptée, à savoir que les quantités z et σ soient réelles, ne touche nulle part ni les calculs qui précèdent ni les conclusions à en tirer.

II.

Nous supposons maintenant que le carré de l'élément linéaire d'une surface, dont les coordonnées rectangulaires d'un point quelconque sont désignées par ξ, η, ζ, soit donné par la forme *réduite*

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

---

[1] contenant une constante arbitraire.

et que, de plus, les cosinus directeurs de la normale en ce point soient désignés par X'', Y'', Z''. Posons encore:

$$dX''d\xi + dY''d\eta + dZ''d\zeta = c_{11}dz^2 + 2c_{12}dzd\sigma + c_{22}d\sigma^2,$$

les coefficients c_{ik} étant des fonctions connues des variables indépendantes z et $\sqrt{\sigma}$, qui déterminent la situation d'un point de la surface.

Considérons le système suivant de neuf quantités X, Y, Z, X', Y', Z' et X'', Y'', Z'':

$$(8)\quad \begin{aligned}
X &= \frac{\beta\frac{\partial\xi}{\partial z} - b\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}}, & X' &= \frac{a\frac{\partial\xi}{\partial\sigma} - \alpha\frac{\partial\xi}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}},\\
Y &= \frac{\beta\frac{\partial\eta}{\partial z} - b\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}}, & Y' &= \frac{a\frac{\partial\eta}{\partial\sigma} - \alpha\frac{\partial\eta}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}},\\
Z &= \frac{\beta\frac{\partial\zeta}{\partial z} - b\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}}, & Z' &= \frac{a\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma} - \alpha\frac{\partial\zeta}{\partial z}}{\sqrt{\Delta}},
\end{aligned}$$

$$X'' = \frac{\frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma} - \frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$Y'' = \frac{\frac{\partial\zeta}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma} - \frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\zeta}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$Z'' = \frac{\frac{\partial\xi}{\partial z}\frac{\partial\eta}{\partial\sigma} - \frac{\partial\eta}{\partial z}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}}{\sqrt{\Delta}},$$

$\sqrt{\Delta}$ étant la quantité $a\beta - b\alpha$.

Ces neuf quantités sont évidemment les coefficients d'une substitution orthogonale, ou si l'on aime mieux, les neuf cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre rectangulaire, ayant son origine en un point P de notre surface.

La considération de ce système n'est pas nouvelle. On le trouve, dans sa forme la plus générale, dans l'ouvrage classique de M. Darboux (2[e] partie, page 377). Mais nous donnerons une série de conséquences nouvelles de cette considération.

L'ensemble des arêtes des trièdres donnés par les neuf cosinus directeurs (8), se divise en trois congruences distinctes de droites, ayant leurs points de départ aux points P de la surface considérée. Les deux premières de ces congruences de droites, possédant respectivement les cosinus directeurs (X, Y, Z) et (X', Y', Z') sont formées l'une par toutes les tangentes à un système de lignes situées sur cette surface, l'autre par toutes les tangentes au système de trajectoires orthogonales aux lignes du premier système. La troisième congruence est celle des normales à la surface.

On peut donc concevoir *trois* représentations sphériques de notre surface, en regardant les quantités X, Y, Z ou les autres X', Y', Z' ou enfin X'', Y'', Z'' comme les coordonnées de l'image du point correspondant de la surface sur une sphère dont le rayon est l'unité.

Ce sera notre but le plus prochain de montrer combien les deux représentations déterminées respectivement par les coordonnées (X, Y, Z) et (X', Y', Z'), sont liées intimement à la déformation de cette surface.

Cette liaison s'exprime par les théorèmes suivants:

Supposant données les coordonnées X, Y, Z de l'image du point P de la surface en fonction des deux variables indépendantes nouvelles u et v, les anciennes variables z et σ seront les fonctions de u et de v, qu'il s'agit de déterminer. Soit le carré de l'élément linéaire de cette représentation

$$\mathfrak{E} = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2,$$

les e_{ik} étant des fonctions connues de u et de v, je dis que la fonction σ ne sera autre chose que le premier paramètre différentiel de la fonction z par rapport à la forme différentielle quadratique $\mathfrak{E}$, c'est à dire

$$\sigma = \Delta(z) = \frac{e_{11}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 - 2e_{12}\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} + e_{22}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2}{e_{11}e_{22} - e_{12}^2}.$$

Quant à la fonction z elle-même, elle se déterminera par une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui exprime l'évanouissement d'un invariant différentiel par rapport à la forme $\mathfrak{E}$, et se compose de simples paramètres différentiels.

Cette équation étant intégrée, l'ensemble des surfaces applicables sur la surface donnée se déterminera par des quadratures.

Pour démontrer ces propositions, il ne nous reste qu'à calculer la forme $\mathfrak{E}$ au moyen des variables indépendantes z et σ, et à former les invariants en question. Les valeurs trouvées demeureront les mêmes pour les mêmes fonctions et le même point de la sphère $X^2+Y^2+Z^2=1$, quel que soit le système des variables indépendantes dont on fait usage.

Nous calculons les dérivées des coordonnées X, Y, Z à l'aide des équations (5) du chapitre précédent et en faisant usage des équations

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}=\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}-c_{11}X'',$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z\partial\sigma}=\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}-c_{12}X'',$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial\sigma^2}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\xi}{\partial\sigma}-c_{22}X'',$$

et de leurs analogues qui se trouvent presque sous la même forme dans le mémoire de Gauss.

Ayant effectué le calcul, on arrivera aux équations qui suivent:

$$(9)\qquad\begin{aligned}
\frac{\partial X}{\partial z}&=X'R-X''Q, & \frac{\partial X}{\partial\sigma}&=X'R_1-X''Q_1,\\
\frac{\partial X'}{\partial z}&=X''P-XR, & \frac{\partial X'}{\partial\sigma}&=X''P_1-XR_1,\\
\frac{\partial X''}{\partial z}&=XQ-X'P, & \frac{\partial X''}{\partial\sigma}&=XQ_1-X'P_1
\end{aligned}$$

les quantités P, Q, R et P_1, Q_1, R_1 étant données par les formules suivantes:

$$\begin{aligned}
P&=\frac{ac_{11}-\alpha c_{12}}{\sqrt{\Delta}}, & P_1&=\frac{ac_{12}-\alpha c_{22}}{\sqrt{\Delta}},\\
Q&=\frac{\beta c_{11}-bc_{12}}{\sqrt{\Delta}}, & Q_1&=\frac{\beta c_{12}-bc_{22}}{\sqrt{\Delta}},\\
R&=-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, & R_1&=0.
\end{aligned}$$

Les conditions d'intégrabilité des équations (9), conditions bien connues, prendront la forme:

$$
(10)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial \sigma} - \frac{\partial P_1}{\partial z} &= \frac{Q_1}{\sqrt{\sigma}},\\
\frac{\partial Q}{\partial \sigma} - \frac{\partial Q_1}{\partial z} &= -\frac{P_1}{\sqrt{\sigma}},\\
\frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}} &= PQ_1 - QP_1.\text{[1]}
\end{aligned}
$$

Des équations (9), nous tirons la forme cherchée $\mathfrak{E}$ du carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique:

$$
\mathfrak{E} = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{1}{\sigma} + Q^2\right)dz^2 + 2QQ_1 dz d\sigma + Q_1^2 d\sigma^2,
$$

et si nous formons le paramètre différentiel $\Delta(z)$ par rapport à cette forme, nous aurons à l'instant

$$
(11)\qquad \Delta(z) = \sigma,
$$

équation par laquelle la première de nos propositions se trouve démontrée.

Formons encore le paramètre mixte des deux fonctions z et X, ce paramètre est donné évidemment par la formule

$$
\Delta(z, X) = \frac{\sigma}{Q_1^2}\left(Q_1^2 \frac{\partial X}{\partial z} - QQ_1 \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right).
$$

A l'aide des équations (9), on trouve

$$
\Delta(z, X) = - X'\sqrt{\sigma}.
$$

Ainsi on aura:

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
X' &= -\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\sigma}},\\
Y' &= -\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\sigma}},\\
Z' &= -\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\sigma}},
\end{aligned}
$$

les deux dernières équations se démontrant comme la première.

[1] $Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2$ étant une forme réduite,

$$
(P^2 + Q^2)dz^2 + 2(PP_1 + QQ_1)dzd\sigma + (P_1^2 + Q_1^2)d\sigma^2,
$$

c'est à dire $dX''^2 + dY''^2 + dZ''^2$ le sera aussi.

Des équations (8), on tire aussitôt les suivantes

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = aX + bX',$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \alpha X + \beta X'$$

et quatre autres analogues, se rapportant aux quantités η et ζ. Substituant les valeurs des quantités X', Y', Z' que nous venons de trouver, on est conduit aux trois équations

$$(13)\qquad \begin{aligned} d\xi &= \left[aX - b\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]dz + \left[\alpha X - \beta\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]d(\Delta(z)), \\ d\eta &= \left[aY - b\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]dz + \left[\alpha Y - \beta\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]d(\Delta(z)), \\ d\zeta &= \left[aZ - b\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]dz + \left[\alpha Z - \beta\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right]d(\Delta(z)), \end{aligned}$$

en utilisant l'équation $\sigma = \Delta(z)$.

Si l'on se souvient que les quatre quantités a, b, α, β sont des fonctions *connues* des variables z et $\sigma = \Delta(z)$, on remarquera bien que les formules importantes (13) donnent les valeurs des différentielles $d\xi, d\eta, d\zeta$ des coordonnées ξ, η, ζ d'un point quelconque de la surface donnée sous une forme **invariante,** c'est à dire que les valeurs de ces différentielles restent les mêmes, quelles que soient les variables indépendantes u et v dont on a fait usage.

Ces différentielles étant des fonctions linéaires et homogènes des différentielles du et dv, il semble que les équations (13) exigent l'existence de trois conditions d'intégrabilité. Mais nous verrons tout de suite que ces trois conditions se réduisent à une seule.

L'équation qui exprime cette seule condition, équation aux dérivées partielles à laquelle la fonction z sera assujettie, nous l'appellerons notre équation fondamentale.

Pour établir cette équation nous éviterons la voie directe un peu compliquée et nous procèderons comme il suit.

En posant, pour abréger l'écriture

$$z_{11}=\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-\binom{11}{1}\frac{\partial z}{\partial u}-\binom{11}{2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$z_{12}=\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}-\binom{12}{1}\frac{\partial z}{\partial u}-\binom{12}{2}\frac{\partial z}{\partial v},$$

$$z_{22}=\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}-\binom{22}{1}\frac{\partial z}{\partial u}-\binom{22}{2}\frac{\partial z}{\partial v}$$

les crochets $\binom{ik}{h}$ dénotant les symboles de M. Christoffel qui se rapportent à la forme $e_{11}du^2+2e_{12}dudv+e_{22}dv^2$, symboles distincts des crochets $\left|\begin{matrix}ik\\h\end{matrix}\right|$ appartenant à la forme $Edz^2+2Fdzd\sigma+Gd\sigma^2$, nous calculerons les trois paramètres différentiels du second ordre qui suivent:

$$\Delta_2(z)=\frac{e_{11}z_{22}-2e_{12}z_{12}+e_{22}z_{11}}{e_{11}e_{22}-e_{12}^2},$$

$$J(z)=\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 z_{22}-2\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}z_{12}+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 z_{11}}{e_{11}e_{22}-e_{12}^2},$$

$$\theta(z)=\frac{z_{11}z_{22}-z_{12}^2}{e_{11}e_{22}-e_{12}^2},$$

dont le premier et le dernier coïncident avec le paramètre second de M. Beltrami et avec l'invariant $-\sigma(z)$ de M. Darboux.

Faisant usage des variables indépendantes z et σ, la forme

$$e_{11}du^2+2e_{12}dudv+e_{22}dv^2$$

sera représentée par l'équation suivante:

$$dX^2+dY^2+dZ^2=\left(\frac{1}{\sigma}+Q^2\right)dz^2+2QQ_1dzd\sigma+Q_1^2d\sigma^2.$$

En se servant des formules explicites des symboles $\binom{ik}{h}$ appartenant à cette forme, ainsi que des équations (10), on trouvera facilement

$$(14)\qquad \begin{aligned} \binom{11}{1} &= -QP\sqrt{\sigma}, \\ \binom{12}{1} &= -Q_1 P\sqrt{\sigma}, \\ \binom{22}{1} &= -Q_1 P_1\sqrt{\sigma}, \end{aligned}$$

Comme on a pour les mêmes variables indépendantes

$$z_{11} = -\binom{11}{1}, \qquad z_{12} = -\binom{12}{1}, \qquad z_{22} = -\binom{22}{1}$$

on saisit sans peine la validité des déterminations:

$$(15)\qquad \begin{aligned} \sigma\Delta_2(z) - J(z) &= -\frac{1}{2}\sigma\frac{Q}{Q_1}, \\ J(z) &= -\sqrt{\sigma^3}\frac{P_1}{Q_1}, \\ \theta(z) &= -\frac{\sqrt{\sigma}}{2}\frac{P}{Q_1}. \end{aligned}$$

Formons maintenant la condition d'intégrabilité de l'équation:

$$d\xi = (aX + bX')dz + (\alpha X + \beta X')d\sigma$$

en faisant usage des équations (9). Cette condition

$$\frac{\partial(aX + bX')}{\partial\sigma} = \frac{\partial(\alpha X + \beta X')}{\partial z}$$

se changera en:

$$0 = X\Big(\frac{\partial a}{\partial\sigma} - \frac{\partial\alpha}{\partial z} - \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}\Big) + X'\Big(\frac{\partial b}{\partial\sigma} - \frac{\partial\beta}{\partial z} + \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}\Big) + X''(-aQ_1 + bP_1 + \alpha Q - \beta P).$$

Comme les quantités qui multiplient les cosinus X et X' s'évanouissent en conséquence des équations (6), il ne restera que l'équation:

$$0 = X''(-aQ_1 + bP_1 + \alpha Q - bP).$$

Les deux conditions analogues conduisent à deux équations correspondantes, et on voit que les trois conditions d'intégrabilité mentionnées n'exigent que l'équation unique:

$$(16) \qquad -aQ_1 + bP_1 + \alpha Q - \beta P = 0.$$

Cette équation, sans doute, se trouvera satisfaite par les valeurs données déjà des quantités P, Q, P_1, Q_1. Mais il s'agit de faire entrer les variables indépendantes u et v dans cette équation. Divisant par Q_1 (qui ne s'annule pas), et portant les valeurs des quotients $\frac{Q}{Q_1}, \frac{P}{Q_1}, \frac{P_1}{Q_1}$ tirées des équations (15) dans l'équation trouvée, on aura *l'équation fondamentale* sous sa forme invariante:

$$(17) \qquad a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0,$$

σ désignant $\Delta(z)$ et a, b, α, β les fonctions de z et σ déterminées auparavant, où on a remplacé la variable σ par $\Delta(z)$.

Chaque fonction z des variables u et v satisfaisant à l'équation (17), rendra intégrables les différentielles $d\xi, d\eta, d\zeta$ des équations générales (13).

On peut donc énoncer le théorème suivant:

Etant données trois fonctions ξ, η, ζ des deux variables indépendantes z et σ qui vérifient l'équation

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

dans laquelle E, F, G représentent les coefficients d'une *forme réduite*, si l'on conçoit les trois fonctions X, Y, Z définies par les formules (8), comme des fonctions *données* de deux nouvelles variables indépendantes u et v, vérifiant l'équation

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2,$$

la fonction z considérée comme une fonction des variables u et v sera une intégrale de l'équation (17) aux dérivées partielles du second ordre, (σ étant $\Delta(z)$):

$$a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2\alpha\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0.$$

Mais vice versa on aura encore ce second théorème:

Etant données trois fonctions X, Y, Z des deux variables u et v, vérifiant les équations

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2,$$
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

si l'on connaît une intégrale z de l'équation aux dérivées partielles du second ordre:

$$a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2a\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0,$$
$$\sigma = \Delta(z),$$

les trois différentielles $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$

$$d\xi = \left(aX - b\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)dz + \left(\alpha X - \beta\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)d\Delta(z),$$

$$(13) \qquad d\eta = \left(aY - b\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)dz + \left(\alpha Y - \beta\frac{\Delta(z, Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)d\Delta(z),$$

$$d\zeta = \left(aZ - b\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)dz + \left(\alpha Z - \beta\frac{\Delta(z, Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)d\Delta(z)$$

seront les différentielles exactes de trois fonctions ξ, η, ζ des variables u et v, (ou des variables z et σ) vérifiant l'équation

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2,$$

dans laquelle E, F, G désignent les coefficients d'une *forme réduite* donnée, a, b, α, β désignant les quatre fonctions aussi données appartenant à cette forme.

En combinant ces deux théorèmes généraux, on en conclura facilement:

Toutes les *intégrales réelles* de *l'équation fondamentale,* formée pour une surface réelle donnée, étant connues, *toutes les surfaces réelles,* applicables sur cette surface, s'en déduisent par des quadratures.

Toutes nos propositions sont donc démontrées.

Il sera souvent préférable de donner à notre second théorème une autre forme, où n'interviennent pas les trois quantités E, F, G. La voici:

Etant données trois fonctions X, Y, Z des deux variables u, v, vérifiant les équations:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = e_{11}du^2 + 2e_{12}dudv + e_{22}dv^2$$

et quatre autres fonctions a, b, α, β des deux variables z et σ, liées par les deux relations:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial \alpha}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0, \\ &\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{a}{\sqrt{\sigma}} = 0, \end{aligned}$$

l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2a\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0,$$

σ signifiant le paramètre différentiel $\Delta(z)$, rendra différentielles totales exactes les expressions:

$$d\xi = \left(aX - b\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)dz + \left(\alpha X - \beta\frac{\Delta(z, X)}{\sqrt{\Delta(z)}}\right)d\Delta(z)$$

etc., et donnera donc par des quadratures *toutes* les surfaces dont l'élément linéaire ds^2 comporte la forme:

$$ds^2 = (a^2 + b^2)dz^2 + 2(a\alpha + b\beta)dzd\sigma + (\alpha^2 + \beta^2)d\sigma^2.$$

III.

Etudions encore la seconde représentation de la surface donnée obtenue à l'aide des cosinus X', Y', Z' au lieu de X, Y, Z.

En répétant les calculs que nous venons de développer, on conçoit aussitôt, qu'il ne s'agit que d'un changement des lettres a, b, α, β.

Pour avoir les équations appartenant à cette représentation, il faut remplacer les lettres a, b, α, β par les lettres $b, -a, \beta, -\alpha$.

Ce changement n'apporte aucune modification dans les équations (5) et (6) du chapitre I.

Supposons maintenant les quantités X', Y', Z' *données* en fonction des deux nouvelles variables indépendantes u' et v', on aura pour l'élément linéaire de cette seconde représentation l'équation:

$$\mathfrak{E}' = dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = e'_{11}du'^2 + 2e'_{12}du'dv' + e'_{22}dv'^2.$$

L'équation fondamentale à laquelle satisfera la fonction z des variables u', v' prendra la forme

$$(17') \qquad b'\sigma' + 2\beta'\sigma'\Delta'_2(z) + \frac{\alpha' - 2\beta'\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} J'(z) + 2\alpha'\sqrt{\sigma}\,\theta'(z) = 0,$$

$$\sigma' = \sigma = \Delta'(z),$$

les accents indiquant qu'il s'agit des variables u' et v', et que les invariants se rapportent à la forme $e'_{11}du'^2 + 2e'_{12}du'dv' + e'_{22}dv'^2$.

Au lieu des équations (12) obtenues précédemment

$$(12) \quad X' = -\frac{\Delta(z\,,X)}{\sqrt{\Delta(z)}}, \qquad Y' = -\frac{\Delta(z\,,Y)}{\sqrt{\Delta(z)}}, \qquad Z' = -\frac{\Delta(z\,,Z)}{\sqrt{\Delta(z)}}$$

qui ne donnent que deux équations *indépendantes*, on trouverait les trois autres

$$(12') \qquad X = \frac{\Delta'(z\,,X')}{\sqrt{\Delta'(z)}}, \qquad Y = \frac{\Delta'(z\,,Y')}{\sqrt{\Delta'(z)}}, \qquad Z = \frac{\Delta'(z\,,Z')}{\sqrt{\Delta'(z)}},$$

aussi équivalentes à deux équations indépendantes.

En concevant toujours les quantités X, Y, Z comme des fonctions *données* des variables u et v, les quantités X', Y', Z' comme *données* par les variables u' et v', les équations (12) et (12') entraînent *quatre* équations indépendantes liant les huit valeurs $u\,,v\,,\frac{\partial z}{\partial u}\,,\frac{\partial z}{\partial v}$ et $u', v', \frac{\partial z}{\partial u'}\,,\frac{\partial z}{\partial v'}$.

Si la fonction z est considérée comme une fonction *connue* des variables u et v, on peut tirer de ces quatre équations, non seulement les variables u', v' en fonction des $u\,,v$, mais aussi les dérivées $\frac{\partial z}{\partial u'}\,,\frac{\partial z}{\partial v'}$ en fonction des mêmes variables.

On peut donc regarder ces quatre équations comme définissant une transformation de l'équation *fondamentale* (17) dans l'autre (17'), et aussi l'une de ces deux équations comme la transformée de l'autre à l'aide des équations (12) et (12').

On aurait trouvé directement l'équation (17') en remplaçant la fonction φ du premier chapitre par la fonction $\varphi + \frac{1}{2}\pi$. Choisissant une constante arbitraire au lieu de $\frac{1}{2}\pi$, l'équation fondamentale (17) prendrait une forme un peu plus générale que celle de l'équation (17'). Mais cette nouvelle équation elle-même n'est qu'une transformée de l'équation (17), au moyen d'un système d'équations analogue au système des équations (12) et (12'), qu'on forme sans peine.

Nous n'insisterons pas ici sur ces transformations, utiles dans certaines recherches géométriques, en nous contentant des remarques suivantes:

Les équations (17) et (17'), l'une étant la transformée de l'autre à l'aide des équations (12) et (12'), admettent à la fois des intégrales intermédiaires du premier ordre, ou aucune des deux équations n'en admet. En effet, si l'équation (17) est une conséquence immédiate d'une équation de la forme

$$F\left(u\,,\,v\,,\,\frac{\partial z}{\partial u}\,,\,\frac{\partial z}{\partial v}\,,\,z\right) = \text{const.}$$

l'équation (17') sera la conséquence immédiate de l'équation

$$F'\left(u',\,v',\,\frac{\partial z}{\partial u'}\,,\,\frac{\partial z}{\partial v'}\,,\,z\right) = \text{const.}$$

tirée de la précédente, en y substituant les valeurs des $u\,,\,v\,,\,\frac{\partial z}{\partial u}\,,\,\frac{\partial z}{\partial v}$ déduites des équations (12) et (12').

Donc les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une intégrale intermédiaire du premier ordre de l'équation (17), coïncident avec les conditions pour l'existence d'une telle intégrale de l'équation (17'), et vice versa.

IV.

Portant les valeurs des invariants $\Delta_2(z)$, $J(z)$ et $\theta(z)$, données auparavant, dans l'équation (17), cette équation prendra la forme des équations aux dérivées partielles du second ordre étudiées par AMPÈRE.

Nous supposons, sans altérer la généralité, que la quantité β ne s'évanouit pas identiquement. Car β s'évanouissant, on peut étudier l'équation correspondante (17') dans laquelle $-\alpha$ prend la place de β. Mais α ne s'annule pas en même temps que β, autrement la quantité $EG - F^2 = (a\beta - b\alpha)^2$ s'annulerait. Donc, le facteur de l'invariant $\theta(z)$ pour l'une des deux équations fondamentales (17) ou (17') ne s'annule pas.

Soit l'équation (17) cette équation.

Multipliant l'équation (17) par

$$-\frac{e_{11}e_{22} - e_{12}^2}{2\beta\sqrt{\sigma}}$$

après avoir substitué les valeurs des invariants $\Delta_2(z)$, $J(z)$ et $\theta(z)$, on voit facilement qu'on peut mettre l'équation trouvée sous la forme

$$\text{(A)}\quad \left[z_{11} - \lambda e_{11} - \rho\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right]\left[z_{22} - \lambda e_{22} - \rho\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] - \left[z_{12} - \lambda e_{12} - \rho\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}\right]^2$$
$$+ e\frac{\sqrt{\sigma}(ab - a\beta)}{2\beta^2} = 0;$$

λ, ρ, e désignant les quantités

$$\text{(B)}\quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{a}{\beta}\sqrt{\sigma}, \\ \rho &= -\frac{b + 2a\sqrt{\sigma}}{2\beta\sigma}, \\ e &= e_{11}e_{22} - e_{12}^2. \end{aligned}$$

L'équation (A) est identique à notre équation fondamentale (17), mais sa forme se prête mieux à des recherches ultérieures. Pour ne pas fatiguer, nous mentionnerons seulement le fait que les équations différentielles des *caractéristiques* de cette équation aux dérivées partielles, coïncident avec les équations différentielles des *lignes asymptotiques* de la surface donnée. La belle remarque de M. DARBOUX subsiste donc pour nos équations. On démontre facilement cette proposition en utilisant l'invariance de l'équation (A) et l'invariance des formes quadratiques qui s'annulent pour les caractéristiques.

L'équation (A) se simplifie beaucoup en employant au lieu des deux variables indépendantes u, v quelconques, les deux variables x et y, bien souvent utilisées, qui donnent au carré de l'élément de la sphère $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$, la forme:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{4dxdy}{(1+xy)^2}.$$

Pour ces variables on aura:

$$X = \frac{x+y}{1+xy}, \qquad Y = \frac{1}{i}\frac{x-y}{1+xy}, \qquad Z = \frac{1-xy}{1+xy},$$

$$e_{11} = 0, \qquad e_{12} = \frac{2}{(1+xy)^2}, \qquad e_{22} = 0, \qquad e = \frac{-4}{(1+xy)^4}$$

et de plus

$$z_{11} = r + \frac{2y}{1+xy}p,$$

$$z_{12} = s,$$

$$z_{22} = t + \frac{2x}{1+xy}q,$$

en se servant des notations de MONGE pour les premières et les secondes dérivées de la fonction z, on aura encore

$$\sigma = \Delta(z) = (1+xy)^2 pq.$$

Portant ces valeurs dans l'équation (A), elle s'écrit

$$\left(r + \frac{2y}{1+xy}p - \rho p^2\right)\left(t + \frac{2x}{1+xy}q - \rho q^2\right) - \left(s - \frac{2\lambda}{(1+xy)^2} - \rho pq\right)^2$$

$$- \frac{4}{(1+xy)^4}\frac{ab-\beta a}{2\beta^2}\sqrt{\sigma} = 0.$$

Si l'on pose, pour abréger,

$$(C)\qquad W^2 = \frac{b\alpha - a\beta}{2\beta^2}\sqrt{\sigma} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\beta^2}\sqrt{\sigma} = -\frac{1}{4K\sigma\beta^2},$$

cette équation prendra l'autre forme

$$\left(r + \frac{2y}{1+xy}p - \rho p^2\right)\left(t + \frac{2x}{1+xy}q - \rho q^2\right)$$
$$-\left(s - 2\frac{\lambda + Wi}{(1+xy)^2} - \rho pq\right)\left(s - 2\frac{\lambda - Wi}{(1+xy)^2} - \rho pq\right) = 0.$$

Finalement, adoptant les notations:

$$(D)\qquad \begin{aligned} \tau &= \rho\sigma + 2(\lambda + Wi), \\ \tau_* &= \rho\sigma + 2(\lambda - Wi) \end{aligned}$$

on obtient notre *équation fondamentale* sous la forme suivante:

$$(A')\qquad \left(r + \frac{2y}{1+xy}p - \rho p^2\right)\left(t + \frac{2x}{1+xy}q - \rho q^2\right)$$
$$-\left(s - \frac{\tau}{\sigma}pq\right)\left(s - \frac{\tau_*}{\sigma}pq\right) = 0,$$

qui sera la base des recherches du chapitre prochain.

Nous nous posons la question:

> quelles sont les conditions, nécessaires et suffisantes, pour que cette équation (A') devienne intégrable par la méthode d'Ampère, c'est à dire qu'elle admette deux intégrales intermédiaires générales du premier ordre?

Cette question étant posée, nous allons en donner la solution complète.

V.

Ne voulant pas entrer dans les détails de la théorie des caractéristiques, donnée par Monge et Ampère, nous mettrons en tête de nos développements la proposition suivante:

Etant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre de la forme suivante:

$$(r - A_{11})(t - A_{22}) - (s - A_{12})(s - A_{21}) = 0$$

les lettres A_{ik} désignant des fonctions *données* des cinq variables x, y, z, p, q, et s'il existe une fonction φ de ces variables, satisfaisant à la fois aux deux équations linéaires suivantes:

$$\text{(a)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + A_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + A_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + A_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + A_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0 \end{aligned}$$

ou aux deux autres:

$$\text{(b)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + A_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + A_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + A_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial p} + A_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0, \end{aligned}$$

la fonction φ égalée à une constante arbitraire, donnera une intégrale du premier ordre de cette équation aux dérivées partielles du second ordre.

En effet de l'équation $\varphi - C = 0$ on tire en dérivant:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + r\frac{\partial\varphi}{\partial p} + s\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + s\frac{\partial\varphi}{\partial p} + t\frac{\partial\varphi}{\partial q} = 0. \end{aligned}$$

En retranchant les équations (a) de ces dernières on aura:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial p}(r - A_{11}) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(s - A_{12}) = 0, \\ \frac{\partial\varphi}{\partial p}(s - A_{21}) + \frac{\partial\varphi}{\partial q}(t - A_{22}) = 0, \end{aligned}$$

et comme $\frac{\partial\varphi}{\partial p}$ et $\frac{\partial\varphi}{\partial q}$ ne s'annulent pas identiquement ensemble, l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\text{(P)} \qquad (r - A_{11})(t - A_{22}) - (s - A_{12})(s - A_{21}) = 0.$$

sera une conséquence immédiate des équations (a).

On trouverait le même résultat en supposant satisfaites les équations (b) par la fonction φ.

La recherche des conditions sous lesquelles l'équation (P) admet des intégrales intermédiaires premières se réduit donc à la recherche des conditions sous lesquelles les deux équations (a) ou les deux autres (b), admettent des solutions communes.

Comme il ne s'agit ici que de notre équation (A'), qui a la forme en question, nous écrivons les deux systèmes d'équations (a) et (b), se rapportant à cette équation (A'), en les désignant par (a') et (b').

On a

$$
(\mathrm{a}')\qquad
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \left(\rho p^2 - \frac{2yp}{1+xy}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\tau}{\sigma}pq\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \mathfrak{A}(\varphi),\\
0 &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\tau_*}{\sigma}pq\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \left(\rho q^2 - \frac{2xq}{1+xy}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \mathfrak{E}(\varphi)
\end{aligned}
$$

et

$$
(\mathrm{b}')\qquad
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} + p\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \left(\rho p^2 - \frac{2yp}{1+xy}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \frac{\tau_*}{\sigma}pq\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \mathfrak{A}'(\varphi),\\
0 &= \frac{\partial\varphi}{\partial y} + q\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\tau}{\sigma}pq\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \left(\rho q^2 - \frac{2xq}{1+xy}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \mathfrak{E}'(\varphi).
\end{aligned}
$$

Je dis que l'existence d'une fonction $\varphi(x, y, z, p, q)$ satisfaisant à la fois aux deux équations (a'), amène nécessairement l'existence d'une autre fonction $\varphi_*(x, y, z, p, q)$ satisfaisant aux deux équations (b').

En effet, les équations (a') étant vérifiées identiquement par la fonction φ, il sera indifférent de quelles lettres on désigne les cinq variables qui entrent dans cette équation. En permutant donc les lettres p et q et les lettres x et y, laissant z à sa place, et désignant encore par φ_* la fonction déduite de φ par cette permutation, les équations (a') restent vérifiées. Mais comme nous n'avons pas changé ni la variable z ni la variable $\sigma = (1 + xy)^2pq$ par cette permutation, les fonctions ρ, τ, τ_*, qui ne dépendent que de z et σ, resteront les mêmes, et on sera conduit au système (b') formé par rapport à la fonction φ_*.

Ainsi si l'équation (A') admet une intégrale du premier ordre $\varphi = \varphi(x, y, z, p, q)$, elle admettra aussi l'intégrale $\varphi_* = \varphi(y, x, z, q, p)$. Le cas $\varphi = \varphi_*$ ne peut pas se présenter, sans que $\tau = \tau_*$ ou $W = 0$.

Mais ayant égard à l'équation (C) du chapitre IV on reconnaît que l'hypothèse $W = 0$ est exclue de nos recherches.

Il ne nous reste plus qu'à étudier les conditions sous lesquelles le système (a) admet des fonctions φ vérifiant à la fois les deux équations de ce système.

Dans ce but, nous formons, en suivant les méthodes de Bour et Jacobi, l'équation:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C}(\varphi)) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}(\varphi)) = 0,$$

équation linéaire et homogène par rapport aux dérivées de la fonction φ.

Nous jugeons superflu d'écrire ici le calcul fatigant et prolixe, et nous nous bornerons à donner des indications rapides.

Les quantités P et Q étant définies par les équations suivantes:

$$P = \frac{\partial W^2}{\partial \sigma} + \sqrt{\sigma}\left(\frac{\partial \frac{a}{\beta}}{\partial z} - \frac{b}{\beta}\frac{\partial \frac{a}{\beta}}{\partial \sigma}\right) + \frac{a^2}{\beta^2} + 1,$$

$$Q = -\frac{b}{\beta}\frac{\partial W}{\partial \sigma} + W\left(\frac{\partial \frac{b}{\beta}}{\partial \sigma} - \rho\right) + \frac{\partial W}{\partial z}$$

on arrive à l'équation:

$$\text{(B)} \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{C}(\varphi)) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}(\varphi)) = 2W\frac{\partial \varphi}{\partial z} - (Q + Pi)\frac{\partial \varphi}{\partial p}p - (Q - Pi)\frac{\partial \varphi}{\partial q}q = 0.$$

Utilisant pour les dérivations qui figurent dans les expressions des quantités P et Q, la formule (C) (chapitre IV)

$$W^2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2\beta^2}\sqrt{\sigma}$$

et les équations (5) (chapitre I) on trouvera aussi:

$$(18) \qquad \begin{aligned} P &= W^2\frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial \sigma}, \\ Q &= \frac{1}{2}W\left[\frac{b}{\beta}\frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial z}\right]. \end{aligned}$$

Etudions en premier lieu le cas dans lequel l'équation

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{C}(\varphi)) - \mathfrak{C}(\mathfrak{A}(\varphi)) = 0$$

se trouve vérifiée identiquement, c'est à dire par une fonction φ quelconque. Les équations $\mathfrak{A}(\varphi) = 0$, $\mathfrak{C}(\varphi) = 0$ seront des équations Jacobiennes.

Comme W ne s'évanouit pas, l'équation (B) ne sera satisfaite pour une fonction quelconque que sous les conditions:

$$(19) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}} = 2l,$$

l désignant une constante arbitraire, mais différente de zéro.

La première de ces équations exige que les fonctions W, ρ, τ, τ_* ne contiennent pas la variable z.

Il faut donc que les quotients $\frac{a}{\beta}$, $\frac{b}{\beta}$, $\frac{\alpha}{\beta}$ dont dépendent ces fonctions, ne contiennent pas la variable z.

Mais sous cette supposition les équations (6) (chapitre I) exigent pour les quantités a, b, α, β les formes suivantes:

$$a = a'e^{nz}, \qquad b = b'e^{nz}, \qquad \alpha = \alpha'e^{nz}, \qquad \beta = \beta'e^{nz}$$

les a', b', α', β' désignant des fonctions de la seule variable σ, n étant une constante arbitraire.

La seconde de ces équations exige que n soit égale à zéro.

Les fonctions a, b, α, β étant maintenant des fonctions de la seule variable σ, les équations (6) donnent les relations:

$$\frac{\partial a}{\partial \sigma} = \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}}, \qquad \frac{\partial b}{\partial \sigma} = -\frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}$$

desquelles on tire

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{1}{2}(a^2 + b^2) = \frac{a\beta - b\alpha}{\sqrt{\sigma}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\sigma}} = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial \sigma},$$

ou, en ayant égard à nos équations (19)

$$\frac{\partial E}{\partial \sigma} = \frac{1}{l},$$

$$E = \frac{\sigma - m}{l} \quad \text{et:} \quad EG - F^2 = \frac{\sigma}{4l^2},$$

m désignant une constante arbitraire nouvelle.

Le carré de l'élément linéaire de la surface correspondant à ces valeurs de a, b, α et β sera donc:

$$ds^2 = Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2 = E\left(dz + \frac{F}{E}d\sigma\right)^2 + \frac{EG - F^2}{E}d\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma - m}{l}dr^2 + \frac{1}{4l}\frac{\sigma d\sigma^2}{\sigma - m},$$

si on a posé

$$dr = dz + \frac{F}{E}d\sigma = dz + f(\sigma)d\sigma.$$

Introduisant une nouvelle variable t par la substitution

$$\frac{\sigma - m}{l} = t^2,$$

on trouve pour l'élément linéaire ds la forme finale:

$$ds^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2. \tag{20}$$

Ainsi les équations $\mathfrak{A}(\varphi) = 0$, $\mathfrak{E}(\varphi) = 0$ ne seront des équations Jacobiennes, que pour une surface admettant l'élément linéaire donné par l'équation (20). Dans ce cas, ces équations possèderont deux intégrales communes φ et φ' et les équations $\mathfrak{A}'(\varphi) = 0$ et $\mathfrak{E}'(\varphi) = 0$ admettront les intégrales φ_* et φ'_*, et on formera sans peine l'intégrale générale de l'équation fondamentale (A').

Etudions le second cas, qui se présentera si l'équation

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{E}(\varphi)) - \mathfrak{E}(\mathfrak{A}(\varphi))$$

n'est pas vérifiée par une fonction φ quelconque.

L'équation (B) divisée par $-2W$ prendra la forme:

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{Q + Pi}{2W}\frac{\partial\varphi}{\partial p}p + \frac{Q - Pi}{2W}\frac{\partial\varphi}{\partial q}q = 0$$

ou la forme équivalente

$$-\frac{\partial\varphi}{\partial z} + (R + Si)\frac{\partial\varphi}{\partial p}p + (R - Si)\frac{\partial\varphi}{\partial q}q = 0 \tag{21}$$

en posant:

$$R = \frac{1}{4}\left(\frac{b}{\beta}\frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial z}\right),$$

$$S = \frac{1}{2} W \frac{\partial \log \frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\Delta}}}{\partial \sigma}.$$

Remplaçant $\sqrt{\Delta}$ par sa valeur tirée de l'équation (1) du premier chapitre on aura aussi

$$(22) \qquad \begin{aligned} R &= \frac{1}{4}\left(\frac{b}{\beta}\frac{\partial \log(K\sigma^2)}{\partial \sigma} - \frac{\partial \log K}{\partial z}\right), \\ S &= \frac{1}{2} W \frac{\partial \log K\sigma^2}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

Eliminons des équations $\mathfrak{A}(\varphi) = 0$, $\mathfrak{C}(\varphi) = 0$ au moyen de l'équation (21) la dérivée $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, la fonction φ doit vérifier à la fois les trois équations linéaires suivantes, dans lesquelles on a posé pour abréger $R + Si = U$ et $R - Si = U_*$

$$0 = A(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left[p^2(\rho + U) - \frac{2y}{1 + xy}p\right]\frac{\partial \varphi}{\partial p} + pq\left(\frac{\tau}{\sigma} + U_*\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$0 = B(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + pq\left(\frac{\tau_*}{\sigma} + U\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p} + \left[q^2(\rho + U_*) - \frac{2x}{1 + xy}q\right]\frac{\partial \varphi}{\partial q},$$

$$0 = C(\varphi) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + Up\frac{\partial \varphi}{\partial p} + U_* q\frac{\partial \varphi}{\partial q}.$$

Pour que ces trois équations admettent *deux* intégrales communes, il sera nécessaire et suffisant que les deux conditions

$$C(A(\varphi)) - A(C(\varphi)) = 0 \quad \text{et} \quad C(B(\varphi)) - B(C(\varphi)) = 0$$

soient vérifiées identiquement, c'est à dire pour une fonction φ quelconque. (IMSCHENETZKI, *Etude sur les méthodes d'intégration* etc, § 106 etc.) Ces deux conditions constituent deux équations linéaires et homogènes entre les dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial p}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial q}$, et comme elles doivent être identiques, elles donnent naissance à quatre équations qui expriment l'évanouissement des quatre coefficients de ces équations linéaires.

Il ne vaut pas la peine d'écrire ici ces calculs plus fatigants que difficiles et qui peuvent être abrégés par des artifices faciles.

On arrive d'abord à cette forme des équations cherchées:

$$1)\qquad 4R\frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}-4W\frac{\partial S}{\partial\sigma}-2\frac{\lambda R}{\sigma}-2\frac{WS}{\sigma}-2\frac{\partial\lambda}{\partial z}=0,$$

$$2)\qquad 4R\frac{\partial W}{\partial\sigma}-2\frac{b}{\beta}\frac{\partial S}{\partial\sigma}-2RS-2\frac{WR}{\sigma}+2\frac{S\lambda}{\sigma}-\frac{2}{\sigma}\frac{\partial W}{\partial z}+2\frac{\partial S}{\partial z}=0,$$

$$3)\qquad -2R\frac{\partial\frac{b}{\beta}}{\partial\sigma}+2\frac{b}{\beta}\frac{\partial R}{\partial\sigma}+2R^2+\frac{Rb}{\sigma\beta}-2\frac{WS}{\sigma}+\frac{1}{\sigma}\frac{\partial\frac{b}{\beta}}{\partial z}-2\frac{\partial R}{\partial z}=0,$$

$$4)\qquad 4R\frac{\partial W}{\partial\sigma}-4W\frac{\partial R}{\partial\sigma}+2RS-\frac{Sb}{\sigma\beta}-2\frac{WR}{\sigma}-\frac{2}{\sigma}\frac{\partial W}{\partial z}=0,$$

λ, W, R, S étant données par les équations (B), (C) du chapitre IV et les équations (22).

Si l'on ne se rebute pas de la complication apparente de ces équations, au moment où le calcul exige violemment son droit, en substituant les valeurs et utilisant toujours les équations (5) (chapitre I), on mettrra les équations 1), 2), 3), 4) sous l'autre forme:

$$\psi=\log K,$$

$$1)\qquad \psi_{22}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2+4KG=0,$$

$$2)\qquad -\frac{b}{\beta}\left(\psi_{22}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2+4KG\right)+\psi_{12}-\frac{3}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}+4KF=0,$$

$$3)\qquad \frac{b^2}{\beta^2}\left(\psi_{22}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2+4KG\right)-2\frac{b}{\beta}\left(\psi_{12}-\frac{3}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}+4KF\right)$$
$$+\psi_{11}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2+4KE=0,$$

$$4)\qquad -\frac{b}{\beta}\left(\psi_{22}-\frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2+4KG\right)+\psi_{12}-\frac{3}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}+4KF=0,$$

les ψ_{ik} signifiant les abréviations adoptées au chapitre II page 176.

Ainsi nos quatre conditions se réduisent aux trois suivantes:

$$\psi_{11} - \frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 + 4KE = 0,$$

$$\psi_{12} - \frac{3}{4}\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial\sigma} + 4KF = 0,$$

$$\psi_{22} - \frac{3}{4}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)^2 + 4KG = 0,$$

ou encore, si on introduit la variable $\vartheta = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{-\frac{3}{4}}$, ε étant une constante, on trouve les équations bien simples, écrites sans abréviations:

$$(\vartheta)\qquad \begin{aligned}
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} - 3\varepsilon\vartheta^{-\frac{1}{3}}E = 0,\\
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z\partial\sigma} - \begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} - 3\varepsilon\vartheta^{-\frac{1}{3}}F = 0,\\
&\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\sigma^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial z} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\vartheta}{\partial\sigma} - 3\varepsilon\vartheta^{-\frac{1}{3}}G = 0,\\
&\vartheta = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{-\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

De ces trois équations la première est, en général, une conséquence des deux autres, ou la dernière une conséquence des deux premières. (Dérivant, par exemple la première par rapport à la variable σ, la seconde par rapport à z, et retranchant, on trouvera la dernière, excepté dans le cas singulier $\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} = 0$.)

Ainsi nos conditions cherchées se réduisent en vérité à *deux.*

Les équations (ϑ) sont évidemment invariantes pour une substitution qui change la forme quadratique

$$Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2$$

dans l'autre

$$\mathcal{E}dp^2 + 2\mathcal{F}dpdq + \mathcal{G}dq^2,$$

p et q désignant deux variables nouvelles. Donc les équations (ϑ) ne perdênt pas leur validité, quand on suppose l'élément de la surface donnée connu sous une forme quelconque, au lieu de partir de la forme primitive réduite.

En utilisant cette propriété, on verra sans peine que les équations (ϑ) exigent que l'élément linéaire de la surface donnée soit l'élément *d'une surface de révolution.* En effet, prenant au lieu de l'une des variables p et q la quantité $\vartheta = \left(\frac{K}{\varepsilon}\right)^{-\frac{3}{4}}$ ou une fonction convenable de cette quantité, et pour l'autre le paramètre des lignes coupant orthogonalement les lignes $\vartheta =$ const., on trouvera $F = 0$ et pour E et G des fonctions de la seule quantité ϑ.

En effectuant le calcul indiqué, on verra que le carré de l'élément linéaire d'une surface assujettie aux équations (ϑ) sera de la forme:

$$Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2,$$

l et m désigant deux constantes arbitraires, (l différente de zéro). On prouvera aussi facilement que cette forme est la seule compatible avec les équations invariantes (ϑ).

Cette forme est la même que celle que nous avons rencontrée auparavant.

Ainsi *l'équation fondamentale* (17) n'admet deux intégrales intermédiaires générales du premier ordre que dans le cas où le carré de l'élément linéaire de la surface proposée peut être transformée dans la forme:

$$ds^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2,$$

et vice versa:

Toutes les surfaces admettant le carré de l'élément linéaire:

$$ds^2 = t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2$$

conduisent à une *équation fondamentale* (17) intégrable par la méthode d'Ampère.

A l'aide des équations invariantes (ϑ), on reconnaît aussitôt si l'élément linéaire d'une surface donnée se transformera dans la forme en question ou non.

Les fonctions a, b, α, β de z et de σ de toute *équation fondamentale intégrable par la méthode d'Ampère* seront donc tirées d'une forme **réduite** quelconque $Edz^2 + 2Fdzd\sigma + Gd\sigma^2$, déduite de la forme $t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2$ par un changement quelconque des variables.

Il suffira d'avoir intégré *une seule* de ces *équations fondamentales,* qui forment un groupe infini, pour trouver *toutes* les surfaces admettant pour le carré de l'élement linéaire la forme $t^2dr^2 + (lt^2 + m)dt^2$, et on choisira une des plus simples pour cette intégration. L'intégration effectuée, on connaîtra, en conséquence des théorèmes donnés auparavant, les intégrales générales de chaque équation appartenant à ce groupe infini.

Mais nous ne donnerons pas ici un tel exemple, qui n'exige qu'un calcul facile, parce que *toutes* les surfaces qui admettent l'élément linéaire en question sont données déjà sous la forme la plus élégante dans l'ouvrage classique de M. DARBOUX (III[e] partie, page 369 etc.).

Donc l'intégration de toutes les équations fondamentales de notre théorie *intégrables par la méthode des caractéristiques* est achevée, la géométrie ayant devancé l'analyse.

Néanmoins nos *équations fondamentales* intégrables par la méthode d'AMPÈRE donnent à l'enseignement une série illimitée d'exemples, plus ou moins compliqués, d'équations aux dérivées partielles du second ordre, permettant de mener à bonne fin les différents calculs qu'exige l'intégration par la méthode des caractéristiques. Et ces exemples sont bien rares en ce moment.

VI.

En cherchant d'autres formes de *l'équation fondamentale* de notre théorie, rendant possible l'intégration par des méthodes régulières connues, on est conduit à discuter celles de ces équations qui sont linéaires par rapport aux dérivées secondes de z, et ne contiennent pas les dérivées premières.

Elles se présentent en supposant:

$$a = -2f(z), \qquad b = -2\sqrt{\sigma}, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 0.$$

Les équations auxquelles sont assujetties ces quatre quantités

$$\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial a}{\partial \sigma} + \frac{\beta}{\sqrt{\sigma}} = 0,$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial \sigma} - \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}} = 0$$

sont vérifiées, et l'équation fondamentale (17) prendra la forme bien simple

$$\Delta_2(z) = f(z).$$

L'intégration de cette équation donnera *toutes* les surfaces admettant pour le carré de l'élément linéaire la forme:

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = (d\sigma - 2f(z)dz)^2 + 4\sigma dz^2.$$

Faisant usage des variables x et y déjà employées, l'équation fondamentale sera:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{f(z)}{(1 + xy)^2}. \tag{23}$$

Choisissant pour $f(z)$ la fonction linéaire et homogène $\beta(1 - \beta)z$, β désignant une constante arbitraire, on aura pour notre équation fondamentale la suivante:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\beta(1 - \beta)}{(1 + xy)^2} z$$

qui coïncide évidemment avec une équation deja bien étudiée.

On peut donc appliquer toutes les belles propositions données par M. Darboux sur cette équation à la théorie de la déformation, et déterminer *toutes* les surfaces admettant un élément linéaire compatible avec cette équation.

On retrouvera les résultats donnés par MM. Baroni, Goursat et par moi.

Si l'on suppose $f(z) = e^z + 2$ l'équation (23) donne pour l'équation fondamentale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^z + 2}{(1 + xy)^2},$$

et en tenant compte de l'identité

$$\frac{\partial^2 \log\left\{\frac{1}{1+xy}\right\}^2}{\partial x \partial y} = -2\frac{1}{(1+xy)^2},$$

on trouvera l'équation équivalente à la première:

$$\frac{\partial^2 \log\left[\frac{e^z}{(1+xy)^2}\right]}{\partial x \partial y} = \left[\frac{e^z}{(1+xy)^2}\right],$$

dont l'intégrale générale a été donnée par LIOUVILLE.

Toutes les surfaces, applicables l'une sur l'autre, dont l'élément linéaire correspond à cette équation, ont été signalées par moi.

De même l'équation aux dérivées partielles du second ordre, donnée par moi:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (\rho + \rho')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p \partial q} + \rho\rho'\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0,$$

(Comptes rendus du 23 mars 1891) équation dont ces résultats découlent, n'est qu'un cas particulier de notre équation fondamentale.

En effet, adoptant les valeurs

$$a = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma}, \qquad \alpha = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\sigma},$$

$$b = -2\sqrt{\sigma}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\sigma}, \qquad \beta = -2\sqrt{\sigma}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2},$$

où φ désigne une fonction donnée quelconque des variables z et σ, on trouvera que les deux équations (6) sont vérifiées, ainsi que la relation

$$b + 2\alpha\sqrt{\sigma} = 0.$$

Formant *l'équation fondamentale* (17) correspondant à ces valeurs, on trouve:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} + 2\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\sigma}.\Delta_2(z) + 4\frac{\partial^2\varphi}{\partial\sigma^2}\theta(z) = 0.$$

Si on fait la substitution

$$z = p, \qquad \sigma = 2q - z^2,$$

cette équation deviendra:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (\Delta_2(p) + 2p)\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + (\theta(p) + p\Delta_2(p) + p^2)\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0.$$

En concevant p comme la normale abaissée de l'origine des coordonnées x, y, z sur le plan tangent au point (x, y, z) d'une surface quelconque, les rayons de courbure principaux à ce point sont donnés, comme on sait, par les formules:

$$\rho + \rho' = \Delta_2(p) + 2p, \qquad \rho\rho' = \theta(p) + p\Delta_2(p) + p^2, \text{ [1]}$$

dans lesquelles les invariants $\Delta_2(p)$ et $\theta(p)$ se rapportent à l'élément linéaire de la représentation sphérique de la surface à l'aide des normales en chaque point.

En substituant, on reconnaîtra l'équivalence de l'équation fondamentale correspondant aux valeurs particulières de a, b, α, β, et de l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2} + (\rho + \rho')\frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q} + \rho\rho'\frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2} = 0.$$

Ainsi les propositions que j'ai attachées à cette équation dans les Comptes rendus du 13 mars 1893 se trouvent vérifiées par notre analyse.

Nous n'avons pas réussi jusqu'à ce moment à tirer de nos équations fondamentales un cas essentiellement nouveau, permettant de déterminer *toutes* les surfaces applicables l'une sur l'autre, qui admettent un certain élément linéaire donné à l'avance. N'ayant en vue que la théorie générale de la déformation, nous ne développerons pas ici les résultats particuliers qu'on peut tirer de notre théorie, et nous terminerons cette étude par quelques remarques, concernant l'équation aux dérivées partielles du second ordre à laquelle satisfont les trois coordonnées ξ, η, ζ d'une surface, admettant le carré de l'élément linéaire

$$ds^2 = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2.$$

[1] BIANCHI, Lezioni di Geometria Differentiale, p. 137.

Il est bien facile d'établir cette équation à l'aide de nos développements. En effet les équations du chapitre II

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = aX + bX'' \qquad \frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = \alpha X + \beta X'$$

donnent, en dérivant p. e. la première par rapport à z,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = a\frac{\partial X}{\partial z} + b\frac{\partial X'}{\partial z} + X\frac{\partial a}{\partial z} + X'\frac{\partial b}{\partial z},$$

et si on utilise les équatioos (5) ainsi que les équations (8) et (9) du même chapitre, on aura la première des équations connues suivantes, les deux autres se trouvant par un calcul semblable:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial z} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = c_{11}X'',$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z \partial \sigma} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial z} - \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = c_{12}X'',$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \sigma^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial z} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial \xi}{\partial \sigma} = c_{22}X''.$$

Faisant usage encore des équations connues

$$K = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{EG - F^2}, \qquad X''^2 = 1 - \Delta(\xi)$$

et employant pour abréger les notations ξ_{11}, ξ_{12}, ξ_{22}, on établira l'équation, à laquelle satisfait la coordonnée ξ, sous sa forme connue invariante

$$\frac{\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2}{EG - F^2} = K(1 - \Delta(\xi)).$$

C'est cette équation, qui, K étant supposé différent de zéro, n'admet pas pour aucun élément linéaire, des intégrales intermédiaires du premier ordre, et ne permet pas l'intégration par une méthode régulière connue.

Mais notre analyse a mis en évidence pour la première fois ce fait bien digne de recherches ultérieures, qu'une équation aux dérivées partielles du second ordre, qui résiste à l'intégration par les méthodes régulaires connues, peut être réduite à une autre équation aux dérivées partielles du même ordre, qui ne se montre pas si rebelle.

Ayant trouvé l'intégrale générale de cette équation résolvante, on aura l'intégrale de la proposée par une quadrature contenant les fonctions arbitraires sous le signe d'intégration.