ÜBER DIE INTEGRATION PARTIELLER LINEARER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN DURCH VIELFACHE INTEGRALE

VON

HJ. MELLIN
in HELSINGFORS.

In der vorliegenden Arbeit beabsichtigen wir zu zeigen, dass die vielfachen Integrale mit veränderlichen Parametern in der Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen (mit rationalen Coefficienten) formell ebenso verwendet werden können, wie die einfachen Integrale schon längst in der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen benutzt worden sind.

Ebenso wie die bekannte LAGRANGE'sche Beziehung zwischen adjungirten Differentialausdrücken als die gemeinsame Quelle der in der letztgenannten Theorie angewandten Methoden der Integration durch bestimmte Integrale zu betrachten ist,[1] giebt es auch für partielle lineare Differentialausdrücke eine analoge Beziehung, aus welcher mit Benutzung vielfacher Integrale ähnliche Folgerungen gezogen werden können, wie aus der ersteren mit Benutzung einfacher Integrale.

Der Kürze halber beschränken wir uns im Folgenden auf partielle lineare Differentialgleichungen mit *zwei* unabhängigen Veränderlichen. Man wird aber ohne Mühe finden, dass und wie sich alle Ergebnisse unserer Untersuchungen auch auf Gleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen ausdehnen lassen.

[1] Man siehe SCHLESINGER, *Über die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen* (Crelles Journal, Heft 2, Bd. 116) sowie meine gleichzeitige Arbeit *Über gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten* (Acta Soc. Scient. Fenn., Tom. 21).

Acta mathematica. 22. Imprimé le 16 février 1898.

In einem folgenden Aufsatze werde ich zeigen, dass die auf Verwendung bestimmter Integrale basirte Integrationsmethode ebenfalls auf *Systeme* simultaner linearer Differentialgleichungen übertragen werden kann.

Die bestimmten Integrale können demgemäss nicht nur in der Theorie der gewöhnlichen sondern auch in der Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen, gleichviel ob es sich von einer einzigen Gleichung oder von einem Systeme simultaner Gleichungen handelt, den Potenzreihen als Ausdrücke an die Seite gestellt werden, welche zur Darstellung von Lösungen solcher Gleichungen geeignet sind.

§ 1.

Die LAGRANGE'sche Beziehung

$$\psi \sum_{k=0}^{n} P_k(x) \frac{d^k\varphi}{dx^k} - \varphi \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{d^k}{dx^k}[P_k(x)\psi]$$
$$= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu}[P_k(x)\psi] \frac{d^{k-1-\nu}\varphi}{dx^{k-1-\nu}}$$

ist eine nahe liegende Verallgemeinerung der vielfach angewandten Formel

$$\psi \frac{d^k\varphi}{dx^k} - (-1)^k \varphi \frac{d^k\psi}{dx^k} = \sum_{\nu=0}^{k-1} (-1)^\nu \frac{d}{dx}\left[\frac{d^\nu\psi}{dx^\nu} \frac{d^{k-1-\nu}\varphi}{dx^{k-1-\nu}}\right].$$

Auf der rechten Seite dieser Formel sind die einzelnen Glieder vollständige Ableitungen erster Ordnung. Aus dem Nachfolgenden wird sich ergeben, dass die rechte Seite ebenfalls auf eine Form gebracht werden kann, deren Glieder vollständige Ableitungen wachsender Ordnungszahl sind. Benutzt man zunächst der grösseren Allgemeinheit halber Differentiale an Stelle von Ableitungen, so überzeugt man sich durch den Schluss von n auf $n+1$ von der Gültigkeit der Formel

$$\psi d^k\varphi = (-1)^k \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} d^\nu[\varphi d^{k-\nu}\psi], \tag{1}$$

deren Richtigkeit für $k = 1$ und $k = 2$ leicht bestätigt wird. Nach Transposition des ersten Gliedes der rechten Seite wird also die linke

Seite gleich einem vollständigen Differential erster Ordnung, nach Transposition der zwei ersten Glieder gleich einem vollständigen Differential zweiter Ordnung, u. s. f.

Nimmt man an, dass sich die in (1) bezeichneten Differentiationen auf eine einzige unabhängige Variable x beziehen, so ergiebt sich durch Division mit dx^k

$$\psi \frac{d^k \varphi}{dx^k} = (-1)^k \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu} \left[\varphi \frac{d^{k-\nu} \psi}{dx^{k-\nu}} \right].$$ [1]

Durch zweimalige Anwendung dieser Formel folgt

$$\psi \frac{\partial^{h+k} \varphi}{\partial x^h \partial y^k} = (-1)^h \sum_{\mu=0}^{h} (-1)^\mu \binom{h}{\mu} \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \left[\frac{\partial^{h-\mu} \psi}{\partial x^{h-\mu}} \frac{\partial^k \varphi}{\partial y^k} \right]$$

$$= (-1)^{h+k} \sum_{\mu=0}^{h} (-1)^\mu \binom{h}{\mu} \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu} \left[\varphi \frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}}{\partial x^{h-\mu} \partial y^{k-\nu}} \psi \right],$$

und es ist somit

$$\psi \frac{\partial^{h+k} \varphi}{\partial x^h \partial y^k} = (-1)^{h+k} \sum_{\mu,\nu=0}^{h,k} (-1)^{\mu+\nu} \binom{h}{\mu} \binom{k}{\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \left[\varphi \frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}}{\partial x^{h-\mu} \partial y^{k-\nu}} \psi \right]. \tag{2}$$

Mit Benutzung dieser Formel ergiebt sich die noch allgemeinere Beziehung

$$\psi \sum_{h,k=0}^{m,n} P_{hk}(x,y) \frac{\partial^{h+k} \varphi}{\partial x^h \partial y^k}$$

$$= \sum_{h,k=0}^{m,n} \sum_{\mu,\nu=0}^{h,k} (-1)^{h-\mu+k-\nu} \binom{h}{\mu} \binom{k}{\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu} \left[\varphi \frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}}{\partial x^{h-\mu} \partial y^{k-\nu}} (P_{hk} \psi) \right],$$

welche als eine Erweiterung der LAGRANGE'schen Beziehung auf partielle lineare Differentialausdrücke zu betrachten ist. Transponirt man nämlich nach der linken Seite alle Glieder, wo μ und ν beide auf einmal gleich der Null sind, so kann diese Beziehung folgenderweise geschrieben werden

$$\psi \sum_{h,k=0}^{m,n} P_{hk}(x,y) \frac{\partial^{h+k} \varphi}{\partial x^h \partial y^k} - \varphi \sum_{h,k=0}^{m,n} (-1)^{h+k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k} [P_{hk}(x,y) \psi] \tag{3}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} P(\varphi, \psi) + \frac{\partial}{\partial y} Q(\varphi, \psi),$$

[1] Cf. HJ. HOLMGREN. Sv. Vet.-Akad. Hand. Bd. 5. N:o 11. (Formel 33).

wo P und Q gewisse in φ und ψ *bilineare* Differentialausdrücke bezeichnen. Die beiden auf der linken Seite stehenden Differentialausdrücke werden bekanntlich *adjungirte* Ausdrücke genannt.[1]

Die für gewöhnliche adjungirte Differentialausdrücke gültigen Sätze können auf partielle adjungirte ausgedehnt werden. So gilt auch für die letzteren der *Reciprocitätssatz*, nach welchem, falls ein Differentialausdruck aus mehreren zusammengesetzt ist, sein adjungirter aus den adjungirten der (symbolischen) Factoren in umgekehrter Reihenfolge zusammengesetzt ist.

In § 3. soll der Reciprocitätssatz wenigstens für einen speciellen, bei unseren Untersuchungen wichtigen Fall bewiesen werden.

Anmerkung. Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass die Formel (1) überhaupt für jede iterirbare Operation ϑ gültig ist, welche den folgenden formalen Gesetzen gehorcht:

$$\vartheta(\varphi + \psi) = \vartheta\varphi + \vartheta\psi,$$

$$\vartheta(\varphi\psi) = \varphi\vartheta\psi + \psi\vartheta\varphi,$$

$$\vartheta \text{ Const.} \equiv 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch den Schluss von n auf $n + 1$:

$$\psi\vartheta^k\varphi = (-1)^k \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \vartheta^\nu[\varphi\vartheta^{k-\nu}\psi].$$

Für solche Operationen ϑ gilt somit auch die LAGRANGE'sche Beziehung. Symbole derartiger Operationen sind $d, \frac{d}{dx}, xd, x\frac{d}{dx}$, sowie das LIE'sche Symbol einer infinitesimalen Transformation, wovon $x\frac{d}{dx}$ ein specieller Fall ist.

§ 2.

Bei den weiteren Untersuchungen werden ausschliesslich homogene lineare partielle Differentialgleichungen mit in x und y ganzen rationalen Coefficienten betrachtet. Es erweist sich dabei als sehr vortheilhaft, wenn

[1] C. f. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* II. Partie, § 357.

man, ausser der gewöhnlichen, nach den Ableitungen der abhängigen Veränderlichen geordneten Form, ebenfalls zwei andere, sofort näher anzugebende Formen berücksichtigt, auf die eine solche Gleichung stets gebracht werden kann.

Wird eine homogene lineare partielle Differentialgleichung mit in x und y ganzen rationalen Coefficienten

$$\sum_{\mu,\nu,h,k} C_{\mu\nu}^{(hk)} x^\mu y^\nu \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} = 0 \tag{4}$$

nach Potenzen der beiden unabhängigen Variabeln geordnet, so ergeben sich als Coefficienten Ausdrücke der Form

$$\sum_{h,k} C^{(hk)} \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} = \sum_{h,k} C^{(hk)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi = f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi,$$

also homogene lineare Differentialausdrücke mit constanten Coefficienten. Unsere Differentialgleichung kann somit auf die symbolische Form gebracht werden

$$\sum_{h,k} x^h y^h f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0.$$

Dies ist die eine der fraglichen Formen. Soll die Gleichung (4) auf die andere der betreffenden Formen gebracht werden, so multiplicirt man sie — falls in irgend einem Gliede die Zahl μ kleiner ist als h oder die Zahl ν kleiner als k — mit den niedrigsten ganzzahligen Potenzen von x und y, die bewirken, dass μ und ν in keinem Gliede kleiner sind als resp. h und k. Hierauf kann man auf jedes Glied der Differentialgleichung die bekannte Symbolische Formel anwenden:[1]

$$x^n \frac{d^n\varphi}{dx^n} = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} - 1\right)\ldots\left(x\frac{d}{dx} - n + 1\right)\varphi.$$

Werden die einzelnen Glieder weiter nach Potenzen der beiden Symbole

[1] Bekanntlich benutzt man die Symbolik

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \varphi = x\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\ldots x\frac{d}{dx}\varphi,$$

welche also mit $x^n \dfrac{d^n\varphi}{dx^n}$ nicht verwechselt werden darf.

$x\frac{\partial}{\partial x}$ und $y\frac{\partial}{\partial y}$ entwickelt, so kann die Differentialgleichung auf die Form gebracht werden:

$$\sum_{\mu,\nu,h,k} C_{\mu\nu}^{(hk)} x^\mu y^\nu \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi = 0.$$

Wird die linke Seite ferner nach Potenzen von x und y geordnet, so ergeben sich als Coefficienten Ausdrücke der Form

$$\sum_{h,k} C^{(hk)} \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi = F\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi,$$

und die Differentialgleichung erhält schliesslich die Gestalt

$$\sum_{h,k} x^h y^k F_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0.$$

Die beiden Arten von Ausdrücken $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$ und $F\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$, die sich besonders in der englischen Litteratur finden, spielen in manchen Beziehungen die Rolle von *elementaren* Differentialausdrücken. Während ein aus zwei oder mehreren (nicht elementaren) Differentialausdrücken zusammengesetztes symbolisches Product sich im Allgemeinen mit der Reihenfolge seiner Factoren ändert, so sind die beiden Producte

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi \quad \text{und} \quad F_1\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\cdots F_n\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$$

von der Reihenfolge ihrer Factoren unabhängig.

Einige, diese elementaren Ausdrücke betreffende, bei den weiteren Untersuchungen erforderliche Formeln sollen hier hervorgehoben werden.

Beachtet man, dass $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} e^{ux+vy} = u^m v^n e^{ux+vy}$, so folgt leicht:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)e^{ux+vy} = f(u, v)e^{ux+vy}. \tag{5}$$

Diese Formel lässt sich noch folgenderweise erweitern:

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)[g(x, y)\, e^{ux+vy}] = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)[f(u, v)e^{ux+vy}]. \tag{6}$$

In der That ist nach (5):

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)[g(x, y)e^{ux+vy}] = f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\left[g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)e^{ux+vy}\right]$$

$$= g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\left[f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)e^{ux+vy}\right] = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)[f(u, v)e^{ux+vy}].$$

Die Gültigkeit der Formeln

$$(7) \qquad F\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^\rho y^\sigma] = F(\rho, \sigma)x^\rho y^\sigma,$$

$$(8) \qquad F\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^\rho y^\sigma \varphi] = x^\rho y^\sigma F\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \rho, y\frac{\partial}{\partial y} + \sigma\right)\varphi$$

wird dadurch erwiesen, dass man ihre Richtigkeit für Glieder der Form

$$C\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^m\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\varphi$$

bestätigt.

§ 3.

Die erweiterte LAGRANGE'sche Beziehung gestaltet sich nun besonders einfach für die oben besprochenen elementaren Differentialausdrücke.

Mit Benutzung von (2) erhalten wir

$$\psi\sum_{h,k=0}^{m,n} C_{hk}\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k}\varphi = \sum_{h,k=0}^{m,n}\sum_{\mu,\nu=0}^{h,k}(-1)^{h-\mu+k-\nu}C_{hk}\binom{h}{\mu}\binom{k}{\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left[\varphi\frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}}{\partial x^{h-\mu}\partial y^{k-\nu}}\psi\right]$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}\frac{1}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left\{\varphi\sum_{h=\mu,\,k=\nu}^{m,n} h\ldots(h-\mu+1)k\ldots(k-\nu+1)C_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{h-\mu}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-\nu}\psi\right\}.$$

Diese Formel kann, wenn man zur Abkürzung

$$\sum_{h,k=0}^{m,n} C_{hk}\rho^h\sigma^k = f(\rho, \sigma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial\rho^\mu \partial\sigma^\nu}f(\rho, \sigma) = f^{(\mu,\nu)}(\rho, \sigma)$$

setzt, folgenderweise geschrieben werden

$$(9) \qquad \psi f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}\frac{1}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left\{\varphi f^{(\mu,\nu)}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\right\}.$$

Mit Hülfe dieser Formel ergiebt sich die verallgemeinerte LAGRANGE'sche Beziehung in der Form

$$\psi \sum_{h,k} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = \sum_{h,k} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \frac{1}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left\{\varphi f_{hk}^{(\mu,\nu)}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi\right\}.$$

Hier bezeichnen m und n zwei solche ganze Zahlen, dass keine der Functionen $f_{hk}(\rho, \sigma)$ in Bezug auf ρ von höherem als dem m^{ten} und in Bezug auf σ von höherem als dem n^{ten} Grade ist.

Transponirt man nun wieder nach der linken Seite alle Glieder, wo μ und ν beide auf einmal gleich der Null sind, so hat man

$$\begin{aligned}(10)\qquad \psi \sum_{h,k} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi \sum_{h,k} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi \\ = \frac{\partial}{\partial x} P(\varphi, \psi) + \frac{\partial}{\partial y} Q(\varphi, \psi),\end{aligned}$$

wo P und Q in φ und ψ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen.

Auf Grund der am Schlusse des § 1. gemachten Anmerkung leuchtet ohne weiteres ein, dass auch die folgende Beziehung stattfindet

$$\begin{aligned}(11)\qquad \psi \sum_{h,k} x^h y^k F_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi \sum_{h,k} F_{hk}\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi \\ = x\frac{\partial}{\partial x} P(\varphi, \psi) + y\frac{\partial}{\partial y} Q(\varphi, \psi),\end{aligned}$$

wo P und Q in φ und ψ bilineare Differentialausdrücke sind.

Der in § 1. erwähnte Reciprocitätssatz soll nunmehr für den Fall nachgewiesen werden, dass der betreffende Differentialausdruck aus elementaren Ausdrücken $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ zusammengesetzt ist. Aus (9) folgt, wenn wir der Kürze halber f an Stelle von $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ schreiben und den adjungirten von f, also den Ausdruck $f\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)$, allgemein durch $\bar{f}$ bezeichnen:

$$\psi f \varphi - \varphi \bar{f} \psi = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q,$$

wo P und Q in φ und ψ bilineare Differentialausdrücke bedeuten. Hier ersetze man, unter u eine beliebige Function verstehend, φ durch $ug\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$:

$$\psi f[ug\varphi] - [u\bar{f}\psi].g\varphi = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q$$

und wende auf das zweite Glied links die vorangehende Formel an, so folgt

$$\psi f[ug\varphi] - \varphi\bar{g}[u\bar{f}\psi] = \frac{\partial}{\partial x}P' + \frac{\partial}{\partial y}Q',$$

wo P', Q' in φ und ψ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Hiermit ist der Reciprocitätssatz für den Fall bewiesen, dass der betreffende Differentialausdruck aus zwei elementaren zusammengesetzt ist, wenn wir nämlich als allgemeine Definition zweier adjungirten Differentialausdrücke $D(\varphi)$ und $\bar{D}(\psi)$ die Beziehung festsetzen

$$\psi D(\varphi) - \varphi\bar{D}(\psi) = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q$$

mit der Bedingung, dass P, Q in φ und ψ bilineare Differentialausdrücke bedeuten. — Der betreffende Satz kann hierauf durch das obige Verfahren für Differentialausdrücke, die aus drei oder mehreren elementaren zusammengesetzt sind, bewiesen werden. Es ist auch nicht schwer zu sehen, wie der Satz allgemein zu beweisen ist. Für unseren gegenwärtigen Zweck genügt aber schon das oben dargelegte.

§ 4.

Nunmehr gehen wir zu den Anwendungen der im Vorhergehenden entwickelten Beziehungen über.

In der Formel (10) sei ψ eine Lösung der Differentialgleichung

$$(12) \qquad \sum_{h,k} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi = 0,$$

und man setze $\varphi = e^{ux+vy}$. Benutzt man die Formel (5) und integrirt in der x-Ebene längs einer Linie (x), in der y-Ebene längs einer Linie (y), so folgt

$$\sum_{h,k} f_{hk}(u\,,\,v) \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} e^{ux+vy}\phi(x\,,\,y)x^h y^k\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Bedeutet $\phi(x\,,\,y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (12) *und sind die Integrationswege x und y so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

identisch erfüllt wird, so besitzen wir in

$$\Psi(u\,,\,v) = \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} e^{ux+vy}\phi(x\,,\,y)\,dx\,dy \tag{13}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{h,k} f_{hk}(u\,,\,v)\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}\Psi = 0. \tag{14}$$

In jedem Gliede der obigen Bedingungsgleichung können die Integrationen wenigstens theilweise ausgeführt werden, was natürlich ein sehr wichtiger Umstand ist. Ist die Integration in Bezug auf x zwischen α_1 und α_2, die in Bezug auf y zwischen β_1 und β_2 erstreckt, so kann die genannte Gleichung folgenderweise geschrieben werden:

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} dy \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} P + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} Q = 0.$$

Diese Gleichung ist nun sicher erfüllt, falls die beiden Grössen

$$\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(e^{ux+vy}\,,\,\phi)\,,\quad \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} Q(e^{ux+vy}\,,\,\phi)$$

identisch verschwinden.

Durch das bestimmte Integral (13) wird nun die Integration von (14) zurückgeführt auf die der Gleichung (12), welche deshalb ex analogia die LAPLACE'sche *Transformirte* der partiellen Differentialgleichung (14) genannt werden kann.

Werden (12) und (14) mit einander verglichen, so findet man, dass die Gradzahl jeder dieser Gleichungen in Bezug auf die unabhängigen Veränderlichen gleich der Ordnungszahl der anderen ist. Sind beispielsweise die Coefficienten von (14) linear, so ist (12) eine Differentialgleichung erster Ordnung. Ist k in allen Gliedern von (12) gleich der Null, d. h. ist (12) eine partielle Differentialgleichung, wo die Variable y nicht explicite vorkommt, so ist (14) eine gewöhnliche Differentialgleichung mit v als Parameter. Kommt umgekehrt v in (14) nicht explicite vor, so ist (12) eine gewöhnliche Differentialgleichung mit y als Parameter.

Zwischen den beiden Gleichungen (12) *und* (14) *existirt aber zugleich eine bemerkenswerthe Reciprocität, infolge deren sie sich gegenseitig durch bestimmte Integrale integriren.*

Setzen wir nämlich in der Formel

$$\Psi \sum_{h,k} (-1)^{h+k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k} [f_{hk}(u\,,\,v)\,\Phi] - \Phi \sum_{h,k} f_{hk}(u\,,\,v) \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k} \Psi$$

$$= \frac{\partial}{\partial u} P'(\Psi\,,\,\Phi) + \frac{\partial}{\partial v} Q'(\Psi\,,\,\Phi)$$

Ψ gleich einem Integral der Differentialgleichung (14) und $\Phi = e^{-ux-vy}$, so folgt durch Integration in der u-Ebene längs einer Linie (u), in der v-Ebene längs einer Linie (v) und mit Benutzung der Formel (6):

$$\int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} du\,dv\,\Psi \sum_{h,k} (-1)^{h+k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k} [f_{hk}(u, v) e^{-ux-vy}]$$

$$= \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} du\,dv\,\Psi \sum_{h,k} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^h y^k e^{-ux-vy}]$$

$$= \sum_{h,k} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{x^h y^k \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} e^{-ux-vy}\,\Psi(u\,,\,v)\,du\,dv\right\}$$

$$= \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial u} P' + \frac{\partial}{\partial v} Q'\right) du\,dv.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Bedeutet $\Psi(u, v)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (14) *und sind die Integrationswege* (u) *und* (v) *so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)}\left(\frac{\partial}{\partial u}P' + \frac{\partial}{\partial v}Q'\right)du\,dv = 0$$

identisch erfüllt wird, so besitzen wir in

$$\phi(x, y) = \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} e^{-ux-vy}\,\Psi(u, v)\,du\,dv \tag{15}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (12).

Der Zusammenhang zwischen den partiellen Differentialgleichungen (12) und (14) wird also durch die beiden Integralformeln (13) und (15) vermittelt.

§ 5.

In diesem Paragraphen sollen einige Sätze aus der Formel (11) abgeleitet werden.

Multiplicirt man die genannte Formel mit $x^{-1}y^{-1}$ und ersetzt ϕ durch $xy\phi$, so erhält man mit Benutzung von (8):

$$\begin{aligned}\phi\sum_{h,k} x^h y^k F_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi\sum_{h,k} F_{hk}\left(-x\frac{\partial}{\partial x} - 1, -y\frac{\partial}{\partial y} - 1\right)x^h y^k \phi \\ = y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q.\end{aligned}$$

Nunmehr sei ϕ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{h,k} F_{hk}\left(-x\frac{\partial}{\partial x} - 1, -y\frac{\partial}{\partial y} - 1\right)x^h y^k \phi = 0, \tag{16}$$

während φ eine beliebige Function der Form $\chi(ux, vy)$ bedeute. Alsdann ergiebt sich durch Integration

$$\sum_{h,k}\int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\phi(x\,,y)x^h y^k F_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}\,,\,y\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi(ux\,,vy)$$

$$=\sum_{h,k}\int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\phi(x\,,y)x^h y^k F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\,,\,v\frac{\partial}{\partial v}\right)\chi(ux\,,vy)$$

(17) $$=\sum_{h,k} F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}\,,\,v\frac{\partial}{\partial v}\right)\int_{(x)}\int_{(y)}\phi(x\,,y)\chi(ux\,,vy)x^h y^k\,dx\,dy$$

$$=\int_{(x)}\int_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P+x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy.$$

Durch passende Specialisirungen von χ können hieraus verschiedene Sätze abgeleitet werden. Setzt man z. B. $\chi(x\,,y)=x^\rho y^\sigma$ und benutzt die Formel (7), so hat man den Satz:

Bedeutet $\phi(x\,,y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (16) *und sind die Integrationswege (x) und (y) so gewählt, dass*

$$\int_{(x)}\int_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P+x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy=0$$

ist, so besitzt man in

(18) $$\Psi(\rho\,,\sigma)=\int_{(x)}\int_{(y)}\phi(x\,,y)x^\rho y^\sigma\,dx\,dy$$

eine Lösung der Differenzen-Gleichung

(19) $$\sum_{h,k}F_{hk}(\rho\,,\sigma)\Psi(\rho+h\,,\sigma+k)=0.$$

Die Ermittelung von Lösungen der partiellen Differenzen-Gleichung (19) wird also durch das Integral (18) zurückgeführt auf die Integration der partiellen Differentialgleichung (16). Es giebt bekanntlich auch einen analogen, von Laplace herrührenden Satz über gewöhnliche Differential- und Differenzen-Gleichungen.

Kommt σ in den Coefficienten von (19) nicht explicite vor, so ist (16) eine gewöhnliche Differentialgleichung mit y als Parameter. Ist k in allen Gliedern von (19) gleich der Null, so ist (16) eine partielle Differentialgleichung, welche durch die Substitution $y = e^{\eta}$ in eine Gleichung übergeht, wo die neue Variable η nicht mehr explicite vorkommt.

In der Formel (17) wollen wir nunmehr $\chi(x, y) = e^{x+y}$ annehmen. Alsdann ergiebt sich der Satz:

Bezeichnet $\phi(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (16) *und sind die Integrationswege* (x) *und* (y) *so gewählt, dass*

$$\int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

ist, so besitzt man in

$$\Phi(u, v) = \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} e^{ux+vy}\phi(x, y)\,dx\,dy$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{h,k} F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}, v\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\,\partial v^k}\Phi = 0.$$

In unserer Formel (17) wollen wir schliesslich

$$\chi(x, y) = (1 - x)^{\alpha-1}(1 - y)^{\beta-1}$$

annehmen. Alsdann hat man

$$\sum_{h,k=0}^{m,n} F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}, v\frac{\partial}{\partial v}\right)\int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}(1 - ux)^{\alpha-1}(1 - vy)^{\beta-1}\phi(x, y)\,x^h y^k\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy.$$

Hieraus ergiebt sich durch Rechnungen, die im Wesentlichen mit denjenigen übereinstimmen, welche im folgenden Paragraphen ausgeführt werden sollen, der folgende Satz:

Bedeutet $\psi(x, y)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (16) *und sind die Integrationswege* (x) *und* (y) *so gewählt, dass*

$$\int_{(x)}\int_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

ist, so besitzen wir in

$$\Psi(u, v) = \int_{(x)}\int_{(y)}(1 - ux)^{\alpha-1}(1 - vy)^{\beta-1}\psi(x, y)\,dx\,dy$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{h,k=0}^{m,n} F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}, v\frac{\partial}{\partial v}\right)\left\{u^{\alpha-h}v^{\beta-k}\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\,\partial v^{n-k}}\left[u^{m-\alpha}v^{n-\beta}\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\,\partial v^k}\Psi\right]\right\} = 0.$$

§ 6.

In diesem Paragraphen sollen zweifache Integrale der folgenden Form benützt werden

$$(20) \qquad \Phi(u, v) = \int_{(x)}\int_{(y)}(u - x)^{\alpha-1}(v - y)^{\beta-1}\varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Setzen wir in der verallgemeinerten LAGRANGE'schen Beziehung

$$\varphi\sum_{h,k=0}^{m,n} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k\psi - \psi\sum_{h,k=0}^{m,n} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}P(\varphi, \psi) + \frac{\partial}{\partial y}Q(\varphi, \psi)$$

φ gleich einer Lösung der Differentialgleichung

$$(21) \qquad \sum_{h,k=0}^{m,n} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0$$

und ψ gleich dem Ausdrucke $(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}$, so folgt durch Integration längs den Linien (x) und (y):

$$(22) \quad \sum_{h,k=0}^{m,n} \int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\varphi(x,y) f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^h y^k (u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]$$

$$= \int_{(x)}\int_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q\right) dx\,dy.$$

Nun wird sich einerseits ergeben, dass eine einfache Beziehung zwischen einem Integral der Form

$$\Psi_{hk}(u,v) = \int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\varphi(x,y) f\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^h y^k (u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]$$

und dem specielleren Integral

$$\Psi(u,v) = \int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\varphi(x,y) f\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)[(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]$$

existirt. Da offenbar

$$f\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)[(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}] = f\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)[(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]$$

ist, so findet man andererseits, dass sich das letzte Integral durch (20) folgenderweise ausdrücken lässt

$$(23) \qquad \Psi(u,v) = f\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) \Phi(u,v).$$

Auf solche Weise wird sich schliesslich für $\Phi(u,v)$ eine homogene lineare Differentialgleichung ergeben, wofern die Integrationswege so gewählt sind, dass die rechte Seite von (22) identisch verschwindet.

Die erforderlichen Rechnungen sollen jetzt näher ausgeführt werden.

Aus der evidenten Formel

$$x\frac{\partial}{\partial u}(u-x)^{\alpha-1} = u\frac{\partial}{\partial u}(u-x)^{\alpha-1} - (\alpha-1)(u-x)^{\alpha-1} = \left(u\frac{\partial}{\partial u} - \alpha + 1\right)(u-x)^{\alpha-1}$$

folgt durch wiederholte Differentiation und Anwendung derselben Formel

$$x^h \frac{\partial^h}{\partial u^h}(u-x)^{\alpha-1} = \left(u\frac{\partial}{\partial u} - \alpha + 1\right) \dots \left(u\frac{\partial}{\partial u} - \alpha + h\right)(u-x)^{\alpha-1}.$$

Auf Grund einer bekannten Formel [1] kann diese Beziehung folgenderweise geschrieben werden:

$$(24) \qquad x^h \frac{\partial^h}{\partial u^h}(u-x)^{\alpha-1} = u^\alpha \frac{\partial^h}{\partial u^h}[u^{h-\alpha}(u-x)^{\alpha-1}].$$

Man hat somit auch

$$x^h y^k \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}[(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}] = u^\alpha v^\beta \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}[u^{h-\alpha} v^{k-\beta}(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}].$$

Den beiden Seiten dieser Formel fügen wir jetzt den Ausdruck $f\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)$ symbolisch als Factor hinzu und multipliciren nachher mit $\varphi(x, y)$. Dann ergiebt sich durch Integration längs den Linien (x) und (y) und mit Benutzung der obigen Bezeichnung:

$$(25) \qquad \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k} \Psi_{hk} = u^\alpha v^\beta \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}[u^{h-\alpha} v^{k-\beta} \Psi].$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten von (2) die Ableitung

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m \partial v^n} = \frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h} \partial v^{n-k}} \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}$$

und benutzt die Formeln (23) und (25), so folgt

$$\sum_{h,k=0}^{m,n} \frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h} \partial v^{n-k}} \left\{ u^\alpha v^\beta \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}\left[u^{h-\alpha} v^{k-\beta} f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi\right]\right\}$$
$$= \frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m \partial v^n} \int_{(x)} \int_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q\right) dx\, dy.$$

---

[1] Aus der bekannten Formel $x^n \frac{d^n \varphi}{dx^n} = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} - 1\right) \dots \left(x\frac{d}{dx} - n + 1\right)\varphi$ folgt, wenn man φ durch $x^{n-\alpha}\varphi$ ersetzt und die Formel (8) benutzt:

$$\left(x\frac{d}{dx} - \alpha + 1\right) \dots \left(x\frac{d}{dx} - \alpha + n\right)\varphi = x^\alpha \frac{d^n}{dx^n}[x^{n-\alpha}\varphi].$$

Diese Gleichung giebt uns schliesslich den Satz:

Bedeutet $\varphi(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung (21) *und sind die Integrationswege* (x) *und* (y) *so gewählt, dass*

$$\int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

ist, so besitzen wir in

$$\Phi(u, v) = \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}\varphi(x, y)\,dx\,dy \tag{26}$$

eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{h,k=0}^{m,n}\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\,\partial v^{n-k}}\left\{u^\alpha v^\beta\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\partial v^k}\left[u^{h-\alpha}v^{k-\beta}f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi\right]\right\} = 0. \tag{27}$$

Durch diesen Satz wird die Ermittelung von Lösungen der Differentialgleichung (27) zurückgeführt auf die Integration der Gleichung (21). Überdies lässt sich aber zeigen, dass die Beziehung zwischen den beiden Gleichungen eine solche gegenseitige ist, *dass auch die Integration der ersteren* (21) *durch Quadraturen auf die der letzteren* (27) *zurückführbar ist.*

Da offenbar der adjungirte Differentialausdruck einer Summe gleich der Summe von den adjungirten der Summanden ist, so ergiebt sich mit Hülfe des am Schlusse des § 3. bewiesenen Reciprocitätssatzes:

$$\begin{aligned}\Phi\sum_{h,k=0}^{m,n}f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial u}, -\frac{\partial}{\partial v}\right)\left\{u^{h-\alpha}v^{k-\beta}\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\partial v^k}\left[u^\alpha v^\beta\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\,\partial v^{n-k}}\Psi\right]\right\} \\ = (-1)^{m+n}\Psi\sum_{h,k=0}^{m,n}\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\,\partial v^{n-k}}\left\{u^\alpha v^\beta\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\partial v^k}\left[u^{h-\alpha}v^{k-\beta}f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi\right]\right\} \\ + \frac{\partial}{\partial u}P' + \frac{\partial}{\partial v}Q',\end{aligned} \tag{28}$$

wo P', Q' in Φ und Ψ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Hier ersetze man nun Φ durch eine Lösung der Differentialgleichung (27) sowie Ψ durch den Ausdruck

$$\Psi = (u - x)^{m-\alpha-1}(v - y)^{n-\beta-1}. \tag{29}$$

Alsdann verschwindet die auf der rechten Seite befindliche Summe, während die links auf Ψ sich beziehenden Operationen eine sehr einfache Form annehmen werden.

Ersetzt man nämlich in der Formel (24) α durch $h - \alpha$, so folgt

$$u^{h-\alpha}\frac{\partial^h}{\partial u^h}[u^\alpha(u - x)^{h-\alpha-1}] = (-1)^h\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - h + 1)x^h(u - x)^{-\alpha-1}.$$

Mit Benutzung dieser Formel ergiebt sich, dass ein Ausdruck der Form

$$u^{h-\alpha}v^{k-\beta}\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\,\partial v^k}\left[u^\alpha v^\beta \frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\,\partial v^{n-k}}\Psi\right]$$

bei der Annahme (29) in den folgenden übergeht

$$(-1)^{m+n}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)x^h y^k(u-x)^{-\alpha-1}(v-y)^{-\beta-1}.$$

Ersetzt man also in (28) Φ durch eine Lösung der Differentialgleichung (27) und Ψ durch den Ausdruck (29), so folgt, wenn man die Constante $(-1)^{m+n}\alpha\dots(\alpha - m + 1)\beta\dots(\beta - n + 1)$ durch C bezeichnet:

$$C\Phi(u\,,\,v)\sum_{h,k=0}^{m,n}x^h y^k f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial u}\,,\,-\frac{\partial}{\partial v}\right)[(u - x)^{-\alpha-1}(v - y)^{-\beta-1}]$$

$$= C\Phi(u\,,\,v)\sum_{h,k=0}^{m,n}x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,,\,\frac{\partial}{\partial y}\right)[(u - x)^{-\alpha-1}(v - y)^{-\beta-1}] = \frac{\partial}{\partial u}P' + \frac{\partial}{\partial v}Q'.$$

Integrirt man nun schliesslich in der u-Ebene längs einer Linie (u) in der v-Ebene längs einer Linie (v), so hat man den Satz:

Bedeutet $\Phi(u\,,v)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (27) *und sind die Integrationswege* (u) *und* (v) *so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)}\left(\frac{\partial}{\partial u}P' + \frac{\partial}{\partial v}Q'\right)du\,dv = 0$$

identisch erfüllt wird, so besitzen wir in

$$\varphi(x\,,\,y) = \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)}(u-x)^{-\alpha-1}(v-y)^{-\beta-1}\,\Phi(u\,,\,v)\,du\,dv \tag{30}$$

eine Lösung der Differentialgleichung (21).

Der Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen (21) und (27) wird also durch die beiden Integralformeln (26) und (30) vermittelt.

§ 7.

Sehen wir von dem Integral (18) ab, so sind die übrigen in der vorliegenden Arbeit angewandten Integrale in den allgemeinen Formen

$$(A)\quad \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}\psi(ux\,,\,vy)\varphi(x\,,y)\,dx\,dy \quad \text{und} \quad (B)\quad \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}\psi(u-x\,,\,v-y)\varphi(x\,,y)\,dx\,dy$$

enthalten, wo wir φ und ψ als Lösungen von linearen Differentialgleichungen denken wollen. Die Ausdrücke

$$e^{x+y}\,,\ x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\,,\ (1-x)^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$$

— mit denen ψ zu identificiren ist, damit diese Integrale in die von uns erörterten übergehen — können als Lösungen der einfachsten linearen Differentialgleichungen bezeichnet werden. Zwei allgemeine Fragen treten hier nun ungezwungen hervor:

Vorausgesetzt, dass φ und ψ beide als Lösungen von gegebenen linearen Differentialgleichung definirt sind, lässt sich dann auch eine lineare Differentialgleichung angeben, die von dem betreffenden Integrale (A) oder (B) bei passender Wahl der Integrationswege (x) und (y) befriedigt wird?

Vorausgesetzt, dass die eine von den Functionen φ und ψ als Lösung einer gewissen linearen Differentialgleichung fixirt ist, lässt sich dann die andere als Lösung einer solchen Gleichung bestimmen, dass das betreffende Integral (A) oder (B) bei passender Wahl der Integrationswege einer vorgelegten linearen Differentialgleichung Genüge leistet?

Was nun speciell die erstere dieser Fragen betrifft, so lässt sie sich, wenn die eine von den Functionen $\varphi\,,\,\psi$ passend beschränkt wird, verhältnissmässig einfach und übersichtlich beantworten. Verfasser erlaubt sich hier die Hauptergebnisse mitzutheilen, zu denen er in seiner Arbeit *Über gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten*[1] für den Fall gekommen ist, dass φ und ϕ gewöhnliche lineare Differentialgleichungen befriedigen.

Alsdann gelten folgende Sätze:

Bezeichnen ϕ und φ Lösungen von den resp. Differentialgleichungen

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)\phi(x) = xg\left(x\frac{d}{dx}\right)\phi(x),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} F_{\nu}\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi(x) = 0,$$

und ist der Integrationsweg (x) so gewählt, dass eine gewisse Bedingungsgleichung erfüllt wird, so befriedigt das Integral

$$y = \int_{(x)} \phi\left(\frac{u}{x}\right)\varphi(x)\frac{dx}{x}$$

die Differentialgleichung

$$\left.\begin{array}{l}
F_0\left(u\frac{d}{du}\right)f\left(u\frac{d}{du}\right)f\left(u\frac{d}{du}-1\right)f\left(u\frac{d}{du}-2\right)\ldots f\left(u\frac{d}{du}-n+1\right)y \\
+\ uF_1\left(u\frac{d}{du}\right)g\left(u\frac{d}{du}\right)f\left(u\frac{d}{du}\right)f\left(u\frac{d}{du}-1\right) \qquad \ldots f\left(u\frac{d}{du}-n+2\right)y \\
+\ u^2F_2\left(u\frac{d}{du}\right)g\left(u\frac{d}{du}\right)g\left(u\frac{d}{du}+1\right)f\left(u\frac{d}{du}\right) \qquad \ldots f\left(u\frac{d}{du}-u+3\right)y \\
+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
+\ u^nF_n\left(u\frac{d}{du}\right)g\left(u\frac{d}{du}\right)g\left(u\frac{d}{du}+1\right)g\left(u\frac{d}{du}+2\right)\ldots g\left(u\frac{d}{du}+n-1\right)y
\end{array}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung ist nun sehr übersichtlich aus den Ausdrücken zusammengesetzt, welche in den Differentialgleichungen der Functionen φ und ϕ vorkommen.

Ein besonders bemerkenswerther specieller Fall tritt ein, wenn $n = 1$ ist, d. h. wenn nicht nur die Differentialgleichung von ϕ sondern auch die von φ eine *hypergeometrische* ist.

[1] Acta Soc. Scient. Fenn., Tom. 21.

In dem folgenden Satze haben wir zur Abkürzung f und g an Stelle von $f\left(\frac{d}{du}\right)$ und $g\left(\frac{d}{du}\right)$ geschrieben. Ferner bedeutet g^n die symbolische n^{te} Potenz von g, während g' die erste Ableitung von g bezeichnet.

Bezeichnen ψ und φ Lösungen von den resp. Differentialgleichungen

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x) = xg\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x) = 0,$$

und ist der Integrationsweg (x) so gewählt, dass eine gewisse Bedingungsgleichung erfüllt wird, so befriedigt das Integral

$$y = \int_{(x)} \psi(u - x)\varphi(x)\,dx$$

die Differentialgleichung

$$0 = \begin{cases} g^n f_0 y \\ + g^{n-1}[xg - f]f_1 y \\ + g^{n-2}[xg + g' - f][xg - f]f_2 y \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + [xg + (n-1)g' - f][xg + (n-2)g' - f]\ldots[xg - f]f_n y. \end{cases}$$

Ein besonders einfacher und bemerkenswerther Fall tritt auch hier ein, wenn $n = 1$ ist, d. h. wenn nicht nur die Differentialgleichung von ψ sondern auch die von φ eine LAPLACE'sche Gleichung ist.

Helsingfors, April 1896.