SUR UNE CLASSE DE TRANSCENDANTES NOUVELLES

(Second mémoire)

PAR

EMILE PICARD

À PARIS.

Dans mon mémoire[1] *Sur une classe de transcendantes nouvelles,* j'ai démontré l'existence de systèmes de m fonctions uniformes dans tout le plan admettant la période $\omega' i$ et jouissant relativement à la substitution $(z, z + \omega)$ de la propriété suivante. Considérons une transformation *birationnelle* entre m lettres $u, v, \ldots, w$,

$$
(1) \qquad \begin{aligned}
u' &= R_1(u, v, \ldots, w),\\
v' &= R_2(u, v, \ldots, w),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w' &= R_m(u, v, \ldots, w),
\end{aligned}
$$

et désignons par $f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)$ les m fonctions; on a

$$
(\mathrm{E}) \qquad \begin{aligned}
f(z+\omega) &= R_1[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],\\
\varphi(z+\omega) &= R_2[f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\psi(z+\omega) &= R_m(f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)].
\end{aligned}
$$

Il importe de rappeler les hypothèses d'un caractère très général faites

[1] Acta mathematica (tome 18); on est prié de se reporter aux notations de ce mémoire.

dans le mémoire cité sur la substitution (1). Nous avons supposé que $u = v = \ldots = w = 0$ est un point double de cette transformation birationnelle, et que l'on a dans le voisinage de ces valeurs les développements en séries entières

$$
(2) \qquad
\begin{aligned}
u' &= \mu_1 u + Q_1(u, v, \ldots, w),\\
v' &= \mu_2 v + Q_2(u, v, \ldots, w),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
w' &= \mu_m w + Q_m(u, v, \ldots, w),
\end{aligned}
$$

les fonctions Q ne contenant que des termes de degré supérieur à *un*. Nous avons supposé de plus que l'on n'a pas d'égalité de la forme

$$
(3) \qquad \mu_i = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}},
$$

i étant un des nombres $1, 2, \ldots, m$, et ν un entier positif ou négatif, et que l'on n'a pas non plus

$$
(4) \qquad m = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}}.
$$

Ces restrictions *d'inégalités*, correspondant à (3) et (4), peuvent être levées. Je le montrerai tout à l'heure, mais je veux tout d'abord montrer comment les résultats de mon premier mémoire auraient pu être obtenus un peu plus rapidement, en restant toujours d'ailleurs dans le même ordre d'idées. J'ai commencé (loc. cit.) par examiner le cas où les R étaient des polynomes (la substitution n'étant pas alors birationnelle), et le cas général a été ramené à ce cas particulier. Or on peut procéder *directemeut* en gardant le même mode de démonstration. Nous opérerons comme au par. 4, en prenant comme première approximation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$
f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)
$$

admettant la période $\omega' i$, et ayant les multiplicateurs respectifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ pour le changement de z en $z + \omega$. On suppose que ces fonctions sont holomorphes dans la bande ii', et que dans cette même bande leurs modules sont suffisamment petits. On a d'abord le système

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
f_1(z+\omega) &= \mu_1 f_1(z) + Q_1[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)],\\
\varphi_1(z+\omega) &= \mu_2 \varphi_1(z) + Q_2[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)],\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\psi_1(z+\omega) &= \mu_m \psi_1(z) + Q_m[f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)].
\end{aligned}
$$

Il détermine des fonctions $f_1(z), \varphi_1(z), \ldots, \psi_1(z)$ ayant dans la première bande les mêmes singularités (pôles) que $f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z)$. On le voit de la manière la plus simple, en posant

$$
\begin{aligned}
f_1(z) &= f_0(z) + F_1(z),\\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\\
\psi_1(z) &= \psi_0(z) + \Psi_1(z).
\end{aligned}
$$

En se servant alors du théorème du par. 9, on est assuré que l'on peut déterminer des fonctions $F_1, \ldots, \Psi_1$ holomorphes dans la bande yy', AA' et un peu à droite et à gauche. On continue alors en faisant successivement les approximations indiquées au par. 4. La seule différence avec la théorie développée aux par. 4 et suivants, est que dans ces paragraphes les Q représentaient des polynomes, tandis qu'ici ce sont des séries convergentes seulement si les variables qui y figurent sont suffisamment petites. Mais il n'y a pas là de véritable difficulté, car on a à considérer seulement les fonctions Q quand la variable z est dans la bande ii', et si dans cette bande les modules de $f_0, \varphi_0, \ldots, \psi_0$ sont suffisamment petits, le lemme du par. 3 et les raisonnements du par. 5 subsistent entièrement.

Nous pouvons donc conclure à l'existence de fonctions uniformes

$$
f(z), \varphi(z), \ldots, \psi(z)
$$

satisfaisant aux équations (E). Notre mode de raisonnement prouve que l'on peut avoir une solution de ces équations fonctionnelles pour laquelle les fonctions $f, \varphi, \ldots, \psi$ deviendront infinies dans la bande (yy', AA') comme des fonctions données doublement périodiques de seconde espèce

$$
f_0(z), \varphi_0(z), \ldots, \psi_0(z),
$$

pourvu que ces fonctions aient des modules assez petits dans la bande ii'.

Ce serait une question intéressante de rechercher *toutes* les solutions possibles uniformes et périodiques des équations (E). Celles que j'ai obtenues sont vraisemblablement très particulières, malgré le caractère de généralité qu'elles paraissent présenter; la théorie des systèmes d'équations en nombre infini pourra peut-être trouver d'importantes applications dans des problèmes de ce genre, quand elle sera plus développée.

Je n'aborde pas, au moins pour le moment, ces difficiles problèmes. C'est la restriction relative aux coefficients μ que je veux approfondir maintenant. Le résultat obtenu suppose que l'on n'a pas d'égalité de la forme

$$\mu_i = e^{\frac{2\nu\pi\omega}{\omega'}} \tag{α}$$

i étant un des nombres $1, 2, \ldots, m$, et ν un entier positif ou négatif. Avec le mode de démonstration que je viens d'employer ici, l'impossibilité de la relation (4) ne joue plus de rôle. Nous allons montrer que, même dans le cas, où il existe une relation de la forme (α), on peut trouver des transcendantes uniformes satisfaisant aux conditions indiquées.

La difficulté, au premier abord, parait sérieuse, car les approximations successives ne peuvent plus être effectuées quand on a une relation de la forme (α). On peut cependant lever la difficulté de la manière suivante. Soit $\lambda(z)$ une fonction doublement périodique de seconde espèce aux multiplicateurs 1 et a (en désignant par a une constante quelconque), telle par conséquent que

$$\lambda(z + \omega' i) = \lambda(z), \qquad \lambda(z + \omega) = a\lambda(z)$$

et supposons que $\lambda(z)$ reste holomorphe dans la bande ii'. Posons

$$f(z) = \lambda(z) . F(z), \qquad \varphi(z) = \lambda(z) . \Phi(z) \;, \quad \ldots . \quad \psi(z) = \lambda(z) . \Psi(z).$$

On aura

$$F(z + \omega) = \frac{\mu_1}{a} F(z) + P_1(F(z), \Phi(z), \ldots, \Psi(z), \lambda(z)),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Psi(z + \omega) = \frac{\mu_m}{a} \Psi(z) + P_m(F(z), \Phi(z), \ldots, \Psi(z), \lambda(z)),$$

les P étant des séries en $F, \Phi, \ldots, \Psi$ commençant par des termes du second degré, et dont les coefficients dépendent d'ailleurs de $\lambda(z)$. Ces équations sont de même forme que les équations (5), sauf que $\lambda(z)$ y figure, ce qui n'est d'aucune importance pour l'emploi des approximations successives. Mais les multiplicateurs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ ont été remplacés par

$$\frac{\mu_1}{a}, \frac{\mu_2}{a}, \ldots, \frac{\mu_m}{a}$$

et comme a peut être pris arbitrairement, il n'y a plus de multiplicateur singulier. La difficulté signalée a donc disparu. Si donc aucun des multiplicateurs μ n'est nul, *il y aura certainement des transcendantes uniformes dans tout le plan, avec des discontinuités uniquement polaires, admettant la période $\omega' i$ et satisfaisant aux conditions* (E).