SUR QUELQUES POINTS DE LA THÉORIE DES DÉTERMINANTS INFINIS

PAR

HELGE VON KOCH
à STOCKHOLM.

Si l'on a deux déterminants *normaux*[1]

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\ldots,+\infty}, \qquad B = [B_{ik}]_{i,k=1,2,\ldots,+\infty}$$

et qu'on désigne par C_{ik} l'une quelconque des quatre séries

$$(\Sigma) \qquad \Sigma_j A_{ij} B_{kj}\,,\ \Sigma_j A_{ij} B_{jk}\,,\ \Sigma_j A_{ji} B_{kj}\,,\ \Sigma_j A_{ji} B_{jk}$$

on sait, d'après ce que j'ai démontré précédemment,[2] que le déterminant C des C_{ik} est normal et que l'on a

$$AB = C.$$

Après avoir étendu, dans le mémoire cité, une partie des résultats valables pour les déterminants normaux à une classe un peu plus générale pour laquelle M. VIVANTI[3] a proposé ensuite le nom de déterminants *normaloïdes,* j'ai dit sans démonstration, qu'à ces déterminants s'applique aussi le théorème de multiplication. Mais je n'ai pas remarqué que cet énoncé n'est exact qu'en adoptant pour C_{ik} la seconde ou la troisième des valeurs (Σ).[4]

---

[1] Pour abréger, j'appelle ainsi les déterminants infinis désignés par le nom de déterminants de la *forme normale* dans un mémoire précédent (*Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires,* Acta mathematica, t. 16).

[2] loc. cit. n° 12.

[3] Annali di matematica, Ser. II, t. 21, p. 27.

[4] Pour corriger cet erratum qui n'a d'ailleurs aucune influence sur les autres résultats du mémoire cité, il suffit de lire (page 236 ligne 7 en remontant) 8 et 13 au lieu de 8, 12 et 13.

Cette remarque a été faite par M. CAZZANIGA dans une note récente.[1]

La lecture de cette note, m'a rappelé une difficulté plus grave que j'ai rencontrée en cherchant à étendre le théorème en question au cas général des déterminants absolument convergents.

Après avoir résumé, au § 1, quelques résultats obtenus dans mon travail *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini*[2] j'étudie au § 2 cette question de la multiplication des déterminants absolument convergents en m'attachant surtout au cas des déterminants de genre fini.

Dans le paragraphe suivant, je passe à l'objet principal de ce travail, savoir l'étude d'une classe nouvelle de déterminants infinis pour lesquels je propose le nom de déterminants *hypernormaux* et qui jouent un rôle important pour l'étude de certains systèmes d'ordre infini d'équations différentielles linéaires.

Cette application se trouve brièvement indiquée au § 4.

---

[1] Annali di matematica, Ser. III, t. 2, p. 229. M. CAZZANIGA cherche à étendre l'étude à une classe plus générale de déterminants (»normaloidi generalizzati») définis par les conditions suivantes: le produit ΠA_{ii} des éléments diagonaux converge absolument et il existe deux suite de quantités (non nulles) x_i $(i = 1, 2, ..)$ et y_i $(i = 1, 2, ..)$ telles que la série

$$\sum_{i,k} \frac{x_i}{y_k} A_{ik} \qquad (i \neq k)$$

converge absolument, et telles, en outre, que le produit

$$\prod \frac{x_i}{y_i}$$

converge absolument. Il faut remarquer que cette classe n'est pas distincte des déterminants normaloïdes. En effet, il résulte des conditions énoncées que la série $\sum_{i,k} \frac{x_i}{x_k} A_{ik}$ $(i \neq k)$ [ainsi que la série $\sum_{i,k} \frac{y_i}{y_k} A_{ik}$ $(i \neq k)$] converge absolument.

[2] Bihang till K. Sv. Vet.-Ak. Handl. Bd. 22. Stockholm 1896.

§ 1. *Généralités sur les déterminants absolument convergents.*

1. Soit donné un tableau à double entrée, illimité à droite et en bas:

$$
(1) \qquad \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots \\ . & . & . & \dots \end{matrix}
$$

Supposons que le produit des éléments diagonaux

$$
(2) \qquad A_{11} \; A_{22} \; A_{33} \; \dots
$$

converge absolument et formons une suite de nouveaux produits en laissant fixes les premiers indices des facteurs A_{ii} et permutant successivement les seconds indices de toutes les manières possibles; attribuons à chaque produit le signe $+$ ou le signe $-$ selon la parité ou l'imparité du nombre des transpositions nécessaires pour passer du produit initial (2) au produit considéré. Si la série qu'on peut former avec tous ces produits a une valeur Δ finie et déterminée (c'est-à-dire indépendante de l'ordre des termes), nous dirons que le déterminant des A_{ik} *converge absolument*[1] et a pour valeur Δ; et nous le désignerons par l'une ou l'autre des notations suivantes:

$$
\Delta = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\dots,+\infty} = \Sigma \pm A_{11}A_{22}A_{33} \dots
$$

$$
= \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots \\ A_{21} & A_{22} & \dots \\ . & . & \dots \end{vmatrix}.
$$

2. Désignant par Δ_n le déterminant formé avec les n premières lignes et les n premières colonnes du tableau (1), on démontre facilement (voir *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini*, p. 5) que, Δ étant supposé absolument convergent, on a

$$
\lim \Delta_n = \Delta \quad (\text{pour } n = +\infty).
$$

[1] J'ai donnée cette définition dans une note présentée à l'Académie des Sciences de Paris. (Comptes rendus, 30 janvier 1893.)

3. Définissons les sous-déterminants de Δ. Dans le tableau (1), remplaçons les éléments $A_{i_1k_1}, A_{i_2k_2}, \ldots, A_{i_rk_r}$ par l'unité et les autres éléments des lignes $i_1, \ldots, i_r$ par zéro. Si le déterminant du tableau ainsi obtenu converge absolument, nous l'appellerons *sous-déterminant* ou *mineur* d'ordre r du déterminant Δ et nous le désignerons par

$$\begin{pmatrix} i_1 & . & . & i_r \\ k_1 & . & . & k_r \end{pmatrix}.$$

Il est clair que ce déterminant reste inaltéré si l'on y remplace tous les éléments des colonnes $k_1 \ldots k_r$ (sauf ceux déjà remplacés par l'unité) par zéro.

Si tous les mineurs d'ordre fini qu'on peut ainsi former convergent absolument, nous dirons que *tous les déterminants du tableau* (1) *convergent absolument.*

4. Ceci posé, j'ai démontré (loc. cit. n° 5) le théorème suivant:

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il faut et il suffit

1° *que le produit des éléments diagonaux converge absolument;*

2° *que la série formée avec tous les produits circulaires converge absolument;*

3° *que la série formée avec tous les produits demi-circulaires appartenant à un élément quelconque converge absolument.*

Par *produit circulaire* j'entends tout produit de la forme

$$A_{i_1i_2}A_{i_2i_3} \ldots A_{i_ki_1} \tag{3}$$

les indices i étant supposés distincts; je le dis d'ordre $k - 1$ si le nombre des facteurs A est k. Par produit *demi-circulaire* d'ordre k j'entends tout produit de la forme

$$A_{i_1i_2}A_{i_2i_3} \ldots A_{i_ki_{k+1}}, \tag{4}$$

tous les i étant distincts.

Désignant le produit (3) par $(i_1 \ldots i_k)$, le produit (4) par $(i_1 \ldots i_k ; i_{k+1})$ les trois conditions énoncées peuvent se résumer ainsi:

Le produit

$$\Pi_i A_{ii} \tag{5}$$

converge absolument;

la série

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \sum_{i_1..i_k} (i_1 \, . \, . \, i_k) \tag{6}$$

converge absolument;

la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i_1..i_k} (\beta \; i_1 \, . \, . \, i_k \, ; \, \alpha) \tag{7}$$

converge absolument quels que soient α et β.

Dans chaque terme de la série (6) les $i_1 \, . \, . \, i_k$ sont distincts et, pour que chaque produit circulaire ne figure qu'une seule fois, il faut supposer que l'un des indices, par exemple le premier, soit inférieur aux autres.

Dans la série (7) les indices $i_1 \, . \, . \, i_k$ ne sont assujettis qu'à cette conditions que les indices $i_1 \, . \, . \, i_k$ définissant un terme quelconque doivent être différents de α et β et distincts entre eux.

5. Dans mon mémoire cité plus haut (Acta mathematica, t. 16) j'ai donné (n° 7) divers modes de développement d'un déterminant *de forme normale*. On peut démontrer sans difficulté que tous ces développements restent valables pour un déterminant remplissant les conditions précédentes.

Par exemple, Δ étant un tel déterminant, si l'on pose

$$A_{ii} = 1 + a_{ii}, \qquad A_{ik} = a_{ik} \qquad {\scriptstyle (i \neq k)}$$

on a le développement suivant

$$\Delta = 1 + \sum_i a_{ii} + \sum_{i,j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix} + \sum_{i,j,k} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix} + \ldots \tag{8}$$

où

$$i < j < k < \, . \, . \, ;$$

et ce développement reste convergent si l'on y remplace tous les a_{ik} par leurs valeurs absolues et que, dans tous les déterminants qui y figurent, on prend tous les termes avec le signe $+$.

6. Soit

$$x_1, x_2, \ldots$$

une suite de quantités (non nulles); j'appelle *substitution multiplicatoire* et je désigne pas

$$\left| A_{ik}\,;\, A_{ik}\frac{x_i}{x_k} \right|$$

l'opération qui consiste à remplacer partout les A_{ik} par $A_{ik}\frac{x_i}{x_k}$.

Il résulte immédiatement de la définition adoptée plus haut qu'un déterminant absolument convergent reste inaltéré par une substitution multiplicatoire quelconque.

On vérifie aussi que, par cette substitution, un mineur quelconque $\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_r \\ k_1 \ldots k_r \end{pmatrix}'$ du nouveau déterminant est lié au mineur correspondant de l'ancien par la relation

$$\begin{pmatrix} i_1 \ldots i_r \\ k_1 \ldots k_r \end{pmatrix}' = \frac{x_{k_1} \ldots x_{k_r}}{x_{i_1} \ldots x_{i_r}} \begin{pmatrix} i_1 \ldots i_r \\ k_1 \ldots k_r \end{pmatrix}.$$

7. Etant donné un déterminant infini, si l'on veut décider s'il converge absolument ou non, la règle précédente est, dans des cas particuliers, assez facile à appliquer; mais, en général, on la trouvera trop compliquée. J'ai donc cherché des règles de convergence plus simples remplissant les deux conditions suivantes:

Chaque règle donne des conditions suffisantes pour la convergence absolue;

la règle $n^{\text{ième}}$ s'approche, pour n très grand, autant que l'on veut de la règle générale qui donne les conditions nécessaires et suffisantes.

Voici le théorème que j'ai obtenu: [1]

Pour que le déterminant des A_{ik} converge absolument, il suffit

1° *que le produit des éléments diagonaux converge absolument;*

2° *que la série formée avec tous les produits circulaires d'ordre* $1, 2, \ldots, 2n-2$ *converge absolument;*

3° *que la série formée avec tous les produits demi-circulaires d'ordre* $n, n+1, \ldots, 2n-1$ *converge absolument.*

---

[1] Mém. cité (*Sur la convergence des déterminants d'ordre infini*) § 3.

Ces conditions remplies, pour que tous les mineurs de Δ convergent aussi absolument, il suffit que la série formée par tous les produits demi-circulaires appartenant à un élément quelconque $A_{\alpha\beta}$ et d'ordre inférieur à n converge absolument.[1]

Si ces conditions sont remplies, je dirai que le déterminant des A_{ik} est *de genre* $n - 1$.

Si ces conditions ne sont remplies pour aucune valeur de n, je dirai que le déterminant est *de genre infini* ou qu'il *n'a pas de genre.*

Si ces conditions ne sont remplies qu'après une substitution multiplicatoire convenable, je dirai que le déterminant des A_{ik} est *semblable* à un déterminant de genre $n - 1$.

8. Pour $n = 0$ les trois conditions se réduisent à une seule: la convergence absolue de la série Σa_{ij} $(A_{ii} = 1 + a_{ii}, A_{ik} = a_{ik})$[2] de sorte que l'on retrouve la règle de M. Poincaré et l'on tombe sur les déterminants normaux. Si la série

$$\sum_{i,j} |a_{ij}|$$

diverge mais peut être rendue convergente moyennant une substitution multiplicatoire convenable, le déterminant des A_{ik} est *normaloïde.*

Donc, selon notre terminologie, les déterminants *de genre zéro* se partagent en deux classes: déterminants *normaux* et déterminants *normaloïdes.*

Pour $n = 1$, la règle précédente coïncide avec celle que j'ai donnée dans la note citée plus haut (Comptes Rendus 1893) et peut se résumer ainsi:

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit que les trois séries

$$\sum_i a_{ii}\,, \quad \sum_{i,j,k} a_{ij}a_{jk}\,, \quad \sum_{ijkl} a_{ij}a_{jk}a_{kl}$$

---

[1] Cette dernière condition est vérifiée d'elle-même s'il n'y a dans Δ aucune ligne ni aucune colonne dont *tous* les éléments non-diagonaux s'annulent. Cette hypothèse est toujours légitime puisque, dans le cas contraire, on peut remplacer Δ par un de ses mineurs (Cf. loc. cit. n° 11). Dans tout ce qui suit nous ferons donc cette hypothèse qui nous dispense de la condition supplementaire.

[2] Cette notation sera conservée dans ce qui va suivre.

convergent absolument; ou bien, que ces séries peuvent être rendues convergentes moyennant une substitution multiplicatoire convenable.

9. La règle n^{me} énoncée plut haut se simplifie beaucoup si l'une des deux conditions suivantes est remplie:

$$\Sigma_j |a_{ij}| < K \quad \text{(pour toute valeur de } i\text{)},$$
$$\Sigma_i |a_{ij}| < K \quad \text{(pour toute valeur de } j\text{)},$$

K désignant une constante. En effet, dans ce cas, la converge absolue de la série $\sum\limits_{i_1..i_k}(i_1 \, . \, . \, i_{k-1} \, ; \, i_k)$ pour $k > n + 1$ est une conséquence nécessaire de la convergence absolue de la même série pour $k = n + 1$.

10. Il est facile de démontrer que les éléments d'un déterminant de genre $n - 1$ satisfont encore aux trois conditions suivantes:

1° La série

$$s_i^{(k)} = \sum_{i_1..i_k} a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \, . \, . \, a_{i_{k-1} i_k}$$

converge absolument quel que soit k.

2° La série

$$t_i^{(k)} = \sum_{i_1..i_k} a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \, . \, . \, a_{i_k i}$$

converge absolument quel que soit k.

3° La série

$$s_{\alpha\beta}^{(k)} = \sum_{i_1..i_{k-1}} a_{\beta i_1} a_{i_1 i_2} \, . \, . \, a_{i_{k-1}\alpha}$$

formée avec tous les produits demi-circulaires d'ordre quelconque k et appartenant à un élément quelconque $A_{\alpha\beta}$ converge absolument.

§ 2. *Sur le théorème de multiplication.*

11. Nous pouvons venir maintenant à la question de la multiplication de deux déterminants

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\ldots,+\infty}, \qquad B = [B_{ik}]_{i,k=1,2,\ldots,+\infty}$$

absolument convergents.

Posons

(I) $$C_{ik}^{(1)} = \sum_j A_{ij} B_{kj},$$

(II) $$C_{ik}^{(2)} = \sum_j A_{ij} B_{jk},$$

(III) $$C_{ik}^{(3)} = \sum_j A_{ji} B_{kj},$$

(IV) $$C_{ik}^{(4)} = \sum_j A_{ji} B_{jk}.$$

Nous dirons que la loi de multiplication ν est applicable aux déterminants A et B si les trois conditions suivantes sont remplies:

Les séries

$$C_{ik}^{(\nu)} \qquad (i, k = 1, 2, .., +\infty)$$

convergent absolument;

le déterminant des $C_{ik}^{(\nu)}$ converge absolument;

ce déterminant est égal au produit AB.

Cette définition admise, nous commencerons par démontrer le lemme suivante:

Pour que la loi de multiplication ν soit applicable, il suffit que le déterminant des $\overline{C}_{ik}^{(\nu)}$ converge absolument, $\overline{C}_{ik}^{(\nu)}$ désignant ce que devient $C_{ik}^{(\nu)}$ quand on y remplace tous les A et tous les B par leurs valeurs absolues.

En effet, posons d'abord

$$C_{ik} = C_{ik}^{(1)}, \qquad \overline{C}_{ik} = \overline{C}_{ik}^{(1)}.$$

Le déterminant $\overline{C}$ des $\overline{C}_{ik}$ étant supposé absolument convergent et chaque terme du déterminant C des C_{ik} étant inférieur (ou égal) en valeur absolue au terme correspondant de $\overline{C}$, il est évident que C converge absolument.

Par définition on a

(9) $$C = \sum \varepsilon A_{1i} B_{\mu i} A_{2j} B_{\nu j} \ldots$$

la sommation s'étendant à toute permutation

(10) $$\mu, \nu, \ldots$$

des nombres $1, 2, \ldots$ et à toute valeur entière et positive des

$$i, j, \ldots$$

et ε désignant $+1$ ou -1 selon que la permutation (10) peut se déduire de la permutation $1, 2, \ldots$ par un nombre pair ou impair de transpositions.

Le développement (9) étant absolument convergent, nous pouvons ranger les termes ainsi:

$$\sum_{i,j,\ldots} \Big(\sum_{\mu,\nu,\ldots} \varepsilon B_{\mu i} B_{\nu j} \ldots\Big) A_{1i} A_{2j} \ldots \tag{11}$$

Or, la série entre crochets étant nulle quand deux des indices $i, j, \ldots$ sont égaux, il suffit d'étendre la sommation à toute permutation $i, j, \ldots$ des nombres $1, 2, \ldots$

De plus, comme pour une permutation quelconque $i, j, \ldots$ des nombres $1, 2, \ldots$ on a

$$\sum_{\mu,\nu,\ldots} \varepsilon B_{\mu i} B_{\nu j} \ldots = +B \quad \text{ou} \quad -B$$

selon que cette permutation se déduit de $1, 2, \ldots$ à l'aide d'un nombre pair ou impair de transpositions, la somme (11) se réduit à la suivante

$$B \sum_{i,j,\ldots} \varepsilon A_{1i} A_{2j} \ldots = BA$$

ce qui donne bien

$$AB = C.$$

La démonstration est la même si, au lieu de la définition (I), on adopte pour C_{ik} la définition II, III ou IV.

12. Passons à la multiplication de deux déterminants de genre $n-1$. Soient donc

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,\ldots,+\infty}, \qquad B = [B_{ik}]_{i,k=1,\ldots,+\infty}$$

et supposons que les A_{ik} et les B_{ik} remplissent les conditions énoncées plus haut.

Remarquons aussitôt qu'il est facile de former des exemples où toutes les quatres lois de multiplication ne sont pas vraies simultanément Prenons par exemple le déterminant suivant

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & & \\ \beta_1 & 1 & \alpha_2 & . \\ & \beta_2 & 1 & . \\ & . & . & . \end{vmatrix}$$

qui intervient dans la théorie des fractions continues[1] et qui converge absolument toujours et seulement si la série

$$(12) \qquad \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots$$

converge absolument.

Pour que ce déterminant soit de genre *un* il suffit évidemment de supposer

1° que la série (12) converge absolument;

2° que la série

$$\sum \left[|\beta_i| + |\alpha_{i+1}|\right]\left[|\alpha_i| + |\beta_{i+1}|\right]$$

converge;

3° que les α_i et les β_i restent moindres, en valeur absolue, qu'un nombre positif K.

Si nous prenons par exemple

$$\alpha_{2i} = \frac{1}{\sqrt{2i}}, \qquad \alpha_{2i-1} = \frac{1}{2i-1}, \qquad (i=1,2,..,+\infty)$$

$$\beta_i = \frac{1}{i} \qquad (i=1,2,..,+\infty)$$

ces trois conditions sont vérifiées. Or, si l'on prend le carré du déterminant A et cherche à appliquer la première loi de multiplication on trouve pour C_{ii} la valeur suivante:

$$C_{11} = 1 + \alpha_1^2, \qquad C_{ii} = 1 + \beta_{i-1}^2 + \alpha_i^2 \qquad (i>1)$$

ce qui, la série $\Sigma\alpha_{2i}^2$ étant divergente, montre que le produit ΠC_{ii} diverge; donc, le déterminant des C_{ik} n'étant pas absolument convergent, la première loi est en défaut. (Il en est de même de la loi IV.)

Au contraire, on vérifie sans difficulté que les lois II et III sont applicables dans le cas considéré.

Voici un théorème qui, dans la plupart des cas, permet de décider si le théorème de multiplication est applicable à deux déterminants donnés de genre $n - 1$.

---

[1] Voir ma note: *Quelques théorèmes concernant la théorie générale des fractions continues.* Öfversigt af K. V. A. Förhandl. Stockholm 1895.

Pour que les lois II et III de multiplication soient applicables à deux déterminants A et B de genre $n - 1$, il suffit que tout élément A_{ik} et que tout élément B_{ik} soit inférieur en valeur absolue, à l'élément correspondant P_{ik} d'un déterminant de genre $n - 1$.

Pour que les lois I et IV soient applicables, il suffit que, quels que soient i et k, l'élément A_{ik} soit inférieur à P_{ik} et l'élément B_{ik} inférieur à P_{ki} en valeur absolue.

En effet supposons d'abord

$$|A_{ik}| < P_{ik}, \qquad |B_{ik}| < P_{ik} \tag{13}$$

les P_{ik} étant des nombres positifs formant un déterminant de genre $n - 1$. Introduisons pour abréger la notation symbolique

$$A(i_1 \,.\,.\, i_k) = A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \,.\,.\, A_{i_k i_1},$$
$$A(i_1 \,.\,.\, i_k\,;\, i_{k+1}) = A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \,.\,.\, A_{i_k i_{k+1}}$$

pour désigner les produits circulaires et demicirculaires d'un déterminant quelconque. Par hypothèse, le produit ΠP_{ii} converge absolument, la série

$$\sum_{i_1 .. i_k} P(i_1 \,.\,.\, i_k) \tag{14}$$

converge absolument pour $k = 1, 2, \ldots, 2n - 2$ et la série

$$\sum_{i_1 .. i_{k+1}} P(i_1 \,.\,.\, i_k\,;\, i_{k+1}) \tag{14'}$$

converge absolument pour $k = n, n + 1, \ldots, 2n - 1$.

De là résulte que la série (14) converge absolument quel que soit k et que la série (14′) converge absolument dès que $k \geqq n$.

Posons maintenant

$$C_{ik} = \Sigma_j A_{ij} B_{jk}, \tag{15}$$

ce qui donne, pour $i = k$,

$$C_{ii} = A_{ii} B_{ii} + \Sigma_j A_{ij} B_{ji}. \qquad (j \neq i)$$

En tenant compte des conditions (13) et de la convergence absolue de la série $\sum_{ij} P(ij)$, on voit donc que le produit

$$\Pi C_{ii}$$

converge absolument.

Pour $i \neq k$ la formule (15) nous donne

$$(15') \qquad |C_{ik}| < K\Big(P_{ik} + \sum_{j \neq i,k} P(ij\,;\,k)\Big)$$

d'où

$$|C(i_1\,..\,i_k)| < K^k\Big[P(i_1\,..\,i_k) + \,..\, + \sum_{j_1..j_k} P(i_1 j_1 i_2 j_2\,..\,i_k j_k)\Big],$$

$$\sum_{i_1..i_k} |C(i_1\,..\,i_k)| < K^k\Big[\sum_{i_1..i_k} P(i_1\,..\,i_k) + \,..\, + \sum_{i_1..i_k}\sum_{j_1..j_k} P(i_1 j_1\,..\,i_k j_k)\Big].$$

Les séries entre les crochets dans cette formule sont en nombre fini et, dans chacune d'elles, ne figure que des produits circulaires d'ordre inférieur à $2k$.

Donc la série formée par les produits circulaires d'ordre k

$$\sum C(i_1\,..\,i_k)$$

converge absolument pour toute valeur de k.

Il nous reste à examiner la convergence des séries formées par les produits demi-circulaires.

La formule (15) nous donne

$$|C(i_1\,..\,i_k\,;\,i_{k+1})| < K^k\Big[P(i_1\,..\,i_k\,;\,i_{k+1}) + \,..\, + \sum_{j_1..j_k} P(i_1 j_1\,..\,i_k j_k\,;\,i_{k+1})\Big],$$

d'où

$$\sum_{i_1..i_{k+1}} |C(i_1\,..\,i_k\,;\,i_{k+1}) < K^k\Big[\sum_{i_1..i_{k+1}} P(i_1\,..\,i_k\,;\,i_{k+1}) + .. + \sum_{i_1..i_{k+1}}\sum_{j_1..j_k} P(i_1 j_1\,..\,i_k j_k\,;\,i_{k+1}\Big],$$

ce qui montre que la série du premier membre converge dès que $k \geqq n$.

Donc le déterminant des C_{ik} est de genre $n - 1$.

On voit de la même manière que le déterminant des éléments $\overline{C}_{ik}$

$$\overline{C}_{ik} = \sum_j |A_{ij} B_{jk}|$$

est de genre $n - 1$. Or, de la convergence absolue du déterminant des $\overline{C}_{ik}$ on peut conclure, nous l'avons vu plus haut, que le déterminant des C_{ik} est égal au produit du déterminant des A_{ik} par celui des B_{ik}.

Donc, dans l'hypothèse (13), la loi de multiplication II est applicable et l'on voit de la même manière que la loi III l'est également.

Si l'on suppose au contraire

$$|A_{ik}| < P_{ik}\ ,\ |B_{ik}| < P_{ki}$$

les P_{ik} formant un déterminant de genre $n - 1$, on peut démontrer, d'une manière absolument analogue, que les lois I et IV sont valables, c'est à dire que le déterminant des C'_{ik}

$$C'_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{kj} \quad \text{ou} \quad C'_{ik} = \sum_j A_{ji} B_{jk}$$

est de genre $n - 1$ et égal au produit AB.

§ 3. *Sur une classe nouvelle de déterminants.*

13. J'arrive maintenant à une classe de déterminants qui, en général, sont de genre infini. Cette classe est définie par le théorème suivant:

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit

1° *que le produit ΠA_{ii} des éléments diagonaux converge absolument;*

2° *qu'il existe deux suites de nombres positifs*

$$S_1\,,\ S_2\,,\ \ldots$$

et

$$T_1\,,\ T_2\,,\ \ldots$$

telles que la série

$$S_1 T_1 + S_2 T_2 + \ldots \tag{16}$$

converge et telles que

$$|A_{ik}| \leqq S_i T_k. \qquad {\scriptstyle (i \neq k)} \tag{17}$$

Remarquons d'abord qu'il est toujours permis de supposer la somme (16) moindre que *l'unité*. En effet, dans le cas contraire, après avoir choisi m de telle sorte que l'on ait

$$S_{m+1} T_{m+1} + S_{m+2} T_{m+2} + \ldots < 1$$

on choisira un nombre K suffisamment grand pour que l'on ait

$$\frac{S_1 T_1 + \ldots + S_m T_m}{K} + S_{m+1} T_{m+1} + S_{m+2} T_{m+2} + \ldots < 1$$

et posera

$$B_{ik} = \frac{A_{ik}}{K} \quad (\text{pour } i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$B_{ik} = A_{ik} \quad (\text{pour } i > m);$$

on remplacera le déterminant A des A_{ik} par le déterminant B des B_{ik}, on aura

$$B = \frac{1}{K^m} A$$

et, pour B, la condition en question sera évidemment vérifiée.

Supposons donc

$$S_1 T_1 + S_2 T_2 + \ldots = S < 1 \tag{18}$$

et formons tous les produits circulaires $A(i_1 \ldots i_k)$. A cause de l'hypothèse (17) on aura

$$|A(i_1 \ldots i_k)| \leqq S_{i_1} T_{i_1} \ldots S_{i_k} T_{i_k}$$

d'où

$$\sum_{i_1 \ldots i_k} |A(i_1 \ldots i_k)| < S^k,$$

ce qui prouve que la série formée par tous les produits circulaires des A_{ik} converge absolument.

Passons aux produits demi-circulaires. Nous avons

$$|A(\beta i_1 \ldots i_k; \alpha)| \leqq S_\beta T_\alpha S_{i_1} T_{i_1} S_{i_2} T_{i_2} \ldots S_{i_k} T_{i_k}$$

d'où résulte que la série formée avec les valeurs absolues de tous les produits demi-circulaires appartenant à l'élément $A_{\alpha\beta}$ a pour somme une quantité inférieure à

$$S_\beta T_\alpha \cdot \frac{1}{1 - S}.$$

Le théorème est donc démontré.

Il est facile de voir que les lois de multiplication II et III sont applicables aux déterminants de cette classe.

Soient en effet

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\ldots,+\infty}, \qquad B = [B_{ik}]_{i,k,=1,2,\ldots,+\infty}$$

deux tels déterminants et posons

$$C_{ik} = \sum_j A_{ij} B_{jk}, \qquad \overline{C}_{ik} = \sum_j |A_{ij}| \, |B_{jk}|.$$

Des conditions

$$|A_{ij}| \leqq S_i T_j, \quad |B_{jk}| \leqq S_j T_k$$

et de la convergence absolue des produits ΠA_{ii} et ΠB_{ii} il s'ensuit que $\Pi \overline{C}_{ii}$ converge absolument et que, K désignant une constante,

$$|\overline{C}_{ik}| < K S_i T_k. \qquad (i \neq k)$$

Donc le déterminant des C_{ik} appartient à la même classe que A et B et l'on a, en vertu du théorème démontré plus haut (n° 11),

$$AB = C.$$

La démonstration est la même pour la loi III.

Considérons un déterminant

$$A = [A_{ik}]_{i,k=1,2,\ldots,+\infty},$$

dans lequel les éléments dépendent d'un paramètre t de la manière suivante

$$A_{ii} = 1 + t a_{ii}, \qquad A_{ik} = t a_{ik} \qquad (i \neq k)$$

les a_{ik} désignant des constantes vérifiant les conditions

$$|a_{ik}| \leqq S_i T_k \qquad (i,k=1,2,\ldots,+\infty)$$

où les S_i et T_k sont tels que la série

$$S = S_1 T_1 + S_2 T_2 + \ldots$$

converge.

En appliquant à ce déterminant le développement (8) nous aurons

$$A = 1 + A_1 t + A_2 t^2 + \ldots \tag{19}$$

où

$$A_1 = \sum_i a_{ii}, \qquad A_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}, \ldots$$

et d'une manière générale,

$$A_k = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & \cdot\ \cdot & a_{i_1 i_k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{i_k i_1} & \cdot\ \cdot & a_{i_k i_k} \end{vmatrix}.$$

Je dis que la fonction de t ainsi définie est une fonction *entière* de t, c'est à dire que le développement (19) est toujours convergent.

Soit en effet ε une quantité aussi petite qu'on le veut; déterminons l'entier m de telle manière que l'on ait

$$S_{m+1} T_{m+1} + S_{m+2} T_{m+2} + \ldots < \varepsilon$$

et un nombre $K > 1$ suffisamment grand pour que

$$\frac{S_1 T_1 + \ldots + S_m T_m}{K} + S_{m+1} T_{m+1} + S_{m+2} T_{m+2} + \ldots < \varepsilon.$$

Posons

$$(20) \qquad \begin{cases} b_{ik} = \dfrac{a_{ik}}{K} & (\text{pour } i = 1, 2, \ldots, m) \\ b_{ik} = a_{ik} & (\text{pour } i = m+1, m+2, \ldots, +\infty) \\ \overline{S}_i = \dfrac{S_i}{K} & (\text{pour } i = 1, 2, \ldots, m) \\ \overline{S}_i = S_i & (\text{pour } i = m+1, m+2, \ldots, +\infty). \end{cases}$$

Nous aurons

$$|b_{ik}| \leqq \overline{S}_i T_k$$

et

$$\overline{S}_1 T_1 + \overline{S}_2 T_2 + \ldots = \overline{S} < \varepsilon.$$

Or, tout terme du déterminant

$$(21) \qquad \begin{vmatrix} b_{i_1 i_1} & \cdot\ \cdot & b_{i_1 i_k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{i_k i_1} & \cdot\ \cdot & b_{i_k i_k} \end{vmatrix}$$

étant composé d'un certain nombre de facteurs b_{ii} et d'un certain nombre de produits circulaires, on voit que tout terme est inférieur, en valeur absolue, au produit

$$S_{i_1} T_{i_1} S_{i_2} T_{i_2} \ldots S_{i_k} T_{i_k}$$

d'où résulte que la somme des valeurs absolues des $\underline{|k}$ termes du déterminant (21) est inférieure à la quantité

$$\underline{|k} \,.\, S_{i_1} T_{i_1} S_{i_2} T_{i_2} \ldots S_{i_k} T_{i_k}.$$

On a donc

$$\overline{B}_k \leqq \overline{S}^k,$$

$\overline{B}_k$ désignant la somme des valeurs absolues des termes de tous déterminants tels que (21), $i_1 \ldots i_k$ désignant successivement toute combinaison de k nombres de la suite $1, 2, \ldots$

Désignant par $\overline{A}_k$ ce que devient $\overline{B}_k$ quand on y remplace partout les b_{ik} par les a_{ik}, il est clair, d'après les relations (20), que

$$\overline{B}_k \geqq \frac{1}{K^m} \overline{A}_k,$$

d'où

$$|A_k| \leqq K^m \overline{S}^k < K^m \varepsilon^k.$$

Donc la série entière (19) converge pour $|t| < \frac{1}{\varepsilon}$, ce qui montre que cette série est *toujours* convergente.

Il est facile de former des exemples où la fonction entière (19) se réduit soit à une constante, soit à une fonction entière rationnelle de t. Supposons par exemple

$$a_{ik} = \sigma_i \tau_k,$$

les σ_i et τ_k étant tels que la série $\Sigma \sigma_i \tau_i$ converge absolument.

La formule (19) montre immédiatement que l'on a, dans ce cas,

$$A = 1 + t \sum_{1}^{+\infty} {}_i\, \sigma_i \tau_i.$$

En second lieu, prenons

$$A_{ii} = 1, \qquad A_{1i} = \tau_i, \qquad A_{i1} = \sigma_i,$$
$$A_{ij} = 0 \quad (\text{pour } i > 1 \,,\, j > 1 \,,\, i \neq j)$$

de sorte que le déterminant prenne la forme

$$A = \begin{vmatrix} 1 & \tau_2 t & \tau_3 t & \cdot\,\cdot \\ \sigma_2 t & 1 & 0 & \cdot\,\cdot \\ \sigma_3 t & 0 & 1 & \cdot\,\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot \end{vmatrix};$$

nous trouverons

$$A = 1 - t^2 \sum_{2}^{+\infty}{}_i \sigma_i \tau_i .$$

14. En effectuant sur les éléments A_{ik} une substitution multiplicatoire convenable, on peut donner au théorème démontré au numéro précédent une autre forme.

En effet, les A_{ik} remplissant les conditions

$$|A_{ik}| \leqq S_i T_k, \qquad (i \neq k)$$

le déterminant des A_{ik} se change, par la substitution

$$\left| A_{ik}\,,\ A_{ik} \frac{T_i}{T_k} \right|$$

en un déterminant

$$A = [B_{ik}]_{i,\,k=1,\,2,\,..,\,+\infty}$$

dont les éléments remplissent les conditions

$$|B_{ik}| = \left| A_{ik} \frac{T_i}{T_k} \right| \leqq S_i T_i \qquad (i \neq k)$$

d'où ce théorème: [1]

Pour que le déterminant des A_{ik} et tous ses mineurs convergent absolument, il suffit que le produit des éléments diagonaux converge absolument et que les éléments non-diagonaux de chaque ligne soient moindres en valeur absolue que les termes d'une série donnée absolument convergente.

---

[1] Il est clair qu'on peut aussi arriver à ce théorème en supposant, dans l'énoncé précédent (n° 13), que tous les S_i soient égaux à l'unité.

Si ces conditions sont remplies je dirai que le déterminant des A_{ik} est *hypernormal*[1] et j'appellerai la suite des nombres positifs

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

suite majorante de ce déterminant si la série formée par ces nombres converge et que l'on ait (en posant $A_{ii} = 1 + a_{ii}$, $A_{ik} = a_{ik}$)

$$|a_{ik}| < K\alpha_k,$$

K désignant une constante.

On voit immédiatement que les déterminants normaux entrent comme cas particulier dans cette nouvelle classe.

Il est facile d'étendre la plupart des propriétés des déterminants normaux aux déterminants hypernormaux. Quant à la multiplication on peut énoncer ce théorème:

Soient A et B deux déterminants hypernormaux, A ayant la suite majorante

$$(\alpha) \qquad \alpha_1, \alpha_2, \ldots$$

et B ayant la suite majorante

$$(\beta) \qquad \beta_1, \beta_2, \ldots;$$

les lois de multiplication II et III sont applicables à ces déterminants de telle sorte que le produit AB prend la forme d'un déterminant hypernormal ayant la suite majorante (β) ou (α) selon qu'on applique la loi II ou la loi III.

Je n'insisterai plus ici sur les propriétés des déterminants en question. Je me bornerai à énoncer deux propriétés des mineurs d'un tel déterminant qui nous seront utiles dans ce qui suit.

On voit que le mineur

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & m \\ 1 & 2 & \ldots & m \end{pmatrix}$$

---

[1] Un déterminant du type étudié plus haut (n° 13) pouvant être ramené à ce nouveau type par une substitution multiplicatoire, nous le dirons *semblable* à un déterminant hypernormal.

s'approche indéfiniment de l'unité quand m va en croissant. Il en résulte que, parmi les mineurs de Δ, il y en a qui ne sont pas nuls.

Il résulte d'une formule démontrée dans mon travail cité plus haut (*Sur la convergence etc.* p. 15) que l'on a

$$\left|\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\,\cdot & i_k \\ j_1 & \cdot\,\cdot & j_k \end{pmatrix}\right| \leqq \underline{|k}\, \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \,.\,.\, \alpha_{i_k} \,.\, PK^k, \tag{22}$$

$$\left|\begin{pmatrix} h_1 & \cdot\,\cdot & h_p & i_1 & \cdot\,\cdot & i_k \\ h_1 & \cdot\,\cdot & h_p & j_1 & \cdot\,\cdot & j_k \end{pmatrix}\right| \leqq \underline{|k}\, \alpha_{i_1}\alpha_{i_2} \,.\,.\, \alpha_{i_k} \,.\, PK^k, \tag{23}$$

tous les indices étant supposés distincts et P et K ne dépendant ni de k ni des h, i, j.

§ 4. *Application aux systèmes d'ordre infini d'équations différentielles linéaires.*

15. Considérons d'abord un système d'équations linéaires

$$\sum_1^{+\infty}{}_k A_{ik}x_k = 0 \tag{24}$$

le déterminant Δ des A_{ik} étant hypernormal et ayant la suite majorante $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

En se servant d'un raisonnement parfaitement analogue à celui employé dans mon mémoire (Acta mathematica, t. 16) pour le cas des déterminants normaux, on arrive au théorème suivant:

Pour qu'il existe une solution $x_1, x_2, \ldots$ *du système* (24) *autre que* $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, . . *et telle que la série*

$$\sum{}_k \alpha_k x_k \tag{25}$$

converge absolument, il faut que Δ *soit nul.*

Si Δ *s'annule avec tous ses mineurs d'ordre* $1, 2, \ldots, r-1$ *mais, parmi les mineurs d'ordre* r *il y en a un au moins, soit*

$$\begin{pmatrix} i_1 & \cdot\,\cdot & i_r \\ k_1 & \cdot\,\cdot & k_r \end{pmatrix}$$

qui n'est pas nul, l'équation i^{me} *du système* (24) (pour $i = i_1, \ldots, i_r$) *est une conséquence des autres équations du système* (24) *et la solution générale de ce système peut s'écrire sous la forme*

$$\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_r \\ k_1 & \ldots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_r \\ k & k_2 & \ldots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \ldots + \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \ldots & k_{r-1} & k \end{pmatrix} x_{k_r}$$

$x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots, x_{k_r}$ *désignant des constantes arbitraires.*

16. Passons à un système infini d'équations différentielles linéaires de la forme

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_{i1} x_1 + \psi_{i2} x_2 + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, +\infty) \tag{26}$$

où les ψ_{ik} sont des fonctions données de t. Supposons ces fonctions holomorphes dans une région R du plan des t et telles en outre que, pour tout domaine intérieur à R,

$$|\psi_{ik}| \leqq \alpha_i, \tag{27}$$

les α_i étant des nombres positifs formant une série convergente.

Soit t_0 un point à l'intérieur de R de sorte que les ψ_{ik} soient holomorphes dans le voisinage de $t = t_0$.

Dans ces conditions, j'ai démontré le théorème suivant (*Sur les systèmes d'ordre infini d'équations différentielles.* Öfversigt af Kongl. Vet. Ak. Förhandl. Stockholm 1899):

Il existe un système de fonctions (*et un seul*)

$$x_1, x_2, \ldots$$

satisfaisant au système (26), *holomorphes dans le voisinage de* $t = t_0$ *et prenant à ce point les valeurs initiales*

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0, \quad \ldots \tag{28}$$

les x_i^0 *étant supposés tels que la série*

$$x_1^0 + x_2^0 + \ldots$$

converge absolument.

J'ai démontré ce théorème en comparant le système (26) au suivant

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{a_i}{1 - \frac{t}{\rho}}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots), \qquad (i=1,2,\ldots,+\infty) \tag{29}$$

ρ étant pris inférieur au rayon de convergence du développement Taylorien des a_{ik} dans le voisinage de $t = t_0$.

Désignant par

$$\xi_\nu^{(1)}, \xi_\nu^{(2)}, \ldots$$

la solution du système (29) qui vérifie les conditions initiales

$$\xi_\nu^{(i)} = 0 \quad (i \neq \nu); \qquad \xi_\nu^{(\nu)} = 1$$

pour $t = 0$ on a, en posant $\alpha = \sum_\nu \alpha_\nu$

$$\xi_\nu^{(\nu)} = 1 + \frac{a_\nu}{a}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)^{a\rho}} - 1\right),$$

$$\xi_\nu^{(i)} = \frac{a_i}{a}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{t}{\rho}\right)^{a\rho}} - 1\right).$$

Il en résulte que si l'on désigne par

$$x_\nu^{(1)}, x_\nu^{(2)}, \ldots$$

la solution du système (26) satisfaisant aux conditions initiales (pour $t = t_0$)

$$x_\nu^{(i)} = 0 \quad (i \neq \nu), \qquad x_\nu^{(\nu)} = 1 \tag{30}$$

on a, pour $|t - t_0| < \rho$,

$$\left.\begin{aligned} |x_\nu^{(\nu)} - 1| &\leqq \frac{a_\nu}{a}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{|t - t_0|}{\rho}\right)^{a\rho}} - 1\right), \\ |x_\nu^{(i)}| &\leqq \frac{a_i}{a}\left(\frac{1}{\left(1 - \frac{|t - t_0|}{\rho}\right)^{a\rho}} - 1\right). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Comme la solution générale

$$x_1, x_2, \ldots$$

définie par les conditions initiales (pour $t = t_0$)

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0\ , \quad . \ .$$

s'exprime sous la forme

$$x_i = x_1^0 x_1^{(i)} + x_2^0 x_2^{(i)} + \ . \ . \ , \qquad (i=1,2,..,+\infty)$$

on peut dire, par analogie avec les systèmes d'ordre fini, que les solutions

$$(32) \qquad x_\nu^{(1)}\ ,\ x_\nu^{(2)}\ ,\ . \ . \qquad (\nu=1,2,..,+\infty)$$

constituent un *système fondamental d'intégrales* du système (26).

Les formules (31) font voir que le déterminant formé par ces fonctions

$$(33) \qquad \Delta(t) = \begin{vmatrix} x_1^{(1)}\ , & x_1^{(2)}\ , & . \ . \\ x_2^{(1)}\ , & x_2^{(2)}\ , & . \ . \\ . & . & . \ . \end{vmatrix}$$

est hypernormal et a pour suite majorante $\alpha_1\ ,\ \alpha_2\ ,\ . \ .$ tant que t reste dans le domaine

$$|t - t_0| < \rho .$$

De là et du théorème énoncé au n° 15 il résulte que les constantes

$$c_1 = 0, \qquad c_2 = 0\ , \quad . \ .$$

sont les seules pour lesquelles on a identiquement

$$c_1 x_1^{(i)} + c_2 x_2^{(i)} + \ . \ . = 0 \qquad (i=1,2,..,+\infty)$$

et pour lesquelles en outre la série

$$c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \ . \ .$$

converge absolument.

Pour cette raison nous pourrons dire que les solutions du système fondamental (32) sont *linéairement indépendantes.*

Plus généralement, si les solutions

$$y_\nu^{(1)}\ ,\ y_\nu^{(2)}\ ,\ . \ . \qquad (\nu=1,2,..,+\infty)$$

ont pour $t = t_0$ un déterminant hypernormal D qui n'est pas nul, ces solutions sont linéairement indépendantes et la solution définie par les conditions initiales

$$x_1 = x_1^0, \qquad x_2 = x_2^0 \ , \quad . . \quad (\text{pour } t = t_0)$$

(les x_i^0 formant une série absolument convergente) peut s'exprimer linéairement par rapport à ces solutions:

$$x_i = c_1 y_1^{(i)} + c_2 y_2^{(i)} + \ldots$$

En effet, il suffit pour cela de prendre

$$c_k = \frac{D_k}{D},$$

D_k désignant ce que devient D quand on y remplace la colonne formée par les $y_k^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..)$ par celle formée par les x_i^0 $(i = 1, 2, ..)$.

Soit L un chemin passant du point t_0 à un point t' et situé tout entier à l'intérieur de la région R et faisons la continuation analytique des fonctions $x_\nu^{(i)}(t)$ en suivant ce chemin. *Je dis que le déterminant* (33) *ne cesse pas d'être hypernormal et d'avoir la suite majorante* $(\alpha_1, \alpha_2, ..)$.

En effet, choisissons sur L des points

$$t_1, t_2, \ldots, t_{p-1}$$

de telle manière que (posant $t_p = t'$, $\rho_0 = \rho$)

$$|t_\nu - t_{\nu-1}| < \rho_{\nu-1}, \qquad (\nu = 1, 2, .., p)$$

$\rho_{\nu-1}$ désignant le rayon de convergence du développement taylorien des fonctions $\psi_{ik}(t)$ dans le voisinage de $t = t_{\nu-1}$.

Soit

$$x_k^{(1)}(t; t_\nu), \ x_k^{(2)}(t; t_\nu), \ ..$$

la solution du système (26) qui est holomorphe dans le voisinage de $t = t_\nu$ et qui, pour $t = t_\nu$, satisfait aux conditions initiales

$$x_k^{(i)} = 0 \quad (i \neq k), \qquad x_k^{(k)} = 1.$$

Nous savons alors que le déterminant

$$\begin{vmatrix} x_1^{(1)}(t; t_\nu) & , & x_1^{(2)}(t; t_\nu) & , & .. \\ x_2^{(1)}(t; t_\nu) & , & x_2^{(2)}(t; t_\nu) & , & .. \\ . & & . & & .. \end{vmatrix}$$

a la suite majorante $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ tant que

$$|t - t_\nu| < \rho_\nu.$$

Donc chacun des déterminants

$$[x_k^{(i)}(t_\nu ; t_{\nu-1})]_{i,k=1,2,\ldots,+\infty}$$

a cette même propriété.

Or, convenant de désigner par

$$\Big|_{t_0}^{t} f(t)$$

la valeur au point t de la continuation analytique d'une fonction $f(t)$ en suivant le chemin L de t_0 jusqu'à t nous avons

$$\Big|_{t_0}^{t_1} x_k^{(i)}(t ; t_0) = x_k^{(i)}(t_1 ; t_0),$$

$$\Big|_{t_0}^{t_2} x_k^{(i)}(t ; t_0) = \sum_j x_k^{(j)}(t_1 ; t_0) x_j^{(i)}(t_2 ; t_1),$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\Big|_{t_0}^{t_\nu} x_k^{(i)}(t ; t_0) = \sum_j \Big|_{t_0}^{t_{\nu-1}} x_k^{(j)}(t_1 ; t_0) \,.\, x_j^{(i)}(t_\nu ; t_{\nu-1}).$$

Donc, posant pour abréger

$$\Big|_{t_0}^{t'} x_k^{(i)}(t ; t_0) = x_k^{(i)}(t' ; t_0)$$

nous aurons, en vertu du théorème de multiplication

$$[x_k^{(i)}(t')]_{i,k=1,2,\ldots,+\infty} = \prod_{\nu=1}^{p} [x_k^{(i)}(t_\nu ; t_{\nu-1})]_{i,k=1,\ldots,+\infty},$$

ce qui prouve bien que le déterminant formé par les premiers membres est hypernormal et a pour suite majorante $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$.

Supposons maintenant que le chemin L soit fermé $(t' = t_0)$ et embrasse un certain nombre de points singuliers pour les coefficients $\psi_{ik}(t)$. Soit A_{ki} la valeur qu'aquiert au point t_0 la fonction $x_k^{(i)}(t)$ quand t décrit ce chemin. D'après ce que nous venons de voir, le déterminant

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots \\ A_{21} & A_{22} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdots \end{vmatrix}$$

admet la suite majorante $(\alpha_1, \alpha_2, ..)$; autrement dit, en posant

$$A_{ii} = 1 + a_{ii}, \qquad A_{ik} = a_{ik}, \qquad (i \neq k)$$

on a

$$|a_{ik}| < K\alpha_k,$$

K désignant une constante.

Ceci établi, proposons-nous la question s'il existe une solution

$$y_1, y_2, ..$$

du système (26) qui se multiplie par une constante ω quand on fait décrire à t le chemin fermé L; ce qui s'exprime en écrivant

$$\bar{y}_i = \omega y_i, \tag{34}$$

$\bar{u}$ désignant la valeur qu'acquiert une fonction u quand, partant d'un point t voisin de t_0, on y retourne après avoir décrit le chemin L.

Posons

$$y_i = c_1 x_1^{(i)} + c_2 x_2^{(i)} + ..$$

de sorte que c_i désigne la valeur initiale de y_i (pour $t = t_0$) et remarquons que nous avons

$$\bar{x}_k^{(i)} = \Sigma_j A_{kj} x_j^{(i)};$$

nous aurons donc, pourvu que la série

$$c_1 + c_2 + .. \tag{35}$$

converge absolument,

$$\bar{y}_i = \sum_{k,j} c_k A_{kj} x_j^{(i)}$$

la série double du second membre étant absolument convergente tant que l'on a

$$|t - t_0| < \rho.$$

Pour que la condition (34) soit remplie il faut donc que l'on ait, pour toute valeur de t,

$$\Sigma_j x_j^{(i)} b_j = 0 \qquad (i = 1, 2, .., +\infty) \tag{36}$$

où nous avons mis, pour abréger

$$b_j = \omega c_j - \sum_k c_k A_{kj}.$$

La série (35) devant être absolument convergente, il en est de même de la série

$$b_1 + b_2 + \dots$$

Donc, le déterminant du système linéaire (36) n'étant pas nul identiquement, il résulte du théorème enoncé plus haut (n° 15) qu'il faut avoir

$$b_j = 0, \qquad (j=1,2,..,+\infty)$$

c'est-à-dire que les c_k doivent vérifier le système linéaire

$$(37) \qquad \omega c_j - \sum_k c_k A_{kj} = 0. \qquad (j=1,2,..,+\infty)$$

Supposant $\omega \neq 1$ nous pouvons poser

$$\omega - 1 = -\frac{1}{\mu}$$

de sorte que ce système prenne la forme

$$(38) \qquad c_j + \mu \sum_k a_{kj} c_k = 0. \qquad (j=1,2,..,+\infty)$$

Le déterminant de ce système

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu a_{11}, & \mu a_{21}, & \cdots \\ \mu a_{12}, & 1 + \mu a_{22}, & \cdots \\ & & \cdots \end{vmatrix}$$

est hypernormal et possède, pour chaque valeur de μ, la suite majorante $(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$.

Donc, pour que le système (38) admette une solution $c_1, c_2, \dots$ telle que la série (35) converge absolument, il faut et il suffit que μ soit une racine de $\Delta(\mu) = 0$. Donc, pour que le système linéaire (26) admette une solution

$$y_1, y_2, \dots$$

jouissant de la propriété

$$\bar{y}_i = \omega y_i$$

et telle, en outre, que la somme

$$y_1 + y_2 + \cdot\cdot$$

converge absolument pour $t = t_0$, il faut que ω satisfasse à l'équation

$$\Delta\left(\frac{1}{1-\omega}\right) = 0. \tag{39}$$

Cette condition est aussi suffisante. En effet, soit $\omega_1 \neq 1$ une racine de l'équation (39). Supposons d'abord que ce soit une racine *simple*. On sait alors[1] que, parmi les mineurs de Δ du premier ordre, il y a un au moins qui ne s'annule pas pour $\omega = \omega_1$. Désignant par $\alpha_{ik}(\mu)$ les mineurs du premier ordre de $\Delta(\mu)$ et supposant, par exemple,

$$\alpha_{11}\left(\frac{1}{1-\omega_1}\right) \neq 0,$$

on pourra écrire la solution générale du système (38) sous la forme

$$c_k = c \,.\, \alpha_{1k}, \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

c désignant une constante arbitraire.

Or, supposant comme il est permis que la somme

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdot\cdot$$

soit inférieure à l'unité et appliquant la formule (23) onvoit que les valeurs ainsi définies des c_k satisfont aux inégalités

$$|c_k| < K\alpha_k,$$

K désignant une constante.

Donc, si l'on pose

$$y_i = c_1 x_1^{(i)} + c_2 x_2^{(i)} + \cdot\cdot, \tag{40}$$

on est assuré d'avoir des séries absolument convergentes telles que la série

$$y_1 + y_2 + \cdot\cdot$$

converge absolument d'où, a fortiori, on voit que chacune des séries

$$\sum_k \psi_{ik} y_k$$

[1] Ceci résulte, par exemple, de la formule (10) de mon travail cité plus haut: *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini.*

converge absolument. Comme on a de plus

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_k \psi_{ik} y_k$$

la formule (40) définit bien une solution du système (26) jouissant de la propriété

$$\bar{y}_i = \omega_1 y_i.$$

Dans le cas d'une racine multiple ω_1 d'ordre k on trouvera k solutions linéairement indépendantes qui pourront être rangés en sous-groupes comme dans le cas correspondant d'un système linéaire d'ordre n.

Comme $\omega = 1$ est un point singulier du premier membre de l'équation (39) (sauf dans le cas où Δ se réduit à une constante) on voit que la recherche des intégrales qui restent uniformes dans la partie considérée du plan échappe à la méthode précédente et exige une étude spéciale. Pour $\omega = 1$ le système (37) se réduit à un système

$$\sum_k a_{kj} c_k = 0 \qquad (j=1, 2, .., +\infty) \tag{41}$$

dont le déterminant n'est pas absolument convergent; on arrive donc à cette conclusion, paradoxale au premier abord, que la recherche des intégrales uniformes du système (26) conduit à des difficultés plus graves que la recherche des intégrales non-uniformes jouissant de la propriété (34).

17. Sans insister ici sur ces questions que je n'ai pu qu'aborder dans ce travail, je considérerai l'exemple le plus simple pour éclaircir les résultats obtenus.

Soit

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\psi_i}{1-t}(x_1 + x_2 + ..) \qquad (i=1, 2, .., +\infty) \tag{42}$$

le système proposé, les ψ_i étant des constantes formant une série absolument convergente

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 + \ldots$$

Supposons d'abord $\psi \neq 0$. En posant

$$\begin{aligned} x_\nu^{(\nu)} &= 1 + \frac{\psi_\nu}{\psi}\left[\frac{1}{(1-t)^\psi} - 1\right], \\ x_\nu^{(\mu)} &= \phantom{1 +{}} \frac{\psi_\mu}{\psi}\left[\frac{1}{(1-t)^\psi} - 1\right], \qquad (\mu \neq \nu) \end{aligned} \tag{43}$$

on a une solution

$$x_\nu^{(1)}\,,\; x_\nu^{(2)}\,,\; \ldots$$

du système (42) satisfaisant aux conditions initiales

$$x_\nu^{(\nu)} = 1\,, \qquad x_\nu^{(\mu)} = 0 \quad (\text{pour } t = 0)$$

d'où l'on voit que la solution générale

$$x_1\,,\; x_2\,,\; \ldots$$

définie par les conditions initiales

$$x_i = x_i^0 \quad (\text{pour } t = 0)$$

peut s'exprimer ainsi

$$x_i = x_1^0 x_1^{(i)} + x_2^0 x_2^{(i)} + \ldots$$

ou bien

$$x_i = x_i^0 + \frac{\psi_i}{\psi}\left[\frac{1}{(1-t)^\psi} - 1\right]\Sigma_\nu x_\nu^0\,. \tag{44}$$

Soit L une circonférence décrite du point $t = 1$ comme centre et passant par le point $t = 0$. On aura, en faisant décrire à t le chemin L dans le sens positif,

$$\bar{x}_\nu^{(\nu)} = 1 + \frac{\psi_\nu}{\psi}\left[\frac{e^{-2\pi i\psi}}{(1-t)^\psi} - 1\right],$$

$$\bar{x}_\nu^{(\mu)} = \qquad \frac{\psi_\mu}{\psi}\left[\frac{e^{-2\pi i\psi}}{(1-t)^\psi} - 1\right];$$

donc nons avons dans ce cas

$$A_{\nu\nu} = 1 + \frac{\psi_\nu}{\psi}(e^{-2\pi i\psi} - 1),$$

$$A_{\mu\nu} = \qquad \frac{\psi_\mu}{\psi}(e^{-2\pi i\psi} - 1)$$

et la valeur du déterminant $\Delta\left(\frac{1}{1-\omega}\right)$ est la suivante

$$\Delta\left(\frac{1}{1-\omega}\right) = 1 - \frac{1 - e^{-2\pi i\psi}}{1-\omega}\,.$$

L'équation (39) n'a donc ici qu'une seule racine savoir

$$\omega = e^{-2\pi i \psi};$$

et, comme on voit facilement que les mineurs du déterminant $\Delta(\mu)$ appartenant à une ligne quelconque sont proportionnels aux quantités

$$\psi_1, \psi_2, \ldots$$

la solution la plus générale du système

$$c_j + \frac{1}{1-\omega} \sum_k a_{kj} c_k = 0,$$

$$\left(a_{kj} = \frac{\psi_j}{\psi} (e^{-2\pi i \psi} - 1)\right),$$

telle que la série Σc_j converge absolument, peut s'écrire sous la forme

$$c_k = c\psi_k,$$

c désignant une constante arbitraire.

Donc la seule solution du système différentiel (42) qui se multiplie par une constante quand t tourne autour du point $t = 1$ est la suivante

$$x_i = \frac{c\psi_i}{(1-t)^{\psi}}. \qquad (i=1, 2, \ldots, +\infty)$$

Pour trouver les solutions uniformes il faut résoudre le système (41) qui dans le cas considéré se réduit à une seule équation savoir

$$\sum_k c_k = 0.$$

Les c_k étant assujettis à cette condition, si l'on forme la solution $x_1, x_2, \ldots$ qui satisfait aux conditions initiales

$$x_i = c_i \quad \text{pour } t = 0,$$

la formule (44) montre que l'on a, pour toute valeur de t,

$$x_i = c_i.$$

Donc, en dehors de cette solution constante, il n'y pas de solution uniforme du système (42).

Nous supposions plus haut $\psi \neq 0$. Prenons maintenant le cas

$$\psi = 0.$$

Alors on trouve que la solution du système (42) qui est définie par les conditions initiales

$$x_\nu^{(\nu)} = 1, \qquad x_\nu^{(\mu)} = 0 \quad (\text{pour } t = 0)$$

peut s'écrire ainsi

$$x_\nu^{(\nu)} = 1 - \psi_\nu \log(1 - t),$$
$$x_\nu^{(\mu)} = \quad - \psi_\mu \log(1 - t).$$

On a donc

$$A_{\nu\nu} = 1 + \psi_\nu \,.\, 2\pi i,$$
$$A_{\mu\nu} = \qquad \psi_\mu \,.\, 2\pi i,$$

Il en résulte que le déterminant Δ se réduit dans ce cas à une constante, à savoir *l'unité*.

Donc il n'y a pas de solution du système (42) qui se multiplie par une constante ω $(\omega \neq 1)$ quand t tourne autour du point $t = 1$.

Quant aux solutions uniformes, on voit comme dans le cas $\psi \neq 0$ que

$$x_i = c_i \quad (\Sigma c_i = 0)$$

est la solution uniforme la plus générale.

Par analogie avec les équations linéaires d'ordre fini, on prévoit que dans le cas considéré, la solution générale doit présenter une singularité logarithmique dans le voisinage de $t = 1$. C'est aussi ce qui a lieu, la solution générale pouvant s'écrire sous la forme

$$x_i = c_i - \psi_i \,.\, \Sigma_k c_k \,.\, \log(1 - t),$$

les c_k désignant des constantes arbitraires.

Par ce qui précède on voit que la théorie classique des équations différentielles linéaires fondée par M. Fuchs peut, dans certaines conditions, être généralisée au cas d'un système d'ordre infini.

Pour voir l'utilité et même la nécessité de cette généralisation, il suffit de remarquer que la recherche des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles conduit, dans des cas étendus, à des systèmes différentiels d'ordre infini appartenant au type considéré plus haut. [1]

[1] Voir, par exemple, l'équation (A) considérée dans mon travail cité plus haut (*Sur les systèmes d'ordre infini d'équations différentielles*).