

ÜBER DIE REDUCTION DER BINÄREN QUADRATISCHEN FORMEN
MIT COMPLEXEN COEFFICIENTEN UND VARIABLEN

VON

JULIUS HURWITZ

in BASEL.

In meiner Dissertation (Halle a. S. 1895) habe ich eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung complexer Grössen behandelt.¹ Diese Art der Kettenbruch-Entwicklung habe ich dann in meiner (nicht gedruckten) Habilitationsschrift für die Reduction der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Variablen in ähnlicher Weise verwendet, wie die Kettenbruch-Entwicklungen reeller Grössen für die Reduction der reellen quadratischen Formen positiver Determinante benutzt werden. Ich erlaube mir nun im Folgenden die Habilitationsschrift zu veröffentlichen und ihr zur Vervollständigung das Erforderliche aus meiner Dissertation voranzuschicken.

¹ Diese Kettenbruch-Entwicklung schliesst sich eng an die in diesem Journal erschienenen zwei Abhandlungen des Herrn A. HURWITZ (Zürich) an:

1. *Über die Entwicklung complexer Grössen in Kettenbrüche.* Bd. 11.
2. *Über eine besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung reeller Grössen.* Bd. 12.

I. ABSCHNITT.

Besondere Art der Kettenbruch-Entwicklung complexer Grössen.

§ 1. *Kettenbruch-Entwicklung erster Art.*

Durch die Geraden:

$$x + y = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

$$x - y = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

zerlege ich die Ebene der complexen Zahlen in unendlich viele Quadrate. Die Mittelpunkte dieser Quadrate sind die Repräsentanten der durch $(1 + i)$ teilbaren complexen ganzen Zahlen, die Eckpunkte der Quadrate diejenigen aller nicht durch $(1 + i)$ teilbaren complexen ganzen Zahlen.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise werde ich die complexe Zahl auch zur Bezeichnung des die Zahl repräsentirenden Punktes und umgekehrt verwenden und ferner jedes Quadrat nach seiner Mittelpunktszahl benennen. Das Quadrat a bezeichne ich auch durch Q_a .

Q_0 nenne ich das Anfangs-Quadrat und theile die übrigen Quadrate in acht Typen ein, wie folgt:

Typus $(1 + i)$: alle zwischen $x - y = 1$ und $x - y = -1$ befindlichen Quadrate $k(1 + i)$, $k = +1, +2, +3, \dots$

Typus $(-1 - i)$: alle zwischen denselben Geraden befindlichen Quadrate $k(1 + i)$, $k = -1, -2, -3, \dots$

Typus $(1 - i)$: alle zwischen $x + y = 1$ und $x + y = -1$ befindlichen Quadrate $k(1 - i)$, $k = +1, +2, +3, \dots$

Typus $(-1 + i)$: alle zwischen denselben Geraden befindlichen Quadrate $k(1 - i)$, $k = -1, -2, -3, \dots$

Betrachtet man das durch die bisher charakterisirten Quadrate gebildete Flächenstück als Achsenkreuz, so bleiben noch die Quadrate in den Quadranten übrig, nämlich:

Typus (2): alle Quadrate des Quadranten zwischen

$$x - y = + 1 \quad \text{und} \quad x + y = + 1.$$

Typus (— 2): alle Quadrate des Quadranten zwischen

$$x - y = - 1 \quad \text{und} \quad x + y = - 1.$$

Typus (2i): alle Quadrate des Quadranten zwischen

$$x - y = - 1 \quad \text{und} \quad x + y = + 1.$$

Typus (— 2i): alle Quadrate des Quadranten zwischen

$$x - y = + 1 \quad \text{und} \quad x + y = - 1.$$

Über die Begrenzung der Quadrate setze ich folgendes fest:

Zum Anfangsquadrate sind alle vier Seiten zu rechnen.

Zu jedem Quadrate der vier ersten Typen sind drei Seiten zu rechnen, und zwar ist stets die Seite von der Begrenzung auszuschliessen, welche die zwei Eckzahlen vom kleinsten absoluten Betrag unter den vier Eckzahlen verbindet.¹

Zu jedem Quadrate der vier letzten Typen sollen die zwei Seiten gerechnet werden, welche sich in derjenigen Eckzahl schneiden, die den grössten absoluten Betrag im Quadrate aufweist.

Wenn wir noch jede Eckzahl zu dem Quadrate rechnen, welchem die beiden Seiten angehören, deren Schnitt die Eckzahl ist, so haben wir durch diese Festsetzungen erreicht, dass jede Zahl der Ebene einem ganz bestimmten Quadrate angehört.

Ich ordne nun jeder nicht ganzzahlig complexen Zahl x_0 die Mittelpunktszahl a_0 des Quadrates zu, dem x_0 angehört; jede complexe ganze

¹ Die zu einem Quadrate gehörige Begrenzung ist in der Figur 1 dadurch kenntlich gemacht, dass die zugehörigen Seiten zusammenhängend und von den nicht zugehörigen getrennt gezeichnet sind.

Zahl aber sei sich selbst zugeordnet. Bildet man nun, von einer beliebigen complexen Zahl x_0 ausgehend, die Gleichungskette:

$$(1) \quad x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad \dots, \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \dots,$$

wo allgemein a_n die complexe ganze Zahl bedeutet, welche x_n zugeordnet ist, so ergibt sich aus dieser Gleichungskette die Kettenbruch-Entwicklung:

$$x_0 = a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 \dots}},$$

die abgekürzt auch durch:

$$(a_0, a_1, a_2, \dots)$$

bezeichnet werde.

Diese Kettenbruch-Entwicklung bezeichne ich als Entwicklung *erster Art* zum Unterschiede von einer mit ihr aufs engste zusammenhängenden zweiten Entwicklungsart, welche an späterer Stelle zur Besprechung gelangen wird.

§ 2. *Associirte und conjugirte Zahlen.*

Die unserm Entwicklungsverfahren zu Grunde gelegte Einteilung der complexen Zahlen-Ebene besitzt vier Symmetrie-Achsen, nämlich das Geraden-Paar $x=0$, $y=0$ und das Geraden-Paar $x=y$, $x=-y$. Hieraus folgt, dass wenn wir die ganze Ebene um den Punkt 0 drehen, die Einteilung in sich übergeht, falls die Drehung ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ beträgt.

Eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ entspricht, je nach dem Sinne der Drehung, einer Multiplication aller Zahlen mit i oder $-i$; drehen wir daher die Ebene, etwa in dem der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzten Sinne, um den Nullpunkt, nach einander um $\frac{\pi}{2}$, π , $\frac{3\pi}{2}$, so geht jede Zahl x_0 nach einander über in ihre drei associirten Zahlen ix_0 , $-x_0$, $-ix_0$.

Um die Eigenschaften unsrer Entwicklungsart zu untersuchen, genügt es demnach, dieselben für die Zahlen zweier Typen festzustellen, denn aus diesen lassen sich sofort die Eigenschaften für die Zahlen der associirten Typen ableiten.

Ist z. B. $x_r = a_r - \frac{1}{x_{r+1}}$ eine Gleichung der Gleichungskette (1), so bestehen mit ihr zugleich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} ix_r &= ia_r - \frac{1}{-ix_{r+1}}, \\ -x_r &= -a_r - \frac{1}{-x_{r+1}}, \\ -ix_r &= -ia_r - \frac{1}{ix_{r+1}}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt weiter, dass mit der Kettenbruch-Entwicklung einer Zahl x_0 :

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, x_{n+1})$$

auch die Entwicklungen der associirten Zahlen:

$$\begin{aligned} ix_0 &= (ia_0, -ia_1, ia_2, -ia_3, \dots, (-1)^{n+1}ix_{n+1}), \\ -x_0 &= (-a_0, -a_1, -a_2, -a_3, \dots, -x_{n+1}), \\ -ix_0 &= (-ia_0, ia_1, -ia_2, ia_3, \dots, (-1)^n ix_{n+1}) \end{aligned}$$

bekannt sind.

Wir werden im Folgenden die Discussion stets an Zahlen der Typen (1 + i) und (2) knüpfen.

Aus dem Umstande, dass die Achse der reellen Zahlen eine Symmetrielinie der Einteilung ist, folgt, dass falls x_r dem Quadrate a_r angehört, \bar{x}_r dem Quadrate \bar{a}_r angehört, wo \bar{x} die zu x conjugirte Zahl bezeichnen soll.

Lautet daher die Entwicklung von x_0 :

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x_{n+1}),$$

so lautet die Entwicklung der conjugirten Zahl \bar{x}_0 :

$$\bar{x}_0 = (\bar{a}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n, \bar{x}_{n+1}).$$

§ 3. Folgesetze für die Teilnenner.

Ist $x_r = a_r - \frac{1}{x_{r+1}}$ eine Gleichung der Gleichungskette (1), so gehört der Punkt x_r dem Quadrate a_r an, und wir finden, von x_r ausgehend, den

Punkt x_{r+1} , wie folgt. Wir bringen das Quadrat a_r mit dem Anfangs-
quadrat zur Deckung, indem wir Q_{a_r} ohne Drehung so verschieben, dass
der Mittelpunkt a_r längs der Verbindungsgeraden $\overline{0, a_r}$ gleitet. Der Punkt
 x_r fällt dadurch im Quadrate o auf den Punkt $x_r - a_r = -\frac{1}{x_{r+1}}$. Durch
Transformation des so erhaltenen Punktes nach reciproken Radien und
darauf folgende Spiegelung an der Achse der imaginären Zahlen gelangen
wir nun zum Punkte x_{r+1} .

Da $-\frac{1}{x_{r+1}}$ für alle Werte von r stets dem Quadrate o angehört, so
ergibt sich zunächst, dass die Grössen x_1, x_2, \dots sämtlich in denjenigen
sich ins Unendliche erstreckenden Teil der Ebene fallen, welcher von den
über den Seiten von Q_0 als Durchmesser nach aussen beschriebenen Halb-
kreisen begrenzt wird, diese vier Halbkreise, ohne die Einheitspunkte, als
Begrenzung mitgerechnet.

Wir wollen zur Abkürzung die erwähnten vier Halbkreise, ohne die
Einheitspunkte, mit $B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}$ und die diese zu Vollkreisen
ergänzenden Halbkreise mit $B_{1+i}^0, B_{1-i}^0, B_{-1+i}^0, B_{-1-i}^0$ bezeichnen.

Die Grössen x_1, x_2, x_3, \dots werde ich zur Abkürzung bisweilen auch
als »Reste« der Kettenbruch Entwicklung von x_0 bezeichnen.

Der von $B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}$ begrenzte, sich ins Unendliche er-
streckende Teil der Ebene werde der »Raum R « genannt.

Nach Obigem können wir jetzt sagen:

*Die Reste der Kettenbruch-Entwicklung erster Art einer Grösse x_0 ge-
hören sämtlich dem Raume R an; die Reste sind daher sämtlich absolut
genommen > 1 .*

Auf die Begrenzungsbogen des Raumes R fällt eine Grösse x_{r+1} dann
und nur dann, wenn die vorhergehende Grösse x_r auf der Seite eines Qua-
drates liegt. Ist nun x_r eine dem Raume R angehörende Grösse und
gehört:

- 1) a_r dem Typus $(1 + i)$ an, so kann $-\frac{1}{x_{r+1}}$ nicht auf Seite $\overline{-1, -i}$
des Anfangsquadrates und daher x_{r+1} nicht auf B_{1-i} fallen;
- 2) a_r dem Typus (2) an, so kann $-\frac{1}{x_{r+1}}$ nicht auf die Seiten $\overline{-1, i}$
und $\overline{-1, -i}$ des Anfangsquadrates und daher x_{r+1} nicht auf
 B_{1+i} und B_{1-i} fallen.

Hieraus erhalten wir, unter Berücksichtigung der im vorigen Paragraphen angestellten Betrachtungen, das

Folgegesetz A:

Ist a_r vom Typus: $(1+i)$ $(-1+i)$ $(-1-i)$ $(1-i)$ (2) $(2i)$ (-2) $(-2i)$

so kann x_{r+1} nicht $\left\{ \begin{array}{cccccccc} B_{1-i} & B_{-1-i} & B_{-1+i} & B_{1+i} & B_{1+i} & B_{1-i} & B_{-1-i} & B_{-1+i} \\ \text{liegen auf:} & & & & B_{1-i} & B_{-1-i} & B_{-1+i} & B_{1+i} \end{array} \right.$

Umgekehrt folgt aus dieser Tabelle, dass wenn:

x_{r+1} liegt auf: $\frac{B_{1+i}}{\quad} \frac{B_{1-i}}{\quad} \frac{B_{-1-i}}{\quad} \frac{B_{-1+i}}{\quad}$
 a_r nicht den Typen: $\left\{ \begin{array}{cccc} 1-i & 1+i & -1+i & -1-i \\ 2 & 2 & -2 & -2 \\ -2i & 2i & 2i & -2i \end{array} \right.$

angehören kann.

Eine weitere Beschränkung für die Teilnenner ergibt sich aus dem Umstande, dass die Quadrate $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ nur zu je einem Teile dem Raume R angehören.

Gehört etwa x_r ($r \neq 0$) dem Quadrate $1+i$ an, so fällt $-\frac{1}{x_{r+1}}$ nicht in den Teil des Anfangsquadrats, der von Seite $\overline{-1, -i}$ und Halbkreis B_{-1-i}^0 begrenzt wird. Hieraus folgt, dass x_{r+1} keinem Quadrate der Typen (2) , $(1-i)$, $(-2i)$ angehören, a_{r+1} also keine Zahl dieser Typen sein kann. Es ergibt sich so das

Folgegesetz B: ($r \neq 0$)

Ist $a_r = 1+i$; so a_{r+1} nicht Typen: (2) , $(1-i)$, $(-2i)$

$a_r = -1+i$; » a_{r+1} » » $(-2i)$, $(-1-i)$, (-2)

$a_r = -1-i$; » a_{r+1} » » (-2) , $(-1+i)$, $(2i)$

$a_r = 1-i$; » a_{r+1} » » $(2i)$, $(1+i)$, (2)

Es erweist sich als zweckmässig, die Entwicklungen solcher Grössen, welche auf einem der Bogen B_{1+i} , B_{1-i} , B_{-1+i} , B_{-1-i} , oder auf einer der Geraden $x-y = \pm 1$, $x+y = \pm 1$ liegen, von den übrigen gesondert

zu betrachten. Wir wollen zur Abkürzung die Entwicklung einer auf einem der Bogen B liegenden Zahl als B -Entwicklung, die Entwicklung einer auf einer der bezeichneten vier Geraden liegenden Zahl als G -Entwicklung bezeichnen.

Die nachfolgende Tabelle giebt eine Übersicht der bei einer B - oder G -Entwicklung auftretenden Folgen:

	x_0 auf:	$a_0 =$	$a_1 =$	$a_2 =$	$a_3 =$	$a_4 =$...	x_{n+1} auf:
(α_1)	B_{1+i}	$1+i$	$k_1(1+i)$	$-1-i$	$k'_1(1+i)$	$1+i$...	B_{1+i} falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ B_{-1-i} » $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ $x-y=1$ » $n+1 \equiv 1 \pmod{4}$ $x-y=-1$ » $n+1 \equiv 3 \pmod{4}$
(α_2)	B_{-1-i}	$-1-i$	$k_2(1+i)$	$1+i$	$k'_2(1+i)$	$-1-i$...	B_{-1-i} falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ B_{1+i} » $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ $x-y=-1$ » $n+1 \equiv 1 \pmod{4}$ $x-y=1$ » $n+1 \equiv 3 \pmod{4}$
(α_3)	B_{1-i}	$1-i$	$k_3(1-i)$	$-1+i$	$k'_3(1-i)$	$1-i$...	B_{1-i} falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ B_{-1+i} » $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ $x+y=-1$ » $n+1 \equiv 1 \pmod{4}$ $x+y=1$ » $n+1 \equiv 3 \pmod{4}$
(α_4)	B_{-1+i}	$-1+i$	$k_4(1-i)$	$1-i$	$k'_4(1-i)$	$-1+i$...	B_{-1+i} falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ B_{1-i} » $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ $x+y=1$ » $n+1 \equiv 1 \pmod{4}$ $x+y=-1$ » $n+1 \equiv 3 \pmod{4}$
(α_5)	$x-y=1$	$k_5(1+i)$	$-1-i$	$k'_5(1+i)$	$1+i$	$k''_5(1+i)$...	$x-y=1$ falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ $x-y=-1$ » $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ B_{-1-i} » $n+1 \equiv 1 \pmod{4}$ B_{1+i} » $n+1 \equiv 3 \pmod{4}$
(α_6)	$x-y=-1$	$k_6(1+i)$	$1+i$	$k'_6(1+i)$	$-1-i$	$k''_6(1+i)$...	$x-y=-1$ falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ $x-y=1$ » $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ B_{1+i} » $n+1 \equiv 1 \pmod{4}$ B_{-1-i} » $n+1 \equiv 3 \pmod{4}$
(α_7)	$x+y=1$	$k_7(1-i)$	$-1+i$	$k'_7(1-i)$	$1-i$	$k''_7(1-i)$...	$x+y=1$ falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ $x+y=-1$ » $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ B_{-1+i} » $n+1 \equiv 1 \pmod{4}$ B_{1-i} » $n+1 \equiv 3 \pmod{4}$
(α_8)	$x+y=-1$	$k_8(1-i)$	$1-i$	$k'_8(1-i)$	$-1+i$	$k''_8(1-i)$...	$x+y=-1$ falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ $x+y=1$ » $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ B_{1-i} » $n+1 \equiv 1 \pmod{4}$ B_{-1+i} » $n+1 \equiv 3 \pmod{4}$

k_i, k'_i, k''_i , bedeuten in dieser Übersicht Zahlen der Reihe $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \dots$; k_5, k_6, k_7, k_8 können auch null sein.

§ 4. Entscheidung, ob ein vorgelegter Kettenbruch eine Entwicklung erster Art ist.

Die Frage, ob ein vorgelegter Kettenbruch:

$$(2) \quad (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n, x_{n+1}),$$

dessen Wert eingerichtet x_0 sei, die Entwicklung erster Art der Grösse x_0 ist, lässt sich mit Hülfe der folgenden Sätze beantworten.

I. *Stimmt die Aufeinanderfolge der Teilnenner des Kettenbruchs (2) mit einer der Folgen (α_i) überein, so stellt der Kettenbruch eine B- bezgl. G-Entwicklung dar, wenn x_{n+1} die bei der Folge (α_i) angegebene Bedingung erfüllt.*

Beweis: Wir zeigen, dass dieser Satz für $n+2$ Grössen $b_0, b_1, \dots, b_n, x_{n+1}$ gültig ist, wenn wir seine Gültigkeit für $n+1$ Grössen $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, x_n$ voraussetzen. Da er für 2 Grössen (b_0, x_1) leicht als richtig erkannt wird, so folgt dann seine allgemeine Gültigkeit.

Wir ersetzen in der Gleichung:

$$(2) \quad x_0 = (b_0, b_1, \dots, b_n, x_{n+1}),$$

$$b_n - \frac{1}{x_{n+1}} \text{ durch } x_n,$$

dadurch geht dieselbe über in:

$$(3) \quad x_0 = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, x_n)$$

und in dieser Gleichung erfüllt nun x_n ebenfalls die Bedingung unsres Satzes. Denn nehmen wir etwa an, dass die rechte Seite der Gleichung (2) mit der Folge (α_1) übereinstimmt, so liegt x_{n+1} auf B_{1+i} , falls $n+1 \equiv 0 \pmod{4}$ ist, und b_n ist eine Zahl vom Typus $(1+i)$ oder $(-1-i)$; daher fällt $-\frac{1}{x_{n+1}}$ auf Seite $\overline{-1, i}$ des Quadrates 0 und

$b_n - \frac{1}{x_{n+1}} = x_n$, [wo $n \equiv 3 \pmod{4}$], auf $x - y = -1$, wie erforderlich.

Ist $n + 1 \equiv 1 \pmod{4}$, also $n \equiv 0 \pmod{4}$, so liegt x_{n+1} auf $x - y = 1$ und b_n ist $= 1 + i$, daher $b_n - \frac{1}{x_{n+1}}$ auf B_{1+i} , wie erforderlich.

Analog erledigen sich die übrigen Möglichkeiten.

Nehmen wir nun an, dass die Gleichung (3) eine B - bezgl. G -Entwicklung darstellt, so ergibt sich, da b_n die x_n zugeordnete Zahl ist, aus (3), durch die Substitution $x_n = b_n - \frac{1}{x_{n+1}}$, dass auch die Gleichung (2) eine B - bezgl. G -Entwicklung darstellt.

II_a. *Es sei*

$$(4) \quad x_0 = (b_0, b_1, \dots, b_n, y_{n+1})$$

ein beliebiger Kettenbruch, von dem vorausgesetzt wird, dass:

$$b_0, b_1, \dots, b_n \text{ sämtlich } \equiv 0 \pmod{1 + i}$$

$$b_1, \dots, b_n \text{ von null verschieden}$$

sind und die Aufeinanderfolge der Teilnenner b_1, \dots, b_n dem Folgegesetz (B) genügt.

Setzen wir:

$$y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}, \quad y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n}, \quad \dots, \quad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \quad x_0 = b_0 - \frac{1}{y_1},$$

so gehören $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ dem Raume R an, wenn y_{n+1} und y_n dem Raume R angehören.

Beweis: Da y_n dem Raume R angehört, so gehört $-\frac{1}{y_n}$ dem Quadrate 0 an, und daher liegt $b_{n-1} - \frac{1}{y_n} = y_{n-1}$ sicher im Raume R , falls b_{n-1} nicht eine der Zahlen $1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i$ ist.

Ist aber $b_{n-1} = 1 + i$, auf welchen Fall wir uns der Symmetrie wegen beschränken können, so kann b_n nicht den Typen (2), $(1 - i)$, $(-2i)$ angehören, $b_n - \frac{1}{y_{n+1}} = y_n$ muss daher einem Quadrate der übrigen Typen angehören. Hieraus folgt, dass $-\frac{1}{y_n}$ nicht ins Innere des Teils vom Quadrate 0 fallen kann, der durch Seite $\overline{-1, -i}$ und Halbkreis B_{-1-i}^0

begrenzt wird; $y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n} = 1 + i - \frac{1}{y_n}$ fällt daher in den Teil des Quadrats $1 + i$, der dem Raume R angehört.

Da nun y_n und y_{n-1} dem Raume R angehören, so folgt in analoger Weise, dass auch y_{n-2} dem Raume R angehört. So fortfahrend, rückwärts zu schliessen, gelangen wir schliesslich bis zu y_1 , d. h. zum vollständigen Nachweis unserer Behauptung.

II_b. *Unter den Voraussetzungen des Satzes II_a fallen $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ weder auf einen der Bogen $B_{1 \pm i}, B_{-1 \pm i}$, noch auf eine der Geraden $x \pm y = \pm 1$, wenn y_{n+1} nicht auf einem dieser Bogen oder auf einer dieser Geraden liegt.*

Beweis: Da $-\frac{1}{y_{n+1}}$ weder auf die Seiten des Quadrats 0 , noch auf die Halbkreise $B_{1+i}^0, B_{1-i}^0, B_{-1+i}^0, B_{-1-i}^0$ fällt, so liegt $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ weder auf einem der Bogen $B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}$, noch auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$. Hieraus folgt analog, dass für y_{n-1} das Gleiche gilt u. s. f. bis zu y_1 .

III. *Es sei*

$$(4) \quad x_0 = (b_0, b_1, \dots, b_n, y_{n+1})$$

ein beliebiger Kettenbruch, dessen Teilnenner folgende Bedingungen erfüllen:

$$b_0, b_1, \dots, b_n \text{ sind sämmtlich } \equiv 0 \pmod{1 + i},$$

$$b_1, \dots, b_n \text{ sind von null verschieden,}$$

die Folge b_1, \dots, b_n genügt dem Gesetze (B).

Wenn dann y_{n+1} weder auf einem der Bogen $B_{1 \pm i}, B_{-1 \pm i}$, noch auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt und $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ und y_{n+1} dem Raume R angehören, so stellt die Gleichung (4) die Entwicklung erster Art der Grösse x_0 dar.

Beweis: Es werde gesetzt:

$$y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n}, \quad \dots, \quad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \quad x_0 = b_0 - \frac{1}{y_1}.$$

Da nach Voraussetzung und II_b : y_{n+1}, y_n, \dots, y_2 weder auf einen der im Satze bezeichneten Bogen noch auf eine der Geraden fallen, so liegen $-\frac{1}{y_{n+1}}, -\frac{1}{y_n}, \dots, -\frac{1}{y_2}$ im Innern des Quadrats \circ ; da ferner nach II_a , ebenso wie y_n , auch $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ dem Raume R angehören, so sind $b_n, b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1$ die diesen Grössen nach dem Entwicklungsverfahren erster Art zugeordneten Zahlen. Nach Satz II_b folgt ferner, dass $-\frac{1}{y_1}$ ins Innere des Quadrats \circ fällt, und daher ist auch b_0 die x_0 zugeordnete Zahl.

Die Gleichungskette:

$$y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}, \quad y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n}, \quad \dots, \quad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \quad x_0 = b_0 - \frac{1}{y_1}$$

ist demnach identisch mit der sich durch den Entwicklungsansatz erster Art für x_0 in umgekehrter Reihenfolge ergebenden Kette von Gleichungen.

IV. *Es sei wieder:*

$$(5) \quad x_0 = (b_0, b_1, \dots, b_n, y_{n+1})$$

ein Kettenbruch, dessen Teilnenner die Bedingungen erfüllen:

$$b_0, b_1, \dots, b_n \text{ sind sämtlich } \equiv 0 \pmod{1+i},$$

$$b_1, \dots, b_n \text{ sind von null verschieden,}$$

die Folge b_1, \dots, b_n genügt dem Gesetze (B).

Existirt ein Index r , der der Reihe $1, 2, \dots, n$ angehört, so dass die Folge $(b_r, b_{r+1}, \dots, y_{n+1}) = y_r$ eine B - oder G -Entwicklung darstellt, und ist r der kleinste Index dieser Art, so ersetzen wir in (5) die Folge $(b_r, b_{r+1}, \dots, y_{n+1})$ durch ihren Wert y_r . Wir wollen dann für y_r wieder y_{n+1} geschrieben denken, so dass, wenn wir nach Gleichung (5):

$$x_0 = b_0 - \frac{1}{y_1}, \quad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \quad \dots, \quad y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$$

setzen, y_{n+1} die erste der Grössen $x_0, y_1, \dots, y_n, y_{n+1}$ ist, welche auf einem der Bogen B_{1+i}, B_{-1+i} oder auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt.¹

¹ Ist der Index $r = 1$, so hat man $x_0 = (b_0, y_1)$; die folgenden Sätze IV_a und IV_b bleiben bestehen; doch braucht x_0 nicht dem Raume R anzugehören.

IV_a. *Liegt unter obigen Voraussetzungen y_{n+1} auf einem der Bogen $B_{1\pm i}, B_{-1\pm i}$, so stellt die Gleichung (5) die Entwicklung erster Art der Grösse x_0 dar, wenn y_{n+1} und b_n das Folgegesetz (A) erfüllen.*

Beweis: Da $-\frac{1}{y_{n+1}}$ auf einer Seite des Quadrates \circ liegt, so gehört $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ dem Raume R an. Da also y_{n+1} und y_n dem Raume R angehören, so folgt nach Satz II, dass auch $y_{n-1}, y_{n-2}, \dots, y_1$ dem Raume R angehören.

Es möge y_{n+1} etwa auf B_{1+i} , also $-\frac{1}{y_{n+1}}$ auf Seite $\overline{-1, i}$ von Q_0 fallen; dann kann, wegen des Folgegesetzes (A), b_n nicht den Typen $(1-i)$, (2) , $(-2i)$ angehören und daher ist b_n die $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ zugeordnete Zahl.

Nun kann y_n , nach unsern Voraussetzungen, nicht auf einem der Bogen B oder einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegen, daher ist nach Satz III:

$$x_0 = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, y_n)$$

die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 , und diese geht durch die Substitution $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ in die Kettenbruch-Entwicklung erster Art: $(b_0, b_1, \dots, b_n, y_{n+1})$ der Grösse x_0 über.

IV_b. *Liegt unter den gleichen Voraussetzungen y_{n+1} auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$, so stellt die Gleichung (5) die Entwicklung erster Art der Grösse x_0 dar, wenn y_{n+1} und $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ dem Raume R angehören.*

Beweis: Da y_{n+1} dem Raume R angehört und auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt, so liegt $-\frac{1}{y_{n+1}}$ im Innern des Quadrates \circ und da $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ dem Raume R angehört, ohne, nach Voraussetzung, auf einen der vier Bogen B zu fallen, so ist b_n die y_n zugeordnete Zahl.

Nach Satz II_a gehört auch $y_{n-1} = b_{n-1} - \frac{1}{y_n}$ dem Raume R an;

$$x_0 = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, y_n)$$

ist daher nach Satz III die Entwicklung erster Art von x_0 , und nun folgt durch die Substitution $y_n = b_n - \frac{1}{y_{n+1}}$ die Behauptung unseres Satzes.

Die in diesem Paragraphen bewiesenen Sätze liefern die hinreichenden Kriterien zur Beurteilung, ob ein vorgelegter Kettenbruch die Entwicklung erster Art der durch ihn definirten Grösse ist. Es zeigt sich zugleich, dass die im § 3 aufgestellten Gesetze für die Entwicklung erster Art charakteristisch sind.

§ 5. *Complexe rationale Zahlen.*

Alle (mit einer complexen ganzen Zahl) abbrechenden Entwicklungen erster Art stellen offenbar complexe rationale Zahlen dar. Dieser Satz gilt auch umgekehrt:

Denn entwickeln wir $x_0 = \frac{m + ni}{r + si} = \frac{\mu}{\mu_1}$, so erhalten wir:

$$\frac{\mu_1}{x_1} = \mu_1 a_0 - \mu \quad \text{eine complexe ganze Zahl} = \mu_2,$$

und da $|x_1| > 1$ ist: $|\mu_1| > |\mu_2|$; ¹

$$x_1 = \frac{\mu_1}{\mu_2} = a_1 - \frac{1}{x_2},$$

woraus folgt:

$$\frac{\mu_2}{x_2} = \mu_2 a_1 - \mu_1 \quad \text{eine complexe ganze Zahl} = \mu_3$$

und:

$$|\mu_2| > |\mu_3|$$

u. s. f.

$$x_n = \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = a_n - \frac{1}{x_{n+1}},$$

$$\frac{\mu_{n+1}}{x_{n+1}} \quad \text{eine complexe ganze Zahl} = \mu_{n+2}$$

und

$$|\mu_{n+1}| > |\mu_{n+2}|.$$

¹ $|x|$ bedeutet hier, wie im Folgenden stets:

»absoluter Betrag der Grösse x ».

Da hiernach die Normen von μ_1, μ_2, \dots eine abnehmende Reihe positiver ganzer Zahlen bilden, so muss diese Reihe schliesslich abbrechen, d. h. eine der Zahlen μ , etwa $\mu_{n+2} = 0$ werden und folglich $\frac{\mu_n}{\mu_{n+1}} = x_n$ mit der dieser Zahl in der Entwicklung zugeordneten Zahl a_n zusammenfallen.

Wir nehmen nun an, μ und μ_1 seien teilerfremde complexe Zahlen, was offenbar keine Beschränkung involvirt, und betrachten die aus der Entwicklung folgenden Gleichungen:

$$\mu = a_0 \mu_1 - \mu_2,$$

$$\mu_1 = a_1 \mu_2 - \mu_3,$$

$$\mu_2 = a_2 \mu_3 - \mu_4,$$

.....

$$\mu_{n-2} = a_{n-2} \mu_{n-1} - \mu_n,$$

$$\mu_{n-1} = a_{n-1} \mu_n - \mu_{n+1},$$

$$\mu_n = a_n \mu_{n+1}.$$

Da μ und μ_1 teilerfremd sind, so folgt aus diesen Gleichungen, dass μ_{n+1} notwendig eine Einheit ist. Nehmen wir nun an, a_n sei eine Eckzahl, also $\equiv 1 \pmod{1+i}$, so ergibt sich, dass μ_n eine Eckzahl ist, hiernach aus der vorletzten Gleichung, dass μ_{n+1} eine Eckzahl ist, und so weiter, rückwärts schliessend, dass alle Zahlen μ Eckzahlen, also $\equiv 1 \pmod{1+i}$ sein müssen.

Nehmen wir aber an, a_n sei $\equiv 0 \pmod{1+i}$, so ergibt sich durch die gleiche Betrachtung, dass $\mu_{n-1} \equiv 1, \mu_{n-2} \equiv 0, \mu_{n-3} \equiv 1, \mu_{n-4} \equiv 0 \pmod{1+i}$ u. s. f.

Endigt demnach die Entwicklung einer complexen rationalen Zahl mit einer Eckzahl, so sind Zähler und Nenner der complexen Zahl, nach Forthebung gemeinsamer Factoren, $\equiv 1 \pmod{1+i}$; endigt die Entwicklung mit einer durch $1+i$ teilbaren Zahl, so ist, nach Forthebung gemeinsamer Factoren, entweder der Zähler $\equiv 0 \pmod{1+i}$ und der Nenner $\equiv 1 \pmod{1+i}$, oder umgekehrt.

Gehen wir bei der Betrachtung obiger Gleichungen von μ und μ_1 aus, so sehen wir, dass die soeben angegebenen Bedingungen für den

Charakter des letzten Teilenners auch hinreichend sind. Wir haben also den Satz:

Die Kettenbruch-Entwicklung erster Art einer complexen rationalen Zahl endigt dann und nur dann mit einem nicht durch $1 + i$ teilbaren Teilnenner, wenn, nach Forthebung gemeinsamer Factoren, weder der Zähler noch der Nenner der Zahl durch $1 + i$ teilbar sind.

§ 6. Convergence der Kettenbruch-Entwicklung erster Art.

Wir nehmen jetzt an, die complexe Grösse x_0 sei irrational. Die alsdann nicht abbrechende Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 laute:

$$x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots),$$

der n^{te} Näherungsbruch dieser Entwicklung werde mit $\frac{p_n}{q_n}$ bezeichnet und

$$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2}$$

gesetzt.

Der betrachtete Kettenbruch convergiert und sein Wert ist x_0 , wenn $\frac{\theta_n}{q_n^2}$ mit unbegrenzt wachsendem n unendlich klein wird.

Um zu beweisen, dass dies der Fall ist, zeigen wir zunächst, dass q_n mit wachsendem n , dem absoluten Betrage nach, ins Unbegrenzte wächst, oder, woraus dies folgt, dass $\left| \frac{q_n}{q_{n-1}} \right|$ für jeden Wert von n grösser als 1 ist.

Setzen wir

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = k_n,$$

so ist der Gleichung:

$$q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2}$$

zufolge, (in welcher $q_0 = 1$, $q_{-1} = 0$ zu nehmen ist):

$$k_1 = a_1, \quad k_2 = a_2 - \frac{1}{k_1}, \quad \dots, \quad k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}},$$

und es ist zu beweisen, dass für jeden Wert von n : $|k_n| > 1$ ist.

Zu dem Ende beschreiben wir um die Mittelpunkte aller Quadrate unsrer Einteilung, mit dem Radius 1, Kreisbogen und zwar dergestalt, dass die einem Quadrate zugehörigen Seiten umschrieben werden, die Kreisbogen aber an den nicht zugehörigen Seiten endigen. Auf diese Weise erhalten wir eine neue Einteilung der Ebene, in welcher wir den Einheitskreis und acht Gruppen sich anschliessender Kreisgebiete unterscheiden.

Zu jedem Kreisgebiet rechnen wir als Begrenzung die gegen den Mittelpunkt convexen Kreisbogen, so dass hiernach zum Einheitskreise keine Begrenzung, zu den Kreisgebieten um die Quadrate der Typen $(1 + i)$, $(1 - i)$, $(-1 + i)$, $(-1 - i)$ je ein Bogen und zu allen übrigen Kreisgebieten je zwei Bogen gehören.

Wir behaupten nun, dass die Grösse k_n stets in das Innere des Kreisgebiets um a_n fällt.

Für k_1 trifft diese Behauptung zu. Wir nehmen an, der Nachweis sei bis k_{n-1} geführt und zeigen, dass dann auch k_n die Behauptung erfüllt.

Ist a_n eine Zahl vom Typus $(1 + i)$, so kann a_{n-1} in keinem Falle $1 - i$ sein, folglich liegt k_{n-1} nicht im Innern des Kreisgebiets um $1 - i$, sondern im Innern anderer Kreisgebiete. Daher liegt $-\frac{1}{k_{n-1}}$ nicht im Innern oder auf den Begrenzungsbogen des Zweiecks $(-1, -i)$,¹ sondern im übrigen Innenraum des Einheitskreises, und demnach fällt $k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ ins Innere des Kreisgebiets um a_n .

Ist a_n eine Zahl vom Typus (2), so kann a_{n-1} weder $1 + i$, noch $1 - i$ sein, daher $-\frac{1}{k_{n-1}}$ nicht im Innern oder auf den Begrenzungsbogen der Zweiecke Z_{-1-i} und Z_{-1+i} liegen, und demnach fällt $k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ ins Innere des Kreisgebiets um a_n .

Analog ergibt sich unsere Behauptung für Zahlen a_n , die andern Typen angehören.

Es ist somit bewiesen, dass $k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$ stets dem Kreisgebiete um a_n

¹ Das Flächenstück, welches dem Einheitskreise und dem Vollkreise um $(-1 - i)$ gemeinsam ist, bezeichne ich als Zweieck $(-1, -i)$ oder Z_{-1-i} ; analoge Bedeutung haben die Abkürzungen Z_{1+i} , Z_{1-i} , Z_{-1+i} .

angehört, ohne auf dessen Begrenzung zu fallen, dass folglich $\left| \frac{q_n}{q_{n-1}} \right|$ stets > 1 ist, woraus, wie bemerkt, hervorgeht, dass $|q_n|$ mit n über alle Grenzen wächst.

Nun ist:

$$x_0 = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}}$$

folglich:

$$x_{n+1} = \frac{q_{n-1} x_0 - p_{n-1}}{q_n x_0 - p_n} = \frac{x_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{x_0 - \frac{p_n}{q_n}} \cdot \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} \cdot \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} \cdot k_n,$$

daher:

$$\frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} = \frac{x_{n+1}}{k_n}.$$

Demnach haben wir:

$$\begin{array}{ccc} \frac{\theta_0}{\theta_1} & = & \frac{1}{x_1 \theta_1} = \frac{x_2}{k_1}, \\ \frac{\theta_1}{\theta_2} & & = \frac{x_3}{k_2}, \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\theta_{n-1}}{\theta_n} & & = \frac{x_{n+1}}{k_n}, \end{array}$$

folglich:

$$\frac{1}{x_1 \theta_n} = \frac{x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_{n+1}}{k_1 k_2 \cdot \dots \cdot k_n}$$

oder:

$$\frac{1}{\theta_n} = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n+1}}{k_1 k_2 \cdot \dots \cdot k_n}$$

und da:

$$k_1 k_2 \cdot \dots \cdot k_n = q_n$$

ist:

$$\frac{1}{\theta_n} = \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n+1}}{q_n}.$$

Hieraus folgt:

$$\left| \frac{1}{\theta_n} \right| > \left| \frac{1}{q_n} \right|$$

oder:

$$|\theta_n| < |q_n|,$$

demnach:

$$\left| \frac{\theta_n}{q_n^2} \right| < \frac{1}{|q_n|}$$

und daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\theta_n}{q_n^2} \right| = 0, \text{ w. z. b. w.}$$

§ 7. *Hilfssatz über die Grössen θ_n .*

Es sei eine beliebige complexe irrationale Grösse x in einen Kettenbruch erster Art entwickelt und es werde allgemein gesetzt:

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2}.$$

Bilden wir die Grössen θ_n für alle Werte von n , so erhalten wir eine unendliche Reihe von complexen Grössen:

$$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots,$$

und wenn wir diese als Punkte der complexen Zahlen-Ebene deuten, eine unendliche Menge von Punkten.

Von dieser Punktmenge beweisen wir den folgenden Satz:

Die Punktmenge $\theta_0, \theta_1, \dots$ besitzt stets mindestens eine im Endlichen liegende Häufungsstelle.

Wir beweisen diesen Satz indirekt.

Würde die betrachtete Punktmenge keine im Endlichen liegende Häufungsstelle besitzen, so müsste der unendlich ferne Punkt die einzige Häufungsstelle der Menge sein. Es müsste daher:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n = \infty \text{ und folglich } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\theta_n} \right) = 0 \text{ sein.}$$

Nun ist allgemein:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_n}{q_n^2} &= x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{-1}{q_n^2 \left(x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)} \end{aligned}$$

demnach:

$$\frac{1}{\theta_n} = - \left(x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) = - \left(x_{n+1} - \frac{1}{k_n} \right),$$

und es müsste also der absolute Betrag der Differenz $x_{n+1} - \frac{1}{k_n}$ mit wachsendem n unbegrenzt abnehmen.

Da nun, nach Früherem, die Grössen x_{i+1} stets dem Raume R angehören, die Grössen $\frac{1}{k_i}$ stets im Einheitskreise liegen, so ist dies nur möglich, wenn sich die Grössen x_{n+1} und $\frac{1}{k_n}$ in den Paaren

$$\left(x_{v+1}, \frac{1}{k_v} \right), \left(x_{v+2}, \frac{1}{k_{v+1}} \right), \dots$$

den Einheitspunkten mehr und mehr annähern. Es muss daher möglich sein, nach Annahme beliebig kleiner um die Einheitspunkte abgegrenzter Umgebungen, den Index v so zu bestimmen, dass alle Reste x_{v+1}, x_{v+2}, \dots der Entwicklung erster Art der Grösse x in die Umgebungen hineinfallen.

Wir zeigen nun, dass diese Folgerung aus unserer Annahme einen Widerspruch involviert.

Zu diesem Nachweis beschreiben wir um die Einheitspunkte kleine Kreise und wählen deren Radius δ so, dass die vier Kreise sich gegenseitig ausschliessen, und dass durch Transformation aller Punkte im Innern eines der Kreise nach reciproken Radien vom Nullpunkte aus, als Pol, der sich ergebende neue Kreis nur mit dem betreffenden Kreise ein Gebiet gemeinsam hat, (nicht in die andern Umgebungen hineinreicht).

Nun betrachten wir einen in die Umgebung des Punktes 1 fallenden Rest x_n . Dieser kann den Quadraten $2, 1+i, 1-i$ angehören. (S. Fig. 2.)

I. Es gehöre x_n dem Quadrate 2 an, dann ist

$$x_n = 2 - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \text{daher} \quad x_{n+1} = \frac{1}{2 - x_n}$$

x_{n+1} fällt wieder in die Umgebung des Punktes 1, denn $-\frac{1}{x_{n+1}} = x_n - 2$ fällt in den Teil der Umgebung des Punktes (-1), der im Quadrate 0 liegt, und dieser geht durch Transformation nach reciproken Radien und darauf folgende Spiegelung an der Y -Achse in ein Gebiet über, welches nur mit der Umgebung des Punktes 1 ein Stück gemein hat.

Bilden wir:

$$x_{n+1} - 1 = \frac{1}{2 - x_n} - 1 = \frac{x_n - 1}{2 - x_n},$$

so ergibt sich:

$$|x_{n+1} - 1| = \frac{|x_n - 1|}{|2 - x_n|}$$

und da $|2 - x_n| < 1$ ist:

$$|x_{n+1} - 1| > |x_n - 1|$$

d. h. der Abstand des neuen Restes vom Punkte 1 hat sich vergrößert.

II. Es gehöre x_n dem Quadrate $1 + i$ an, dann ist:

$$x_n = 1 + i - \frac{1}{x_{n+1}} \quad \text{und daher:} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 + i - x_n}$$

x_{n+1} fällt in die Umgebung des Punktes ($-i$), denn $-\frac{1}{x_{n+1}}$ fällt in den Teil dieser Umgebung, der im Quadrat 0 liegt und von B_{-1-i}^0 und Seite $\overline{-i, 1}$ ausgeschnitten wird. Dieser Teil geht durch Transformation nach reciproken Radien und Spiegelung an der Y -Achse in ein Gebiet über, welches nur mit der Umgebung des Punktes ($-i$) ein Stück gemein hat.

Bilden wir:

$$x_{n+1} - (-i) = \frac{1}{1 + i - x_n} - (-i) = \frac{i(1 - x_n)}{1 + i - x_n}$$

so ergibt sich:

$$|x_{n+1} - (-i)| = \frac{|x_n - 1|}{|x_n - (1 + i)|}$$

und da $|x_n - (1 + i)| < 1$ ist, so folgt:

$$|x_{n+1} - (-i)| > |x_n - 1|$$

d. h. der Abstand des neuen Restes vom Punkte $(-i)$ ist grösser, als der des vorhergehenden vom Punkte 1 .

III. Es gehöre x_n dem Quadrate $1 - i$ an, dann ist:

$$x_n = 1 - i - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \text{daher} \quad x_{n+1} = \frac{1}{1 - i - x_n}.$$

x_{n+1} fällt in die Umgebung des Punktes i , denn $-\frac{1}{x_{n+1}}$ fällt in den Teil dieser Umgebung, der im Quadrate o liegt und von B_{-1+i}^o und Seite $\overline{i, 1}$ ausgeschnitten wird. Dieser Teil geht durch Transformation nach reciproken Radien und Spiegelung an der Y -Achse in ein Gebiet über, welches nur mit der Umgebung des Punktes i ein Stück gemein hat.

Bilden wir:

$$x_{n+1} - i = \frac{1}{1 - i - x_n} - i = \frac{-i(1 - x_n)}{1 - i - x_n},$$

so ergibt sich:

$$|x_{n+1} - i| = \frac{|x_n - 1|}{|x_n - (1 - i)|}$$

und da $|x_n - (1 - i)| < 1$ ist, so folgt:

$$|x_{n+1} - i| > |x_n - 1|$$

d. h. der Abstand des neuen Restes vom Punkte i ist grösser, als der des vorhergehenden vom Punkte 1 .

Da die Betrachtung für die Fälle, dass x_n der Umgebung eines der Punkte $-1, i, -i$ angehört, ganz analog ist, wie die obige, oder auch, wegen der Symmetrie unsrer Einteilung, auf die obige Betrachtung zurückgeführt werden kann, so ergibt sich als allgemeines Resultat:

Wenn der Index n so bestimmt ist, dass die Reste x_n, x_{n+1}, \dots ad. infin. in die Umgebungen der Punkte $1, -1, i, -i$ fallen, so wächst mit dem Index der Reste die Entfernung der sie repräsentierenden Punkte von den bezüglichen Einheitspunkten, und folglich kann $x_{n+1} - \frac{1}{k_n}$ nicht mit wachsendem n , dem absoluten Betrage nach, unbegrenzt abnehmen.

Unsere Annahme, dass die Werte θ_n die einzige Häufungsstelle ∞ besitzen, ist daher nicht zulässig; diese Werte müssen folglich mindestens eine im Endlichen liegende Häufungsstelle haben.

Es sei nun x eine im Endlichen liegende Häufungsstelle der Werte θ_n . Beschreiben wir dann vom Nullpunkte aus, mit einem Radius $\rho > |x|$, einen Kreis, so können wir eine unendliche Reihe von Indices: n_1, n_2, n_3, \dots bestimmen, so dass die diesen entsprechenden Grössen θ : $\theta_{n_1}, \theta_{n_2}, \theta_{n_3}, \dots$ sämtlich ins Innere des Kreises mit dem Radius ρ fallen, dass also der absolute Betrag aller dieser Grössen kleiner ist, als die endliche positive Zahl ρ .

Da ferner aus:

$$x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2},$$

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2}$$

durch Elimination von x folgt:

$$\frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2} = \frac{\theta_n}{q_n^2} + \frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{\theta_n}{q_n^2} - \frac{1}{q_n q_{n-1}},$$

daher:

$$\theta_{n-1} = \theta_n \left(\frac{q_{n-1}}{q_n} \right)^2 - \frac{q_{n-1}}{q_n}$$

und folglich, weil $\left| \frac{q_{n-1}}{q_n} \right|$ stets < 1 ,

$$|\theta_{n-1}| < |\theta_n| + 1$$

ist, so sind die Grössen:

$$|\theta_{n_1-1}|, |\theta_{n_1}|; |\theta_{n_2-1}|, |\theta_{n_2}|; |\theta_{n_3-1}|, |\theta_{n_3}|; \dots$$

sämtlich $< \rho + 1$.

§ 8. Periodicität der Entwicklung erster Art für quadratische Irrationalitäten.

Gestützt auf den im vorigen Paragraphen abgeleiteten Hilfssatz, beweisen wir nun den Satz:

Genügt die complexe Grösse x_0 einer quadratischen Gleichung

$$(6) \quad ax^2 + 2bx + c = 0,$$

deren Discriminante $D = b^2 - ac$ kein volles Quadrat (also auch nicht null) ist, und wo a, b, c complexe ganze Zahlen bedeuten, so wird die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 periodisch.

Es sei:

$$x_0 = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, x_{n+1})$$

die Entwicklung erster Art der Grösse x_0 ; dann ist eingerichtet:

$$(7) \quad x_0 = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}}$$

und daher:

$$\begin{aligned} \frac{\theta_n}{q_n^2} &= x_0 \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}} \frac{p_n}{q_n} = \frac{-1}{q_n^2 \left(x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \right)}, \\ \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2} &= x_0 \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_n x_{n+1} - p_{n-1}}{q_n x_{n+1} - q_{n-1}} \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \\ &= \frac{-x_{n+1}}{q_{n-1}^2 \left(\frac{q_n}{q_{n-1}} x_{n+1} - 1 \right)} = \frac{-1}{q_{n-1}^2 \left(\frac{q_n}{q_{n-1}} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)}, \end{aligned}$$

folglich:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} &= -\frac{1}{\theta_n}, \\ \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{q_n}{q_{n-1}} &= \frac{1}{\theta_{n-1}}. \end{aligned}$$

Da x_0 der Gleichung (6) genügt, so genügt, zufolge der Gleichung (7): x_{n+1} der Gleichung:

$$a(p_n x - p_{n-1})^2 + 2b(p_n x - p_{n-1})(q_n x - q_{n-1}) + c(q_n x - q_{n-1})^2 = 0,$$

welche geordnet:

$$(9) \quad Ax^2 + 2Bx + C = 0$$

lauten möge. In dieser Gleichung sind A, B, C wieder complexe ganze

Zahlen und die Discriminante $B^2 - AC$ ist gleich der Discriminante $b^2 - ac = D$ der Gleichung (6), da die Gleichung (9) aus (6) durch die lineare Substitution: $x = \frac{p_n x - p_{n-1}}{q_n x - q_{n-1}}$, deren Determinante $p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = 1$ ist, hervorgeht.

Bezeichnen wir die zweite Wurzel der Gleichung (9) mit y_{n+1} , so ist:

$$(10) \quad y_0 = \frac{p_n y_{n+1} - p_{n-1}}{q_n y_{n+1} - q_{n-1}}$$

die zweite Wurzel der Gleichung (6) und von x_0 verschieden, da $b^2 - ac$, nach Voraussetzung, nicht verschwindet.

Aus (10) folgt nun:

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{q_n y_0 - p_n} \quad \text{und} \quad \frac{1}{y_{n+1}} = \frac{q_n y_0 - p_n}{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}$$

und daher:

$$y_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{-1}{q_n^2 \left(y_0 - \frac{p_n}{q_n} \right)} = \frac{-1}{q_n^2 \left(y_0 - x_0 + \frac{\theta_n}{q_n} \right)} = \frac{-1}{q_n^2} \frac{1}{\left(y_0 - x_0 \right) + \frac{\theta_n}{q_n}} = -\varepsilon_n,$$

$$\frac{1}{y_{n+1}} - \frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{1}{q_{n-1}^2 \left(y_0 - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right)} = \frac{1}{q_{n-1}^2} \frac{1}{\left(y_0 - x_0 \right) + \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}}} = \varepsilon'_{n-1}.$$

Da $y_0 - x_0$ von null verschieden ist, so ergibt sich hieraus, dass in den Gleichungen:

$$y_{n+1} = \frac{q_{n-1}}{q_n} - \varepsilon_n,$$

$$\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + \varepsilon'_{n-1}$$

die Grössen ε_n und ε'_{n-1} mit wachsendem n , dem absoluten Betrage nach, beliebig klein werden.

Bilden wir nun:

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \left(x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \right) + \varepsilon_n = -\frac{1}{\theta_n} + \varepsilon_n = -\left(\frac{1}{\theta_n} - \varepsilon_n \right),$$

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = \left(\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{q_n}{q_{n-1}} \right) - \varepsilon'_{n-1} = \frac{1}{\theta_{n-1}} - \varepsilon'_{n-1}$$

(vergl. Gleichungen (8)),

so folgt:

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - y_{n+1}| &\geq \left| \frac{1}{\theta_n} \right| - |\varepsilon_n|, \\ \left| \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} \right| &\geq \left| \frac{1}{\theta_{n-1}} \right| - |\varepsilon'_{n-1}|, \end{aligned}$$

und da $\left| \frac{1}{\theta_n} \right|$ und $\left| \frac{1}{\theta_{n-1}} \right|$ nach unserm Hilfssatz für unendlich viele Werte von n grösser als $\frac{1}{\rho + 1} = \rho'$ sind, so ergibt sich, dass für unendlich viele Indices die absoluten Beträge der Differenzen:

$$x_{n+1} - y_{n+1}$$

und

$$\frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}}$$

grösser als ρ'' werden, wo ρ'' eine um beliebig wenig kleiner als ρ' angenommene Grösse bedeutet.

Aus Gleichung (9) aber folgt:

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \pm \frac{\sqrt{D}}{A}; \quad \frac{1}{x_{n+1}} - \frac{1}{y_{n+1}} = \pm \frac{\sqrt{D}}{C},$$

daher ist für unendlich viele Indices n :

$$\frac{|\sqrt{D}|}{|A|} > \rho'' \quad \text{und} \quad \frac{|\sqrt{D}|}{|C|} > \rho''$$

folglich:

$$|A| < \frac{|\sqrt{D}|}{\rho''}, \quad |C| < \frac{|\sqrt{D}|}{\rho''}.$$

Es müssen folglich die absoluten Beträge von A , C und $B = \sqrt{D + AC}$ für unendlich viele Indices n kleiner als eine bestimmte endliche Grösse ausfallen, was nur möglich ist, wenn A , B , C und daher auch

$$x_{n+1} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A}$$

für einen gewissen Index einmal die einem früheren Index entsprechenden

Werte wieder annehmen. Es muss hiernach also einmal ein Rest der Entwicklung der Grösse x_0 mit einem früheren Reste identisch, d. h. es muss die Entwicklung von x_0 periodisch werden, w. z. b. w.

§ 9. Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art.

Bei dem Convergencebeweise im § 6 sind wir auf eine zweite Einteilung der Ebene der complexen Zahlen geführt worden. Die Vermutung liegt nahe, dass wenn wir diese Einteilung zur Entwicklung einer complexen Grösse in einen Kettenbruch benutzen, die neue Entwicklung zu der auf die quadratische Einteilung gegründeten in einer besondern Beziehung stehen wird.

Wir wollen die neue Entwicklungsweise als »Entwicklung zweiter Art« bezeichnen.

Über die der zweiten Entwicklungsart zu Grunde liegende Einteilung ist schon im § 6 das Wesentlichste gesagt worden.

Wir ordnen jeder nicht ganzzahligen complexen Zahl x_0 die durch $1+i$ teilbare complexe ganze Zahl zu, welche im Mittelpunkte¹ des Kreisgebiets liegt, dem x_0 angehört. Jede complexe ganze Zahl aber sei sich selbst zugeordnet.

Zur Abkürzung bezeichne ich jedes Kreisgebiet durch seine Mittelpunktszahl, die zu einem Kreisgebiete a_n gehörigen Randbogen (ohne die auf ihnen befindlichen Eckzahlen) mit R_{a_n} , die nicht zugehörigen mit P_{a_n} . Wenn wir die Peripherien der Kreisgebiete $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ vervollständigen, so mögen die im Einheitskreise liegenden Bogen (ohne die Einheitspunkte) mit P'_{1+i} , P'_{1-i} , P'_{-1+i} , P'_{-1-i} , die entstehenden Zweiecke mit Z_{1+i} etc. bezeichnet werden.

Jede Eckzahl wollen wir als zu dem Kreisgebiete gehörig betrachten, zu dem die zwei Kreisbogen gerechnet werden, in deren Berührungsstelle die Eckzahl liegt.

Den unendlichen Teil der Ebene ausserhalb des Kreisgebiets o und mit Ausschluss der Peripherie des Einheitskreises bezeichnen wir als den Raum R' .

¹ Unter Mittelpunkt ist hier der Mittelpunkt des Vollkreises um das betreffende Quadrat zu verstehen.

Gehen wir nun von einer beliebigen complexen Grösse x_0 aus und bilden die Gleichungskette

$$x_0 = a_0 - \frac{1}{x_1}, \quad x_1 = a_1 - \frac{1}{x_2}, \quad \dots, \quad x_n = a_n - \frac{1}{x_{n+1}}, \quad \dots$$

wo allgemein a_n die x_n zugeordnete complexe ganze Zahl bedeutet, so ergibt sich aus dieser die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art der Grösse x_0 :

$$x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots).$$

Da nur x_0 selbst auf dem Einheitskreise liegen kann, so fallen alle Reste x_1, x_2, \dots der Entwicklung in dem Raum R' ; diese Reste sind demnach absolut genommen sämmtlich > 1 .

Fällt ein Rest x_r auf einen Gebietsrand, so fallen alle folgenden Reste auf Gebietsränder, und zwar nur auf $P_{1+i}, P_{1-i}, P_{-1+i}, P_{-1-i}$.

Die Aufeinanderfolge der Teilnenner und Reste unterliegt wieder gewissen Beschränkungen.

Ist x_r ($r \neq 0$) ein dem Typus $(1+i)$ angehörender Rest, so kann $-\frac{1}{x_{r+1}}$ nicht ins Innere des Zweiecks Z_{-1-i} fallen, und folglich x_{r+1} nicht dem Kreisgebiete $1-i$ angehören, a_{r+1} also nicht $= 1-i$ sein.

Ist x_r ein Rest, der dem Typus (2) angehört, so kann $-\frac{1}{x_{r+1}}$ nicht ins Innere der Zweiecke Z_{-1+i} und Z_{-1-i} fallen, und daher x_{r+1} nicht den Kreisgebieten $1+i$ und $1-i$ angehören, also a_{r+1} weder $1+i$, noch $1-i$ sein.

Mit Berücksichtigung der Symmetrie unsrer Einteilung erhalten wir hiernach das Folgesetz:

$$\begin{array}{l} \text{Ist } a_r \text{ vom Typus: } \underline{(1+i)}, \underline{(-1+i)}, \underline{(-1-i)}, \underline{(1-i)}, \\ \text{so ist } a_{r+1} \neq \quad \quad \quad \underline{1-i} \quad \underline{-1-i} \quad \underline{-1+i} \quad \underline{1+i} \\ \text{(B')} \quad \text{Ist } a_r \text{ vom Typus: } \underline{(2)}, \underline{(-2i)}, \underline{(-2)}, \underline{(2i)} \\ \text{so ist } a_{r+1} \neq \quad \left\{ \begin{array}{llll} \underline{1+i} & \underline{-1+i} & \underline{-1-i} & \underline{1-i} \\ \underline{1-i} & \underline{1+i} & \underline{-1+i} & \underline{-1-i} \end{array} \right. \end{array}$$

Liegt ferner x_r auf dem Rande eines Kreisgebiets vom Typus $(1+i)$,

so fällt $-\frac{1}{x_{r+1}}$ auf P'_{-1-i} , daher x_{r+1} auf P_{1-i} , und folglich ist a_{r+1} eine der Zahlen $2, 2 - 2i, -2i$.

Liegt x_r auf dem Rande eines Kreisgebiets vom Typus (2), so fällt $-\frac{1}{x_{r+1}}$ auf P'_{-1+i} oder P'_{-1-i} , daher x_{r+1} auf P_{1+i} oder P_{1-i} , und folglich ist a_{r+1} eine der Zahlen $2i, 2 + 2i, 2, 2 - 2i, -2i$.

Hieraus ergibt sich das folgende Gesetz:

Liegt x_r auf dem Rand eines Kreisgebiets

	vom Typus:	$(1 + i)$,	$(-1 + i)$,	$(-1 - i)$,	$(1 - i)$
	so liegt x_{r+1} auf:	P_{1-i}	P_{-1-i}	P_{-1+i}	P_{1+i}
(A')	vom Typus:	(2) ,	$(2i)$,	(-2) ,	$(-2i)$
	so liegt x_{r+1} auf:	P_{1+i}	P_{1-i}	P_{-1-i}	P_{-1+i}
		P_{1-i}	P_{-1-i}	P_{-1+i}	P_{1+i}

oder umgekehrt:

Liegt x_r (und folglich auch x_{r+1}) auf einem Rande

und liegt x_{r+1} auf:	P_{1+i}	P_{1-i}	P_{-1-i}	P_{-1+i}
so liegt x_r auf dem Rande	2	$2i$	-2	- $2i$
eines Gebiets der Typen	- $2i$	2	$2i$	-2
	$1 - i$	$1 + i$	- $1 + i$	- $1 - i$

Die Sätze der §§ 2 und 5 gelten genau ebenso für Entwicklungen zweiter Art, wie für solche erster Art.

Liegt die zu entwickelnde Zahl auf der Achse der reellen Zahlen, auf der Achse der rein imaginären Zahlen, auf dem Rande eines Quadrates oder eines Kreisgebiets, oder endlich auf einem der Bogen $B_{1+i}, B_{1-i}, B_{-1+i}, B_{-1-i}$, so sind die Kettenbruch-Entwicklungen erster und zweiter Art identisch. (Hiernach ergeben z. B. B - und G -Entwicklungen erster Art die gleichen Kettenbrüche zweiter Art.)

§ 10. *Convergenz der Entwicklungen zweiter Art.*

Um die Convergenz einer nicht abbrechenden Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art:

$$x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$$

zu beweisen, setzen wir wieder:

$$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2}$$

und

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = k_n.$$

Ebenso, wie im § 6 haben wir dann:

$$k_1 = a_1, \quad k_2 = a_2 - \frac{1}{k_1}, \quad \dots, \quad k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$$

und beweisen zunächst, dass auch hier $|k_n| > 1$ ist, für jeden Wert von n .

Zu diesem Nachweis benutzen wir die dem ersten Entwicklungsverfahren zu Grunde liegende Einteilung der Ebene.

Wir zeigen, dass k_n stets dem Raume R angehört, und zwar entweder ins Innere oder auf eine der vier Seiten des Quadrats a_n fällt.

Wir nehmen an, der Nachweis sei schon bis k_{n-1} geführt, und zeigen, dass unter dieser Annahme auch k_n die Behauptung erfüllt. Da $k_1 = a_1$ dem Raume R und dem Quadrate a_1 angehört, so ergibt sich dann die allgemeine Gültigkeit der Behauptung.

Aus unsrer Annahme folgt, dass $-\frac{1}{k_{n-1}}$ entweder im Innern oder auf einer der vier Seiten des Quadrats o liegt, folglich $k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ sicher dem Raume R angehört und im Innern oder auf einer der vier Seiten des Quadrats a_n liegt, falls a_n nicht einen der Werte $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$ besitzt. Ist aber $a_n = 1+i$, so kann a_{n-1} nicht den Typen $(1-i)$, (2) , $(-2i)$ angehören (nach Gesetz (B')), daher liegt k_{n-1} in Quadraten der übrigen Typen, bezüglich auf einer Seite dieser Quadrate, $-\frac{1}{k_{n-1}}$

folglich nicht im Innern des Teils vom Quadrate o , der von Seite $\overline{-1, -i}$ und Bogen B_{-1-i}^o begrenzt wird. Es folgt hieraus, dass $a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ dem Raume R angehört und zwar im Quadrate $1+i$ oder auf dem Rande desselben liegt.

Analog ergibt sich die Behauptung für $a_n = 1-i, -1+i, -1-i$.

Corollar: Falls a_1 nicht einen der Werte $1+i, 1-i, -1+i, -1-i$ hat, fällt k_n stets ins Innere des Quadrats a_n und gehört dem Raume R an, ohne auf dessen Begrenzung zu fallen.

Der Beweis wird, wie oben, durch vollständige Induction geführt.

Wir nehmen an, unsre Behauptung sei bis k_{n-1} nachgewiesen. — Dann liegt $-\frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern des Quadrats o , folglich $k_n = a_n - \frac{1}{k_{n-1}}$ im Innern des Quadrats a_n und im Raume R , falls a_n nicht $= 1+i, 1-i, -1+i, -1-i$ ist. — Ist aber $a_n = 1+i$, so kann a_{n-1} nicht den Typen $(1-i), (2), (-2i)$ angehören, k_{n-1} liegt also im Innern von Quadraten anderer Typen, $-\frac{1}{k_{n-1}}$ folglich nicht in dem von Seite $\overline{-1, -i}$ und Bogen B_{-1-i}^o begrenzten Teile des Quadrats o und auch nicht auf B_{-1-i}^o . Demnach fällt $k_n = 1+i - \frac{1}{k_{n-1}}$ ins Innere des dem Raum R zugehörigen Teils des Quadrats $1+i$ und nicht auf B_{1+i} .

Analog folgt der Satz für $a_n = 1-i, -1+i, -1-i$.

Aus unserm Hauptsatze folgt, dass der absolute Betrag von k_n für jedes n grösser als 1, dass daher für jedes n

$$|q_n| > |q_{n-1}|$$

ist und folglich $|q_n|$ mit wachsendem n über alle Grenzen wächst.

In gleicher Weise, wie im § 6 für die Entwicklungen erster Art abgeleitet, ergibt sich nun auch für die Entwicklung zweiter Art:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\theta_n}{q_n} \right| = 0,$$

d. h. die Entwicklung zweiter Art: $(a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ convergirt und stellt die Grösse x_0 dar.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen ergeben sich die folgenden Beziehungen zwischen den beiden Entwicklungsarten:

I. Entwickelt man eine complexe Grösse x_0 in einen Kettenbruch erster Art:

$$x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots),$$

so ist:

$$(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1)$$

die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art der Grösse $k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

II. Entwickelt man eine complexe Grösse x_0 in einen Kettenbruch zweiter Art:

$$x_0 = (b_0, b_1, \dots, b_n, \dots)$$

und ist b_1 nicht eine der Zahlen $1+i$, $1-i$, $-1+i$, $-1-i$, so ist:

$$(b_n, b_{n-1}, \dots, b_1)$$

die Kettenbruch-Entwicklung erster Art der Grösse $k_n = \frac{q_n}{q_{n-1}}$.

Der Ausnahmefall in II tritt ein, wenn $-\frac{1}{x_1}$ im Innern eines der vier Zweiecke Z liegt, und also x_0 ins Innere eines der durch Vervollständigung aller Kreise der Einteilung an den Quadratseiten entstehenden Zweiecke fällt. Liegt x_0 im Innern oder auf der Begrenzung eines der, durch die Vervollständigung aller Kreise, in jedem Quadrate entstehenden Kreisbogen-Vierecke, so gilt der Satz II ohne die Einschränkung.¹

¹ Beispiele:

$$\begin{aligned} \text{I. } \sqrt{3+2i} &= (2, 2i, -1-i, 3+i, \dots) && = \text{I. Art.} \\ \left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)_{n=3} &= \frac{5-7i}{1-2i} = (3+i, -1-i, 2i) && = \text{2. Art.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1+\sqrt{2})+i\sqrt{2} &= (2+2i, -1-i, -3-3i, \dots) = \text{I. Art.} \\ \left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)_{n=2} &= \frac{1-6i}{1+i} = (-3-3i, -1-i) && = \text{2. Art.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } \sqrt{3+2i} &= (1+i, -1-i, 2i, 3+i, \dots) && = \text{2. Art.} \\ \left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)_{n=3} &= \frac{6-4i}{1-2i} = (3+i, 1+i, 1+i) && = \text{I. Art.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} + \frac{9}{10}i &= (1+i, -2, 1-i, 5-7i, \dots) && = \text{2. Art.} \\ \left(\frac{q_n}{q_{n-1}}\right)_{n=3} &= (5-7i, 1-i, -2) && = \text{I. Art.} \end{aligned}$$

II. ABSCHNITT.

Reduction der binären quadratischen Formen.

Die Frage nach den eigentlichen Darstellungen einer complexen ganzen Zahl m durch eine quadratische Form $f = (a, b, c)$ mit nicht quadratischer Determinante, oder genauer ausgedrückt, nach den zu einander relativ primen complexen ganzzahligen Lösungen x, y der Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m,$$

in welcher a, b, c, m gegebene complexe ganze Zahlen bedeuten und $D = b^2 - ac$ kein volles Quadrat ist, führt analog, wie im reellen Gebiete, auf die folgenden zwei Probleme:

I. Zu untersuchen, ob eine gegebene Form $f = (a, b, c)$ mittels einer Substitution $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, deren Determinante $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$ ist, in eine andere gegebene Form F von gleicher Determinante, wie f , übergeführt werden kann, oder kürzer ausgedrückt:

Zu untersuchen, ob zwei gegebene Formen von gleicher Determinante äquivalent sind.

II. Alle Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ zu bestimmen, welche eine Form f in eine andere ihr äquivalente F überführen.

Diese zwei Probleme sollen in diesem Abschnitte mit Hülfe der im I. Abschnitt behandelten Kettenbruch-Entwicklungen gelöst werden.¹

§ 1. Äquivalenz der Formen.

Unter einer Substitution:

$$\begin{aligned} x &= \alpha x' - \beta y', \\ y &= \gamma x' - \delta y' \end{aligned}$$

¹ Auf anderem Wege hat LEJEUNE-DIRICHLET diese Probleme in seiner Abhandlung gelöst: *Recherches sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes*, ges. Werke, Bd. I.

oder abgekürzt bezeichnet:

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

verstehe ich im Folgenden stets eine solche Substitution, deren Determinante $\beta\gamma - \alpha\delta = 1$ ist und deren Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ complexe ganze Zahlen sind.

Zwei Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ heissen congruent nach dem Modul $1 + i$, wenn die Congruenzen bestehen:

$$\alpha \equiv \alpha', \quad \beta \equiv \beta', \quad \gamma \equiv \gamma', \quad \delta \equiv \delta' \pmod{1 + i}.$$

Da jede complexe ganze Zahl entweder $\equiv 0$, oder $\equiv \pm 1 \pmod{1 + i}$ ist, so können wir alle überhaupt möglichen Substitutionen $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ in folgende 6 Classen nach dem Modul $1 + i$ rubriciren:

I	Classe:	Alle	Substitutionen,	die	$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	sind.
II	»	»	»	»	$\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	»
III	»	»	»	»	$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	»
IV	»	»	»	»	$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	»
V	»	»	»	»	$\equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	»
VI	»	»	»	»	$\equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	»

Die inverse Substitution S^{-1} einer Substitution S gehört derselben Classe an, wie S , wenn S der I, II, IV, V^{ten} Classe zugehört, die inverse Substitution einer Substitution der III^{ten} Classe dagegen gehört der VI^{ten} Classe an, und umgekehrt.

Sind

$$S = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$$

zwei beliebige Substitutionen, so bezeichnen wir die aus S und T componirte Substitution:

$$U = \begin{pmatrix} \alpha\alpha' - \beta\gamma', & \alpha\beta' - \beta\delta' \\ \gamma\alpha' - \delta\gamma', & \gamma\beta' - \delta\delta' \end{pmatrix}$$

durch das symbolische Product $S.T$.

Es ist ST stets $\equiv S \pmod{1+i}$, wenn T der I^{ten} Classe angehört. Gehört T der II^{ten} Classe an, so ist

$$\begin{aligned} S_I T &= S_{II}, & S_{II} T &= S_I, & S_{III} T &= S_{IV}, \\ S_{IV} T &= S_{III}, & S_V T &= S_{VI}, & S_{VI} T &= S_V, \end{aligned}$$

wo die dem Buchstaben S angehängten Indices die Classe bezeichnen sollen, der die betreffende Substitution angehört.

Bezeichnen wir die Substitutionen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } S_3, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ mit } S_6,$$

so können wir jede Substitution der vier letzten Classen als eine aus S_3 bezgl. S_6 mit einer Substitution der ersten oder zweiten Classe componirte Substitution ansehen, nämlich:

$$S_{III} = S_3 S_I, \quad S_{IV} = S_3 S_{II}, \quad S_V = S_6 S_I, \quad S_{VI} = S_6 S_{II}.$$

Nach diesen Vorbemerkungen, wollen wir nun zwei quadratische Formen $f = (a, b, c)$ und $f' = (a', b', c')$ betrachten.

Sind diese zwei Formen äquivalent, so existirt eine Substitution S , welche f in f' überführt. Dies drücken wir symbolisch durch die Gleichung aus: $f.S = f'$.

Je nachdem S der I, II, III, IV, V, VI^{ten} Classe angehört, ist dann eine der folgenden symbolischen Gleichungen erfüllt:

$$\begin{aligned} fS_I &= f', & fS_{II} &= f', \\ fS_3S_I &= f', & fS_3S_{II} &= f', \\ fS_5S_I &= f', & fS_5S_{II} &= f' \end{aligned}$$

und ebenso ist klar, dass wenn umgekehrt eine dieser symbolischen Gleichungen erfüllt wird, die Formen f und f' äquivalent sind.

Es sollen nun im Folgenden zwei Formen f und f' als *vollständig äquivalent* bezeichnet werden, wenn die eine mittels einer Substitution der ersten oder zweiten Classe (S_I oder S_{II}) in die andere übergeht.¹

Mit Verwendung dieser Definition folgt dann aus dem Vorhergehenden unmittelbar der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Formen f und f' im gewöhnlichen Sinne ist, dass eine der drei Formen:

$$f; fS_3 = f \begin{pmatrix} I & I \\ I & 0 \end{pmatrix}; \quad fS_5 = f \begin{pmatrix} I & 0 \\ I & -I \end{pmatrix}$$

der Form f' vollständig äquivalent ist.

Unter $f = (a, b, c) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ eine beliebige quadratische Form verstanden, deren Determinante $D = b^2 - ac$ kein volles Quadrat ist, bezeichnen wir die Wurzeln der Gleichung:

$$ax^2 + 2bx + c = 0,$$

nämlich:

$$x_0 = \frac{-b - \sqrt{D}}{a} \quad \text{und} \quad y_0 = \frac{-b + \sqrt{D}}{a}$$

als erste, bezügl. zweite Wurzel der Form f .

Unter \sqrt{D} ist hier derjenige Wurzelwert zu verstehen, der, $D = a + i\beta$ gesetzt, aus:

¹ Diese Bezeichnung ist von L. KRONECKER in einem ähnlichen Sinne eingeführt worden.

Die Substitutionen erster und zweiter Classe werden hier bevorzugt, weil die im I. Abschnitt betrachteten Kettenbrüche in ihren aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen nur Substitutionen dieser Classen liefern.

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + \beta^2} + a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + \beta^2} - a}{2}}, \quad \text{falls } \beta > 0,$$

$$\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + \beta^2} + a}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + \beta^2} - a}{2}}, \quad \text{falls } \beta < 0,$$

$$\sqrt{a}, \quad \text{falls } \beta = 0 \quad \text{und} \quad a > 0,$$

$$i\sqrt{-a}, \quad \text{falls } \beta = 0 \quad \text{und} \quad a < 0$$

resultirt, wenn überall die positiven Wurzelwerte genommen werden.

Analog wie bei reellen Formen mit positiver Determinante, gilt hier der Satz:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Äquivalenz zweier Formen f und f' ist, dass ihre ersten Wurzeln x_0 und x'_0 durch eine Gleichung verbunden sind:

$$x_0 = \frac{\alpha x'_0 - \beta}{\gamma x'_0 - \delta},$$

wo $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ eine Substitution der ersten oder zweiten Classe ist.

Bezeichnen wir zwei complexe Zahlen x und x' , welche durch eine Relation $x = \frac{\alpha x' - \beta}{\gamma x' - \delta}$ verbunden sind, wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Coefficienten einer Substitution erster oder zweiter Classe bedeuten, als *vollständig äquivalente Zahlen*, so können wir obigen Satz auch so aussprechen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Äquivalenz zweier Formen f und f' ist, dass ihre ersten Wurzeln x_0 und x'_0 vollständig äquivalente Zahlen sind.

§ 2. Wurzel-Paare.

Es seien x und y die von einander verschiedenen, irrationalen Wurzeln einer quadratischen Gleichung:

$$(11) \quad ax^2 + 2bx + c = 0,$$

deren Coefficienten a, b, c complexe ganze Zahlen sind.

Setzen wir:

$$(12) \quad \begin{aligned} x &= a^0 - \frac{1}{x'}, \\ y &= a^0 - \frac{1}{y'}, \end{aligned}$$

wo a^0 die der Zahl x nach der Entwicklungsvorschrift für Kettenbrüche erster Art zugeordnete complexe ganze Zahl bedeutet, so sind x', y' eindeutig durch x, y bestimmt und offenbar wieder die Wurzeln einer quadratischen Gleichung mit complexen ganzzahligen Coefficienten von gleicher Discriminante wie (11). Es sind daher x', y' , ebenso wie x, y , irrationale von einander verschiedene complexe Grössen.

Wir bezeichnen das auf solche Weise erhaltene Wurzelpaar $(x' y')$ als dem Paare $(x y)$ *benachbart*.

Ein Wurzelpaar $(x_0 y_0)$ heisse reducirt, falls x_0 , nach 1^{ter} Art entwickelt, einen rein periodischen Kettenbruch liefert.

Aus dieser Definition folgt, dass x_0 notwendig dem Raume R angehören muss.

Bilden wir, von einem beliebigen Wurzelpaar $(x y)$ ausgehend, die Reihe von Paaren:

$$(13) \quad (x y), (x' y'), (x'' y'') \dots$$

in welcher jedes Paar dem vorhergehenden benachbart ist, so kommen wir stets auf ein reducirtes Paar, da die Kettenbruch-Entwicklung 1^{ter} Art von quadratischen Irrationalitäten, nach § 8., I. Abschnitt, periodisch wird.

Es sei nun $(x_0 y_0)$ ein in der Reihe (13) vorkommendes reducirtes Wurzelpaar und die Kettenbruch-Entwicklung 1^{ter} Art von x_0 laute:

$$(14) \quad x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, x_0).$$

Dann haben wir, dem Ansatz (12) zufolge:

$$(15) \quad y_0 = a_0 - \frac{1}{y_1}, \quad y_1 = a_1 - \frac{1}{y_2}, \quad \dots, \quad y_n = a_n - \frac{1}{y_{n+1}},$$

also:

$$y_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, y_{n+1})$$

und es ergibt sich ohne Schwierigkeit $y_{n+1} = y_0$.

Setzen wir die Gleichungskette (15) in die Form:

$$(16) \quad \frac{1}{y_0} = a_n - \frac{1}{\frac{1}{y_n}}, \quad \frac{1}{y_n} = a_{n-1} - \frac{1}{\frac{1}{y_{n-1}}}, \quad \dots, \quad \frac{1}{y_1} = a_0 - \frac{1}{\frac{1}{y_0}},$$

so sind dies die Gleichungen für die Kettenbruch-Entwicklung z^{ter} Art der Grösse $\frac{1}{y_0}$.

Beweis: Richten wir den Kettenbruch (15) ein:

$$y_0 = \frac{p_n y_{n+1} - p_{n-1}}{q_n y_{n+1} - q_{n-1}},$$

so folgt:

$$y_{n+1} = y_0 = \frac{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}}{q_n y_0 - p_n},$$

daher:

$$\frac{1}{y_0} = \frac{q_n y_0 - p_n}{q_{n-1} y_0 - p_{n-1}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1} y_0 - p_{n-1} q_{n-1}}$$

oder wenn wir:

$$x_0 = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2},$$

also

$$p_{n-1} q_{n-1} = x_0 q_{n-1}^2 - \theta_{n-1}$$

einsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y_0} &= \frac{q_n}{q_{n-1}} + \frac{1}{q_{n-1}^2} \cdot \frac{1}{y_0 - x_0 + \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2}} \\ &= k_n + \varepsilon_{n-1}. \end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass $k_n = \frac{1}{y_0} - \varepsilon_{n-1}$ für jeden Wert von n ins Innere des Kreisgebiets a_n fällt und dass ε_{n-1} mit wachsendem n dem absoluten Betrage nach unter alle Grenzen sinkt. (I. Abschn. § 6.)

Da nun $\frac{1}{y_0}$ periodisch immer wieder in dem Ansatz (16) auftritt, wenn wir in (14) mehr und mehr Perioden von x_0 einsetzen, so kann $\frac{1}{y_0}$ nicht

ausserhalb des Kreisgebiets a_n liegen, sondern nur im Innern oder auf den Begrenzungsbogen dieses Gebiets. Das Analoge gilt für die Grössen $\frac{1}{y_n}, \frac{1}{y_{n-1}}, \dots, \frac{1}{y_1}$, denn wir können unsere ganze Betrachtung ja von jedem der auf (x_0, y_0) folgenden Wurzelpaare ausgehen lassen.

Wir zeigen nun weiter, dass es unmöglich ist, dass $\frac{1}{y_0}$ auf dem Teile der Begrenzung des Kreisgebiets a_n liegt, welcher (nach § 6, Abschnitt I) nicht zu dem Kreisgebiet zu rechnen ist.

Würden wir annehmen, dass $\frac{1}{y_0}$ auf dem nicht zum Kreisgebiet a_n zu rechnenden Teil der Begrenzung fiele, so würde zunächst folgen, dass y_0 im Innern oder auf der Begrenzung des durch die Bogen $P'_{1+i}, P'_{1-i}, P'_{-1+i}, P'_{-1-i}$ gebildeten Kreisbogenvierecks V_0 liegt, und daher $a_0 - y_0 = \frac{1}{y_1}$ in jedem Falle dem Kreisgebiete a_0 angehört.¹

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

- 1) Ist $a_0 \neq 1 \pm i, -1 \pm i$, so folgt, dass y_1 ins Innere oder auf die Begrenzung des Vierecks V_0 fällt, folglich $a_1 - y_1 = \frac{1}{y_2}$ dem Kreisgebiete a_1 angehört.
- 2) Ist $a_0 = 1 + i$, so kann a_1 keine Zahl der Typen $(1-i), (2), (-2i)$ und a_n nicht $1 - i$ sein, denn sowohl die Folge $(a_0 a_1 \dots)$, als auch die Folge $(\dots a_n a_0 \dots)$ muss das Gesetz (B) erfüllen.

Da $a_n \neq 1 - i$ ist, kann y_0 nicht auf P'_{1+i} , daher $a_0 - y_0 = \frac{1}{y_1}$ nicht auf den Rand, sondern nur ins Innere des Kreisgebiets $a_0 = 1 + i$, und folglich y_1 nicht auf die Begrenzung des Zweiecks Z_{1-i} fallen.

Da nun a_1 nicht den Typen $(1-i), (2), (-2i)$ angehört, so ergibt sich, dass $a_1 - y_1 = \frac{1}{y_2}$ dem Kreisgebiet a_1 angehört.

Analog ist die Betrachtung zu führen, falls $a_0 = 1 - i, -1 + i, -1 - i$ angenommen wird.

Schliessen wir jetzt in gleicher Weise auf die Lagen von $\frac{1}{y_3}, \frac{1}{y_4}, \dots$, so kommen wir schliesslich zu dem Resultat, dass $\frac{1}{y_0}$ dem Kreisgebiete a_n

¹ Unter »dem Kreisgebiete angehören« verstehe ich, dass die betreffende Zahl entweder ins Innere oder auf die zum Kreisgebiete zu rechnenden Begrenzungsbogen fällt.

angehören muss, entgegen unsrer Annahme. Wir erkennen also, dass $\frac{1}{y_0}$ und ebenso die Grössen $\frac{1}{y_n}, \frac{1}{y_{n-1}}, \dots$ nicht auf *die* Begrenzungsbogen der Kreisgebiete a_n bezügl. a_{n-1}, a_{n-2}, \dots fallen, welche nicht zu diesen Gebieten zu rechnen sind, dass diese Grössen demnach den betreffenden Kreisgebieten angehören, und dass folglich die Gleichungskette (16) die Kettenbruch-Entwicklung 2^{ter} Art der Grösse $\frac{1}{y_0}$ liefert, nämlich:

$$\frac{1}{y_0} = \left(a_n, a_{n-1}, \dots, a_0, \frac{1}{y_0} \right).$$

Unsere Betrachtung hat uns somit den Satz ergeben:

Ist (x_0, y_0) ein reducirtes Wurzelpaar und lautet die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 :

$$x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, x_0),$$

so lautet die Kettenbruch-Entwicklung zweiter Art des reciproken Wertes von y_0 :

$$\frac{1}{y_0} = \left(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0, \frac{1}{y_0} \right).$$

Wir erkennen ferner, dass $\frac{1}{y_0}$, der Periodicität wegen, nur dann auf den Rand eines Kreisgebiets fallen kann, wenn a_n einen der Werte:

$$2, -2, 2i, -2i, 2 + 2i, 2 - 2i, -2 + 2i, -2 - 2i,$$

(also $2, 2 + 2i$ und deren associirte Werte) besitzt und die Periode (a_0, a_1, \dots, a_n) nur aus Zahlen dieser Reihe zusammengesetzt ist. Ferner folgt, dass y_0 selbst stets ins Innere des Einheitskreises fällt.

§ 3. *Reduction der Formen.*

Die im vorigen Paragraphen aufgestellten Begriffe übertragen wir jetzt auf die quadratischen Formen.

Wir nennen zwei Formen von gleicher Determinante:

$$f = (a, b, c) \quad \text{und} \quad f' = (a', b', c')$$

benachbart, wenn ihre Wurzeln:

$$(x_0 y_0) \quad \text{und} \quad (x'_0 y'_0)$$

benachbarte Paare sind, und bezeichnen eine Form f_n als *reducirt*, wenn ihre Wurzeln $(x_n y_n)$ ein reducirtes Paar bilden.

Eine reducirt Form ist hiernach dadurch charakterisirt, dass die Entwicklung erster Art ihrer ersten Wurzel einen rein periodischen Kettenbruch liefert.

Die erste Wurzel einer reducirt Form gehört dem Raume R , die zweite Wurzel dem Innern des Einheitskreises an.

Ist x_0 die erste Wurzel einer reducirt Form, y_0 deren zweite Wurzel, so ist die Kettenbruch-Entwicklung erster Art von x_0 und diejenige zweiter Art von $\frac{1}{y_0}$ rein periodisch; die eine Periode erhält man aus der andern durch Umkehrung der Aufeinanderfolge der Teilnenner.

Da die ersten Wurzeln x_0 und x'_0 von benachbarten Formen durch die Relation verbunden sind:

$$x_0 = a_0 - \frac{1}{x'_0} = \frac{a_0 x'_0 - 1}{x'_0},$$

so sind x_0 und x'_0 vollständig äquivalente Zahlen, und daher gilt der Satz:

Benachbarte Formen sind (vollständig) äquivalent.

Bilden wir, von dem Wurzelpaar $(x_0 y_0)$ einer gegebenen Form f ausgehend, die Reihe der benachbarten Paare:

$$(x_0 y_0), (x_1 y_1), \dots, (x_n y_n), (x_{n+1} y_{n+1}), \dots,$$

so kommen wir stets auf ein reducirtes Paar, von welchem ab nur noch reducirt Paare folgen; wir haben also den Satz:

Jede quadratische Form f ist einer reducirt Form f_{n+1} (vollständig) äquivalent.

Entwickelt man die erste Wurzel x_0 der Form f in einen Kettenbruch erster Art:

$$x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, x_{n+1}),$$

so ist von einem bestimmten Werte von n ab, x_{n+1} stets erste Wurzel einer reducirten Form f_{n+1} , und die Form f geht durch die der ersten oder zweiten Classe angehörige Substitution:

$$x = p_n x' - p_{n-1} y',$$

$$y = q_n x' - q_{n-1} y'$$

in die reducirte Form f_{n+1} über.

Wir beweisen weiter, dass es nur eine endliche Anzahl von reducirten Formen einer bestimmten Determinante D giebt.

Sind x_0, y_0 die Wurzeln einer reducirten Form (a, b, c) der Determinante D , so ist, nach I. Abschnitt, § 8, S. 256:

$$(17) \quad \begin{aligned} |x_0 - y_0| &\geq \left| \frac{1}{\theta_n} \right| - |\varepsilon_n|, \\ \left| \frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0} \right| &\geq \left| \frac{1}{\theta_{n-1}} \right| - |\varepsilon'_{n-1}|, \end{aligned}$$

und $|\varepsilon_n|$ und $|\varepsilon'_{n-1}|$ sinken mit wachsendem n unter alle Grenzen.

Nun ist (siehe Gleichung (8), S. 254) allgemein:

$$\left| \frac{1}{\theta_n} \right| = \left| x_{n+1} - \frac{q_{n-1}}{q_n} \right|,$$

daher:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\theta_n} \right| &\geq |x_{n+1}| - \left| \frac{q_{n-1}}{q_n} \right| \\ &> |x_{n+1}| - 1. \end{aligned}$$

Nehmen wir für x_{n+1} den Rest aus der Periode von x_0 , welcher den kleinsten absoluten Betrag besitzt und bezeichnen diesen absoluten Betrag mit k , wo $k > 1$, so sehen wir, dass für jeden Wert von n :

$$\left| \frac{1}{\theta_n} \right| > k', \quad (k' = k - 1)$$

ist, wo k' eine von null verschiedene feste positive Zahl bedeutet. Be-

zeichnen wir nun mit k'' eine positive Zahl, die um beliebig wenig kleiner ist als k' , so können wir die Ungleichungen (17) ersetzen durch

$$(18) \quad \begin{aligned} |x_0 - y_0| &> k'', \\ \left| \frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0} \right| &> k''. \end{aligned}$$

Da

$$|x_0 - y_0| = \frac{2|\sqrt{D}|}{|a|}, \quad \left| \frac{1}{x_0} - \frac{1}{y_0} \right| = \frac{2|\sqrt{D}|}{|c|}$$

ist, so sind $|a|$ und $|c|$ demnach kleiner als $\frac{2|\sqrt{D}|}{k''}$, folglich können a und c und daher auch $b = \sqrt{D + ac}$ nur eine endliche Zahl von verschiedenen Werten besitzen. Hieraus folgt der Satz:

Es giebt nur endlich viele reducirte Formen der Determinante D .

Bilden wir von dem Wurzelpaar (x_0, y_0) einer reducirten Form f_0 ausgehend, die Reihe der benachbarten Paare:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), (x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n), \dots,$$

so ist jedes Glied dieser rein periodischen Reihe Wurzelpaar einer reducirten zu f_0 äquivalenten Form. Da die Anzahl der reducirten Formen endlich ist, ergibt sich hieraus der Satz:

Die reducirten Formen einer bestimmten Determinante D gruppieren sich in Perioden von unter einander äquivalenten Formen.

§ 4. Äquivalenz von reducirten Formen gleicher Determinante.

Es bleibt nun noch die Frage zu beantworten: Wann sind zwei reducirte Formen von gleicher Determinante, welche verschiedenen Perioden angehören, äquivalent?

Da das Charakteristikum für die vollständige Äquivalenz zweier Formen die vollständige Äquivalenz ihrer ersten Wurzeln ist, so können wir obige Frage auch so formulieren:

In welchem Zusammenhange steht die vollständige Äquivalenz zweier von einander verschiedener quadratischer Irrationalitäten x_0 und x'_0 , welche, nach erster Art entwickelt, rein periodische Kettenbrüche liefern, mit diesen Kettenbruch-Entwicklungen?

Zur Beantwortung dieser Frage beweisen wir die folgenden zwei Sätze:

I. *Entwickelt man zwei beliebige quadratische Irrationalitäten x_0 und x'_0 in Kettenbrüche erster Art, und ist einer der in der einen Entwicklung auftretenden Reste x_i gleich oder entgegengesetzt gleich einem der in der andern Entwicklung auftretenden Reste x'_i , so sind x_0 und x'_0 vollständig äquivalente Grössen.*

II. *Es seien x_0 und x'_0 zwei vollständig äquivalente quadratische Irrationalitäten, deren Kettenbruch-Entwicklungen erster Art als rein periodisch vorausgesetzt werden:*

$$(19) \quad x_0 = (\overline{a_0, a_1, \dots, a_n}, x_0),$$

$$(20) \quad x'_0 = (\overline{a'_0, a'_1, \dots, a'_m}, x'_0) = (a'_0, a'_1, \dots, a'_r, x'_{r+1}),$$

so kann man den Index r stets so wählen, dass

$$\text{entweder } x'_{r+1} = x_0$$

$$\text{oder } x'_{r+1} = -x_0$$

wird und dass durch Elimination von x_0 zwischen den Gleichungen (19) und (20) die Äquivalenzbeziehung zwischen x_0 und x'_0 resultirt.

Aus diesen beiden Sätzen ergiebt sich als Folgerung der Satz:

III. *Für die vollständige Äquivalenz zweier quadratischer Irrationalitäten x_0 und x'_0 , welche nach erster Art entwickelt rein periodische Kettenbrüche liefern, ist notwendig und hinreichend, dass die eine der Irrationalitäten, selbst oder mit entgegengesetztem Vorzeichen, als Rest in der Kettenbruch-Entwicklung der andern auftritt.*

Aus diesem Satze folgt endlich:

IV. *Die ersten Wurzeln von reducirten Formen, und daher auch reducirte Formen selbst, sind dann und nur dann vollständig äquivalent, wenn die Perioden der Kettenbruch-Entwicklung erster Art der ersten Wurzeln ent-*

weder die gleichen oder die entgegengesetzt gleichen Teilnenner, in der gleichen oder in cyklisch vertauschter Reihenfolge enthalten.

Beweis des Satzes I:

Es sei, nach 1^{ter} Art entwickelt:

$$x'_0 = (a'_0, a'_1, \dots, a'_{k-1}, x'_k); \quad x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_{i-1}, x_i)$$

dann ergibt sich durch Einrichtung:

$$x'_k = \frac{q'_{k-2}x'_0 - p'_{k-2}}{q'_{k-1}x'_0 - p'_{k-1}}; \quad x_i = \frac{q_{i-2}x_0 - p_{i-2}}{q_{i-1}x_0 - p_{i-1}}.$$

Nach Voraussetzung haben wir daher:

$$\frac{q'_{k-2}x'_0 - p'_{k-2}}{q'_{k-1}x'_0 - p'_{k-1}} = \pm \frac{q_{i-2}x_0 - p_{i-2}}{q_{i-1}x_0 - p_{i-1}}.$$

Gilt das obere Vorzeichen, so ergibt sich:

$$x'_0 = \frac{\alpha x_0 - \beta}{\gamma x_0 - \delta},$$

wo

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{k-2} & p'_{k-1} \\ q'_{k-2} & q'_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{i-1} & p_{i-1} \\ q_{i-2} & p_{i-2} \end{pmatrix};$$

gilt das untere Vorzeichen, so erhalten wir:

$$x'_0 = \frac{\alpha(-x_0) - \beta}{\gamma(-x_0) - \delta} = \frac{i\alpha'x_0 - (-i\beta')}{i\gamma'x_0 - (-i\delta')},$$

wo

$$\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_{k-2} & p'_{k-1} \\ q'_{k-2} & q'_{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -q_{i-1} & p_{i-1} \\ q_{i-2} & -p_{i-2} \end{pmatrix}.$$

Da aufeinanderfolgende Nährungsbrüche unsrer Kettenbruch-Entwicklung Substitutionen $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$ der ersten oder zweiten Classe liefern, so sieht man, dass $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{pmatrix}$ bezgl. $\begin{pmatrix} i\alpha' & -i\beta' \\ i\gamma' & -i\delta' \end{pmatrix}$ der ersten oder zweiten

Reduction der quadratischen Formen mit complexen Coefficienten und Variabeln. 277
 Classe angehören¹ und demnach x'_0 und x_0 vollständig äquivalente Zahlen
 sind.

Beweis des Satzes II:

Die Äquivalenz-Beziehung zwischen x_0 und x'_0 laute:

$$(21) \quad x'_0 = \frac{\alpha x_0 - \beta}{\gamma x_0 - \delta}.$$

Wir richten den Kettenbruch (19) ein:

$$(22) \quad x_0 = \frac{p_n x_0 - p_{n-1}}{q_n x_0 - q_{n-1}}$$

und setzen diesen Wert von x_0 in (21) ein. Dadurch erhalten wir:

$$(23) \quad x'_0 = \frac{p x_0 - p'}{q x_0 - q'},$$

wo wir zur Abkürzung

$$(24) \quad \begin{aligned} \alpha p_n - \beta q_n &= p, & \alpha p_{n-1} - \beta q_{n-1} &= p', \\ \gamma p_n - \delta q_n &= q, & \gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1} &= q' \end{aligned}$$

geschrieben haben.

Die Gleichung (23) werden wir auch in der Form benutzen:

$$(23_a) \quad x'_0 = \frac{ip(-x_0) - (-ip')}{iq(-x_0) - (-iq')}.$$

Wir entwickeln nun $\frac{p}{q}$ in einen Kettenbruch i^{ter} Art:

$$(25) \quad \frac{p}{q} = (b_0, b_1, \dots, b_{r-1}, b_r).$$

Wenn wir diesen Kettenbruch wieder einrichten, erhalten wir einen der vier Brüche $\frac{+p}{+q}$, $\frac{+ip}{+iq}$, $\frac{-p}{-q}$, $\frac{-ip}{-iq}$. Von diesen vier Möglichkeiten können wir die letzten beiden unberücksichtigt lassen, indem wir festsetzen, dass in

¹ Vergleiche S. 265.

diesen Fällen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ durch $-\alpha, -\beta, -\gamma, -\delta$ ersetzt werden sollen, wodurch $-p$ und $-q$ an die Stelle von $+p$ und $+q$ treten.

Ferner wollen wir den Kettenbruch (25) in den nachfolgenden Fällen durch einen in den letzten zwei Teilennern abgeänderten gleichwertigen Kettenbruch ersetzt denken:

I. Wenn die Einrichtung $\frac{p}{q}$ ergibt, soll (b_{r-1}, b_r) ersetzt werden durch:

- 1) $(b_{r-1} - (1-i), -1-i)$, falls $b_r = 1+i$ und zugleich a_n entweder $= -1-i$
oder eine der Zahlen: $-2, -2-2i, -2i$
- 2) $(b_{r-1} + (1-i), 1+i)$, falls $b_r = -1-i$ und zugleich a_n entweder $= 1+i$
oder eine der Zahlen: $2, 2+2i, 2i$
- 3) $(b_{r-1} - (1+i), -1+i)$, falls $b_r = 1-i$ und zugleich a_n entweder $= -1+i$
oder eine der Zahlen: $-2, -2+2i, 2i$
- 4) $(b_{r-1} + (1+i), 1-i)$, falls $b_r = -1+i$ und zugleich a_n entweder $= 1-i$
oder eine der Zahlen: $2, 2-2i, -2i$

II. Wenn die Einrichtung $\frac{ip}{iq}$ ergibt, soll (b_{r-1}, b_r) ersetzt werden durch:

- 1) $(b_{r-1} - (1-i), -1-i)$, falls $b_r = 1+i$ und zugleich a_n entweder $= 1+i$
oder eine der Zahlen: $2, 2+2i, 2i$
- 2) $(b_{r-1} + (1-i), 1+i)$, falls $b_r = -1-i$ und zugleich a_n entweder $= -1-i$
oder eine der Zahlen: $-2, -2-2i, -2i$
- 3) $(b_{r-1} - (1+i), -1+i)$, falls $b_r = 1-i$ und zugleich a_n entweder $= 1-i$
oder eine der Zahlen: $2, 2-2i, -2i$
- 4) $(b_{r-1} + (1+i), 1-i)$, falls $b_r = -1+i$ und zugleich a_n entweder $= -1+i$
oder eine der Zahlen: $-2, -2+2i, 2i$

Die Veränderung der zwei letzten Teilennern von (25), wenn a_n einen der Werte $2, 2+2i$ oder einen zu diesen associirten hat, ist in der oben

angegebenen Weise nur dann erforderlich, wenn die Periode (a_0, a_1, \dots, a_n) nur aus den Zahlen $2, 2 + 2i$ resp. den associirten besteht.

Die Abänderung der letzten zwei Teilnenner ändert den Wert von (25) nicht, nur die Einrichtung des abgeänderten Bruches liefert im Falle I: $\frac{-p}{-q}$, im Falle II: $\frac{-ip}{-iq}$, was durch unsere Festsetzung über $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ wieder auf die gleichen Fälle zurückführt.

Ferner wollen wir zeigen, dass die abgeänderten Kettenbrüche in der Aufeinanderfolge ihrer Teilnenner das Gesetz (B) erfüllen.

In der That verstossen die letzten drei Teilnenner nicht gegen dieses Gesetz. Ist z. B. $b_r = 1 + i$, so ist:

$$1) \ b_{r-1} - (1 - i) \neq 0, \text{ weil } b_{r-1} \neq 1 - i \text{ ist,}$$

$$2) \ b_{r-1} - (1 - i) \neq -1 + i, \text{ weil } b_{r-1} \neq 0 \text{ ist,}$$

3) $b_{r-2}, b_{r-1} - (1 - i)$ eine richtige Folge, denn nehmen wir etwa $b_{r-2} = 1 + i$ an, so gehört b_{r-1} nicht zu den Typen $(2), (1 - i), (-2i)$ und das Nämliche gilt auch von $b_{r-1} - (1 - i)$.

Analog sieht man in den übrigen Fällen, dass das Gesetz (B) erfüllt bleibt.

Nach diesen Vorbemerkungen betrachten wir nun weiter die zwei bei der Einrichtung von (25) zu unterscheidenden Fälle:

I) Die Einrichtung ergibt $\frac{+p}{+q}$. Der vorletzte Näherungsbruch sei $\frac{p''}{q''}$. Dann haben wir:

$$p''q - pq'' = 1,$$

und ferner aus (24):

$$p'q - pq' = (\beta\gamma - \alpha\delta)[p_{n-1}q_n - p_nq_{n-1}] = 1,$$

daher:

$$(p'' - p')q = (q'' - q')p,$$

woraus folgt:

$$\frac{p}{q} = \frac{p'' - p'}{q'' - q'}$$

und daher:

$$(28) \quad p' = p'' - tp,$$

$$(29) \quad q' = q'' - tq,$$

wo t eine complexe ganze Zahl bedeutet.

Setzen wir diese Werte von p' und q' in (23) ein, so erhalten wir:

$$x'_0 = \frac{p(x_0 + t) - p''}{q(x_0 + t) - q''},$$

woraus sich der Kettenbruch ergibt:

$$(30) \quad x'_0 = (b'_0, b_1, \dots, b_r, x_0 + t).$$

II) Die Einrichtung ergibt $\frac{+ip}{+iq}$. Der vorletzte Naherungsbruch sei $\frac{p'''}{q'''}$. Dann haben wir:

$$p'''iq - q'''ip = 1,$$

ferner, wie oben:

$$p'q - q'p = 1$$

daher:

$$(ip''' - p')q = (iq''' - q')p$$

und folglich:

$$(28_a) \quad p' = ip''' - t_1p, \quad \text{daher} \quad -ip' = p''' + t_1ip,$$

$$(29_a) \quad q' = iq''' - t_1q, \quad \text{»} \quad -iq' = q''' + t_1iq,$$

wo t_1 eine complexe ganze Zahl bedeutet.

Diese Werte in (23_a) eingesetzt, giebt:

$$x'_0 = \frac{ip(-x_0 - t_1) - p'''}{iq(-x_0 - t_1) - q'''}$$

woraus folgt:

$$(30_a) \quad x'_0 = (b_0, b_1, \dots, b_r, (-x_0 - t_1)).$$

Wir haben nun zu untersuchen, ob im Falle I Gleichung (30), im Falle II Gleichung (30_a) die Kettenbruch-Entwicklung 1^{ter} Art der Grösse x'_0 darstellen.

Zunächst untersuchen wir die Zahlen b_r und t (bezgl. t_1):

Da die Coefficienten der Substitution $\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$ durch Composition von $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1} \end{pmatrix}$ entstehen und die beiden letzteren Substitutionen der ersten oder zweiten Classe angehören, so folgt, dass für aufeinanderfolgende Werte von n : $\begin{pmatrix} p & p' \\ q & q' \end{pmatrix}$ abwechselnd der ersten und zweiten Classe angehört und daher $\frac{p}{q}$ und $\frac{p'}{q'}$ abwechselnd von der Form $\frac{k(1+i)}{k_1(1+i)-1}$ und $\frac{k'(1+i)-1}{k'_1(1+i)}$ sind. Hieraus schliessen wir nach dem letzten Satze § 5, I. Abschnitt, dass $b_r \equiv 0 \pmod{1+i}$ sein muss.

Ferner ergibt sich, wie folgt, dass auch die complexe ganze Zahl t nur $\equiv 0 \pmod{1+i}$ sein kann.

Es ist $p'' \equiv p' \pmod{1+i}$ und $q'' \equiv q' \pmod{1+i}$. Ist nun

$$p'' \equiv p' \equiv 0 \pmod{1+i},$$

so ist $p \equiv 1 \pmod{1+i}$ und daher, wegen (28), $t \equiv 0 \pmod{1+i}$; ist aber $p'' \equiv 1 \pmod{1+i}$, so ist $q'' \equiv q' \equiv 0 \pmod{1+i}$ und $q \equiv 1 \pmod{1+i}$, daher, wegen (29), $t \equiv 0 \pmod{1+i}$.

Die analogen Überlegungen liefern im Falle II: $t_1 \equiv 0 \pmod{1+i}$.

Nun zeigen wir, dass von einem gewissen Index n ab, die Zahl t nur noch die Werte 0 , $1 \pm i$, $-1 \pm i$, ± 2 , $\pm 2i$ annehmen kann.

Aus (29) folgt: $t = \frac{q'' - q'}{q}$, demnach ist:

$$|t| = \left| \frac{q'' - q'}{q} \right| \leq \left| \frac{q''}{q} \right| + \left| \frac{q'}{q} \right|.$$

Nun ist $\left| \frac{q''}{q} \right| < 1$, für jedes n , und:

$$\frac{q'}{q} = \frac{\gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1}}{\gamma p_n - \delta q_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{\gamma}{q_n(\gamma p_n - \delta q_n)}$$

oder wenn wir

$$x_0 - \frac{p_n}{q_n} = \frac{\theta_n}{q_n^2},$$

also:

$$p_n q_n = x_0 q_n^2 - \theta_n$$

einführen:

$$\frac{q'}{q} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \frac{\gamma}{q_n^2(\gamma x_0 - \delta) - \gamma \theta_n} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \varepsilon_n,$$

wo ε_n mit wachsendem n , dem absoluten Betrage nach, unter alle Grenzen sinkt. Da $\left| \frac{q_{n-1}}{q_n} \right| < 1$ ist, so folgt:

$$|t| < 2 + |\varepsilon_n|$$

und daher für genügend grosses n :

$$|t| \leq 2.$$

Analog ergibt sich, dass für genügend grosses n : $|t_1| \leq 2$ sein muss.

Um den Wert von t weiter zu untersuchen, müssen wir die Grössen $\frac{q''}{q}$ und $\frac{q'}{q}$ näher betrachten.

Zur Abkürzung der Ausdrucksweise wollen wir das Kreisgebiet a_n mit K_{a_n} und dasjenige Gebiet, welches wir erhalten, wenn wir zu jedem Punkte x von K_{a_n} den reciproken Wert $\frac{1}{x}$ bestimmen, als das Gebiet K'_{a_n} bezeichnen.

Ferner wollen wir $q = \gamma p_n - \delta q_n$ in seiner Abhängigkeit von n mit $q^{(n)}$ und $q' = \gamma p_{n-1} - \delta q_{n-1}$ mit $q^{(n-1)}$ bezeichnen.

a) Im I. Abschnitt, § 6, haben wir bewiesen, dass $\frac{q_n}{q_{n-1}}$ stets ins Innere des Gebietes K_{a_n} fällt. Hieraus folgt, dass $\frac{q''}{q}$ ins Innere des Gebietes K'_{a_n} fällt.

b) Da $p_n = a_n p_{n-1} - p_{n-2}$ und $q_n = a_n q_{n-1} - q_{n-2}$ ist, so haben wir:

$$q^{(n)} = a_n q^{(n-1)} - q^{(n-2)}$$

und daher, wenn wir $\frac{q^{(n)}}{q^{(n-1)}}$ mit $k^{(n)}$ bezeichnen:

$$k^{(1)} = a_1 - \frac{1}{k^{(0)}}, \quad k^{(2)} = a_2 - \frac{1}{k^{(1)}}, \quad \dots, \quad k^{(n)} = a_n - \frac{1}{k^{(n-1)}}, \quad \dots,$$

wo

$$k^{(0)} = \frac{\gamma p_0 - \delta q_0}{\gamma p_{-1} - \delta q_{-1}} = \frac{\gamma a_0 - \delta}{\gamma}$$

zu setzen ist.

Von den Grössen $k^{(n)}$ zeigen wir, dass wenn eine der Grössen $k^{(i)}$ ins Innere des Kreisgebiets a_i fällt, auch alle folgenden Grössen $k^{(i+1)}, k^{(i+2)}, \dots$ ins Innere der Kreisgebiete a_{i+1} , resp. $a_{i+2} \dots$ fallen.

In der That, wenn $k^{(n-1)}$ ins Innere von $K_{a_{n-1}}$ fällt, so fällt $-\frac{1}{\overline{k^{(n-1)}}$ ins Innere des Kreisbogenvierecks V_0 ,¹ falls $a_{n-1} \neq 1 \pm i$, $-1 \pm i$ ist, und dann fällt $k^{(n)} = a_n - \frac{1}{\overline{k^{(n-1)}}$ ins Innere von K_{a_n} .

Ist aber $a_{n-1} = 1 + i$, so gehört a_n nicht den Typen $(1-i), (2), (-2i)$ an; $-\frac{1}{\overline{k^{(n-1)}}$ fällt ins Innere des Zweiecks Z_{-1+i} und daher $k^{(n)}$ ins Innere von K_{a_n} .

Nun ist:

$$\frac{q^{(n)}}{q^{(n-1)}} = \frac{q_n}{q_{n-1}} - \varepsilon'_{n-1}$$

(was sich analog ergibt, wie oben: $\frac{q'}{q} = \frac{q_{n-1}}{q_n} + \varepsilon_n$); ferner ist nach § 2, S. 269:

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = \frac{1}{y_0} - \varepsilon_{n-1},$$

wo y_0 die zweite Wurzel der quadratischen Gleichung bedeutet, welcher x_0 genügt. Es folgt hieraus:

$$k^{(n)} = \frac{q^{(n)}}{q^{(n-1)}} = \frac{1}{y_0} - \varepsilon, \quad \text{wo} \quad \varepsilon = \frac{1}{q_{n-1}^2} \left[\frac{1}{(y_0 - x_0) + \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2}} + \frac{\gamma}{(\gamma x_0 - \delta) - \gamma \frac{\theta_{n-1}}{q_{n-1}^2}} \right],$$

dem absoluten Betrage nach, mit wachsendem n beliebig klein wird. Wir schliessen aus dieser Gleichung, dass der Punkt $k^{(n)}$ immer näher an den

¹ V_0 ist das Kreisbogenviereck, welches durch Vervollständigung der Peripherien der Kreisgebiete $1 \pm i, -1 \pm i$ im Einheitskreise entsteht.

Punkt $\frac{1}{y_0}$ heranrückt, wenn wir mehr und mehr Perioden a_0, a_1, \dots, a_n von x_0 in (19) einsetzen.

Liegt nun $\frac{1}{y_0}$ im Innern des Kreisgebiets a_n , so können wir es durch genügend grosse Wahl von n erreichen, dass $k^{(n)} = \frac{q}{q'}$ ebenfalls ins Innere von K_{a_n} , $\frac{q'}{q}$ daher ins Innere von K'_{a_n} fällt.

Liegt aber $\frac{1}{y_0}$ auf der zu K_{a_n} gehörigen Begrenzung, was involvirt, dass die Periode a_0, a_1, \dots, a_n nur aus den Zahlen $2, 2 + 2i$ und den associirten zusammengesetzt ist, so kann $k^{(n)} = \frac{q}{q'}$ auch für genügend grosses n auf die Begrenzung von K_{a_n} oder in die Nachbar-Kreisgebiete, also in $K_{1 \pm i}, K_{-1 \pm i}$ fallen. $\frac{q'}{q}$ würde dann entweder in die Zweiecke $Z_{1 \pm i}, Z_{-1 \pm i}$ oder auf deren gegen den Nullpunkt zu liegenden Begrenzungsbogen fallen.

Aus den unter a) und b) angestellten Betrachtungen ergibt sich, dass für genügend grosses n aus $\frac{q''}{q} - \frac{q'}{q}$ nur dann eine von null verschiedene complexe ganze Zahl t resultiren kann, wenn sowohl $\frac{q''}{q}$, als auch $\frac{-q'}{q}$ ins Innere des nämlichen Zweiecks Z fallen.

Wenn wir noch die analogen Betrachtungen im Falle II. für $-t_1$ anstellen, so erhalten wir folgendes Ergebniss:

Im Falle I. kann $t = 1 - i, -1 + i, 1 + i, -1 - i$ resultiren, wenn b_r und a_n die auf Seite 278 unter I. 1), 2), 3), 4) angegebenen Werte haben; im Falle II. kann $-t_1 = 1 - i, -1 + i, 1 + i, -1 - i$ resultiren, wenn b_r und a_n die unter II. 1), 2), 3), 4) angegebenen Werte besitzen. Durch die nach unsern Festsetzungen dann eintretende Veränderung der letzten zwei Teilnenner des Kettenbruchs (25) wird aber erreicht, dass auch in diesen Fällen t , resp. $-t_1$ den Wert Null erhält.

Wir sehen hiernach, dass wir immer, bei genügend grosser Wahl von n , annehmen können, dass t , bezgl. $-t_1$ nur noch den Wert null erhalten.

Nun folgt aus $t = \frac{q''}{q} - \frac{q'}{q} = 0$, dass $\frac{q''}{q} = \frac{q'}{q}$ und demnach $b_r = a_n$ sein muss; ebenso folgt im Falle II. aus $-t_1 = 0$, dass $b_r = -a_n$ sein muss.

Hiernach lauten jetzt für genügend grosses n unsere Kettenbrüche (30), bezgl. (30_a):

$$\text{Fall I: (30)} \quad x'_0 = (b_0, b_1, \dots, b_{r-1}, a_n, x_0),$$

$$\text{Fall II: (30}_a) \quad x'_0 = (b_0, b_1, \dots, b_{r-1}, -a_n, -x_0).$$

Wenn nun x_0 weder auf einem der Bogen $B_{1\pm i}, B_{-1\pm i}$, noch auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt, so stellt (30) bezgl. (30_a) die Entwicklung erster Art von x'_0 dar, nach Satz III., I. Abschnitt, § 4, dessen Voraussetzungen sämtlich erfüllt werden.

Da wir durch Elimination von x_0 zwischen der von den beiden Gleichungen (30) und (30_a) vorliegenden und der Gleichung (19) auf die Äquivalenzbeziehung zwischen x_0 und x'_0 (Gleichung 21) zurückgeführt werden müssen, so ist Satz II. für diesen Fall vollständig bewiesen.

Hieraus schliessen wir für die weitere Betrachtung, dass wenn x'_0 und x_0 äquivalent sind, diese Grössen entweder beide B - oder G -Entwicklungen sein müssen, oder beide nicht. In der That, wäre eine der Grössen, etwa x_0 , keine B - oder G -Entwicklung, so würde aus dem bisher Bewiesenen folgen, dass $\pm x_0$ ein Rest der Entwicklung erster Art von x'_0 sein müsste, was nicht möglich ist, wenn x'_0 eine B - oder G -Entwicklung ist.

Wir haben hiernach die Gleichungen (30) bezgl. (30_a) nur noch für den Fall zu untersuchen, wo x'_0 und x_0 B - bezgl. G -Entwicklungen sind. Wir können ferner annehmen, dass beide Grössen auf den Bogen $B_{1\pm i}, B_{-1\pm i}$ liegen, da wir andernfalls die Betrachtung an die nächstfolgenden Reste x'_1 bezgl. x_1 anknüpfen können.

Wir wollen nun den restlichen Nachweis für unsern Satz II. auf die Gleichung (30) beschränken, da im Falle II. (30_a) die ganz analogen Überlegungen zum Ziele führen.

Da x'_0 auf einem der Bogen $B_{1\pm i}, B_{-1\pm i}$ liegt, so können wir durch genügend grosse Wahl von n erreichen, dass der erste Teilnenner der Entwicklung von $\frac{p}{q} = (b_0, b_1, \dots, b_r)$ mit dem ersten Teilnenner a'_0 der Entwicklung von x'_0 übereinstimmt.

Um dies zu zeigen, bilden wir:

$$x'_0 - \frac{p}{q} = \frac{p(x_0 + t) - p''}{q(x_0 + t) - q''} - \frac{p}{q} = \frac{-1}{q^2 \left[x_0 + t - \frac{q''}{q} \right]}.$$

Da $q = \gamma p_n - \delta q_n$ und $p_n = x_0 q_n - \frac{\theta_n}{q_n}$ ist, so folgt:

$$q = q_n(\gamma x_0 - \delta) - \gamma \frac{\theta_n}{q_n}$$

und hieraus, da $\left| \frac{\theta_n}{q_n} \right| < 1$ ist (Siehe S. 249):

$$|q| > |q_n| |\gamma x_0 - \delta| - |\gamma|.$$

Diese Ungleichung zeigt, dass $|q|$ mit n über alle Grenzen wächst. Da nun $\left| \frac{q'}{q} \right|$ stets < 1 ist und $|x_0 + t|$ für genügend grosses n unterhalb einer festen Zahl bleibt, so sehen wir, dass der Punkt $\frac{p}{q}$ mit wachsendem n , so nahe an den Punkt x'_0 heranrückt, wie wir wollen. Wir können es also erreichen, dass $b_0 = a'_0$ wird.

Nehmen wir n entsprechend gross gewählt an, so lautet die Gleichung (30) in unserm Falle:

$$x'_0 = (a'_0, b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, a_n, x_0),$$

wo x_0 auf einem der Bogen $B_{1 \pm i}, B_{-1 \pm i}$ liegt; oder wenn wir noch $x_n = (a_n, x_0)$ einführen:

$$x'_0 = (a'_0, b_1, b_2, \dots, b_{r-1}, x_n),$$

wo x_n nun auf einer der Geraden $x \pm y = \pm 1$ liegt.

Zum Beweise, dass diese Gleichung die Entwicklung erster Art von x'_0 darstellt, zerlegen wir sie in die Kette von Gleichungen:

$$x'_0 = a'_0 - \frac{1}{y_1}, \quad y_1 = b_1 - \frac{1}{y_2}, \quad \dots, \quad y_{r-1} = b_{r-1} - \frac{1}{x_n}.$$

Da x_n auf eine der Geraden $x \pm y = \pm 1$ fällt, so fällt $-\frac{1}{x_n}$ ins Innere des Quadrates \circ , folglich gehört y_{r-1} zweifellos dem Raume R an, wenn $b_{r-1} \neq 1 \pm i, -1 \pm i$ ist. Ist aber b_{r-1} etwa $= 1 + i$, so gehört $b_r = a_n$ nicht den Typen $(2), (1 - i), (-2i)$ an, folglich liegt $-\frac{1}{x_n}$ nicht in dem von B_{-1-i}^0 und Seite $-\overline{1}, -\overline{i}$ begrenzten Teile des Quadrats \circ und daher gehört y_{r-1} auch in diesem Falle dem Raume R an.

Da x_n und y_{r-1} dem Raume R angehören, so folgt nach Satz II. a), I. Abschnitt § 4, dass auch y_{r-2}, \dots, y_2, y_1 dem Raume R angehören. Hieraus folgt, dass $-\frac{1}{y_1}, -\frac{1}{y_2}, \dots, -\frac{1}{y_{r-2}}$ ins Innere oder auf die Seiten des Quadrates \circ fallen.

Da $x'_0 = a'_0 - \frac{1}{y_1} = a'_0 - \frac{1}{x'_1}$, so haben wir:

$$y_1 = x'_1,$$

daher:

$$b_1 - \frac{1}{y_2} = a'_1 - \frac{1}{x'_2}$$

und folglich:

$$\frac{1}{x'_2} - \frac{1}{y_2} = a'_1 - b_1 = g,$$

wo g eine complexe durch $1 + i$ teilbare ganze Zahl bedeutet. Diese Zahl g kann nur null sein. In der That, da $\frac{1}{x'_2}$ und $\frac{1}{y_2}$ dem Quadrate \circ angehören, so kann g nur entweder \circ oder eine der Zahlen $1 \pm i, -1 \pm i$ sein. Da aber $\frac{1}{x'_2}$ auf einer Seite des Quadrates \circ liegt, so kann g nur dann einen der letzten vier Werthe erhalten, wenn $\frac{1}{x'_2}$ und $-\frac{1}{y_2}$ auf derselben Seite des Quadrats \circ liegen. Angenommen $\frac{1}{x'_2}$ und $-\frac{1}{y_2}$ lägen auf Seite $\overline{1, +i}$, so wäre g null oder $1 + i$; wenn nun $g = 1 + i$ wäre, so hätte man x'_2 auf B_{1-i} , x'_1 auf $x + y = -1$, also $a'_2 = 1 - i$ und $a'_1 = k(1 - i)$, $a'_0 = -1 + i$. Ferner $a'_1 - b_1 = k(1 - i) - b_1 = 1 + i$, daher $b_1 = k(1 - i) - (1 + i)$ zu den Typen $(-2), (-1 - i), (-2i)$ gehörig, was nicht möglich ist, weil $(a'_0, b_1) = (-1 + i, b_1)$ das Folgesetz (B) erfüllen. Es kann demnach g nur null sein. Hieraus folgt $b_1 = a'_1, y_2 = x'_2$. Das gleiche Resultat ergibt sich, wenn $\frac{1}{x'_2}$ und $-\frac{1}{y_2}$ auf einer andern Seite des Quadrats \circ angenommen werden.

In analoger Weise weiter schliessend, ergibt sich:

$$b_2 = a'_2, \quad b_3 = a'_3, \quad \dots, \quad b_{r-1} = a'_{r-1}, \quad x_n = x'_r$$

und daher ist die Entwicklung $(b_0, b_1, \dots, b_{r-1}x_n)$ identisch mit $(a'_0, a'_1, \dots, a'_{r-1}x'_r)$. Hiermit ist nun unser Satz II. vollständig bewiesen.

Um die im Anfang dieses Paragraphen aus den Sätzen I. und II. gezogene Folgerung IV. noch prägnanter aussprechen zu können, wollen wir noch eine Bezeichnung einführen.

Wenn $(x_0y_0), (x_1y_1), \dots, (x_ny_n)$ die Wurzelpaare sind, welche eine Periode reducirter Formen der Determinante D constituiren, so wollen wir die den Paaren $(-x_0, -y_0), (-x_1, -y_1), \dots, (-x_n, -y_n)$ entsprechende Formenperiode als die zu der ersteren *äquivalente* Periode bezeichnen. Dann können wir sagen:

Reducirte Formen gleicher Determinante sind dann und nur dann vollständig äquivalent, wenn sie derselben Formenperiode oder äquivalenten Formenperioden angehören.

Mit diesem Satze ist das in der Einleitung des II^{ten} Abschnittes bezeichnete erste Problem gelöst.

Sind irgend zwei Formen, gleicher Determinante, f und f' gegeben, so haben wir die ersten Wurzeln der Formen:

$$f \quad \frac{f\left(\begin{smallmatrix} \text{I} & \text{I} \\ \text{I} & \text{O} \end{smallmatrix}\right)}{x_0} \quad \frac{f\left(\begin{smallmatrix} \text{I} & \text{O} \\ \text{I} & -\text{I} \end{smallmatrix}\right)}{x^{(2)}} \quad \text{und} \quad f',$$

welche mit:

$$x_0 \quad x^{(1)} \quad x^{(2)} \quad x'$$

bezeichnet werden mögen, in Kettenbrüche erster Art zu entwickeln. Führt eine der Entwicklungen von $x_0, x^{(1)}, x^{(2)}$ auf die gleiche oder äquivalente Formenperiode, wie die Entwicklung von x' , so sind die Formen f und f' im gewöhnlichen Sinne äquivalent.

§ 5. *Erledigung des zweiten Problems.*

Es seien f und f' zwei im gewöhnlichen Sinne äquivalente Formen, so dass also eine der Formen $f, f\left(\begin{smallmatrix} \text{I} & \text{I} \\ \text{I} & \text{O} \end{smallmatrix}\right), f\left(\begin{smallmatrix} \text{I} & \text{O} \\ \text{I} & -\text{I} \end{smallmatrix}\right)$, die wir mit f_i bezeichnen wollen, der Form f' vollständig äquivalent ist. Durch das Re-

ductions-Verfahren wurden wir auf zwei entweder gleiche oder äquivalente Perioden von reducirten Formen geführt. Ist f_0 eine Form der einen Periode, so giebt es in der andern Periode jedenfalls eine Form f'_0 derart, dass eine der beiden Gleichungen:

$$f_0 = f'_0$$

$$f_0 = f'_0 \begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}$$

zutrifft. Sind nun S und S' die Substitutionen, welche f_i bezgl. f' in die ihnen äquivalenten reducirten Formen f_0 bezgl. f'_0 überführen, so ist entweder:

$$f_i S = f' S', \quad \text{und folglich: } f_i S S'^{-1} = f'$$

oder:

$$f_i S = f' S' \begin{pmatrix} \pm i & 0 \\ 0 & \pm i \end{pmatrix}, \quad \text{und folglich: } f_i S \begin{pmatrix} \mp i & 0 \\ 0 & \mp i \end{pmatrix} S'^{-1} = f'.$$

Das Reductionsverfahren liefert uns also eine bestimmte Substitution, durch welche die Form f in die Form f' übergeht. Durch Zusammensetzung dieser Substitution mit allen denjenigen Substitutionen, welche f in sich selbst transformiren, erhält man dann alle Substitutionen, welche f in f' überführen. Die Substitutionen, welche f in sich transformiren, kann man bekanntlich aufstellen, wenn man alle Substitutionen ermittelt hat, welche eine zu f äquivalente reducirte Form f_0 in sich überführen. Es bleibt also die Aufgabe zu lösen, alle Substitutionen zu finden, die eine gegebene reducirte Form f_0 in sich transformiren, und diese Aufgabe ist gleichbedeutend mit der andern, alle vollständigen Äquivalenzbeziehungen

$$(31) \quad x_0 = \frac{\alpha x_0 - \beta}{\gamma x_0 - \delta}$$

zu ermitteln, wenn x_0 die erste Wurzel der Form f_0 bezeichnet. Diese Beziehungen liefert uns die Kettenbruch-Entwicklung 1^{ter} Art von x_0 , denn richten wir die unendlich vielen aus ihr gebildeten Kettenbrüche:

$$(32) \quad x_0 = (a_0, a_1, \dots, a_n, x_0) = (a_0, a_1, \dots, a_n, a_0, a_1, \dots, a_n, x_0) = \dots$$

$$= \frac{p_i x_0 - p_{i-1}}{q_i x_0 - q_{i-1}} \quad (i = n, 2n, 3n, \dots)$$

ein, so erhalten wir unendlich viele Gleichungen der verlangten Art.

Nehmen wir zu den so gefundenen Substitutionen: $\begin{pmatrix} p_i & p_{i-1} \\ q_i & q_{i-1} \end{pmatrix}$ noch alle

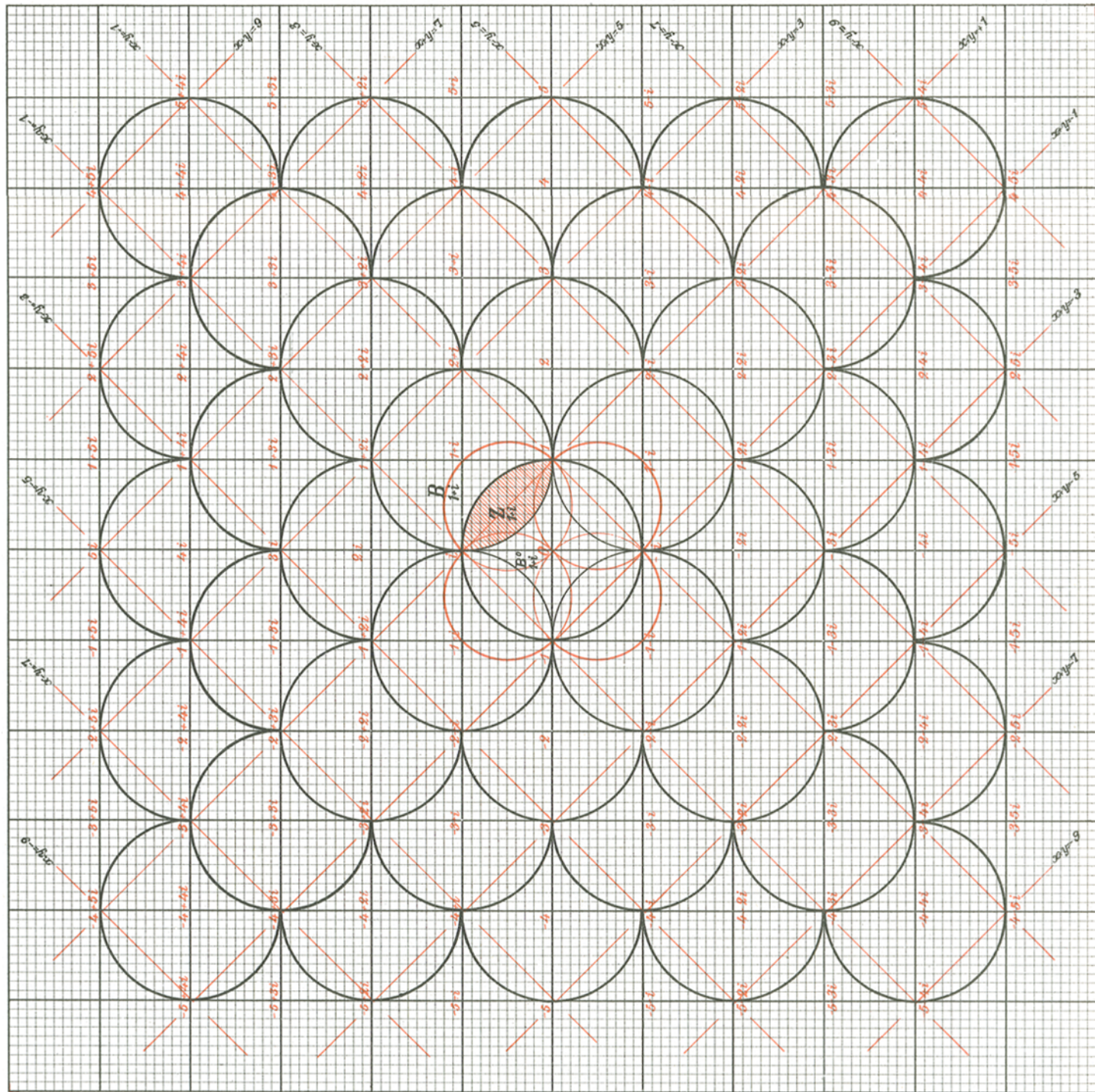
Substitutionen $\begin{pmatrix} -p_i & -p_{i-1} \\ -q_i & -q_{i-1} \end{pmatrix}$ hinzu, so haben wir alle Substitutionen,

welche f_0 in sich überführen, da nach Satz II. im vorigen Paragraphen, sich jede vollständige Äquivalenzbeziehung (31) durch Einrichtung des Kettenbruches (32) ergeben muss.

Ganz analog, wie im reellen Gebiete, correspondiren den Substitutionen, welche f_0 in sich überführen, die Lösungen t, u der Pellschen Gleichung $t^2 - Du^2 = \sigma^2$, wo $D = b^2 - ac$ die Determinante der Form, und σ den Teiler der Form, d. h. eine der vier associirten Zahlen bedeutet,⁴ welche den grössten gemeinsamen Divisor der complexen ganzen Zahlen $a, 2b, c$ charakterisiren.

Basel im Juli 1899.

Figur I.



Figur II.

