RATIONALE REDUCTION DER ABEL'SCHEN INTEGRALE

VON

M. NOETHER
in ERLANGEN.

In der Theorie der Reduction der Abel'schen Integrale mag man zwei Aufgaben unterscheiden. Die eine hat zum Ziel die — RIEMANN'sche — Zerlegung eines gegebenen Integrals in seine einfachsten, algebraisch oder logarithmisch unstetig werdenden oder allenthalben endlichen Bestandteile: die Integrale der drei »Gattungen». Die andere verlangt — an ABEL anschliessend — eine Zurückführung aller algebraisch unstetigen Integrale — der Integrale »zweiter Art» — welche einer Klasse algebraischer Functionen mit der Klassenzahl p angehören, mit Hülfe algebraischer Functionen der Klasse auf eine möglichst kleine Anzahl, nämlich $2p$, von algebraisch-unabhängigen Transcendenten mit fest gegebenen Unstetigkeiten.

An eine algebraische Durchführung dieser beiden Aufgaben wird man bei dem jetzigen Stande der Lehre von den algebraischen Functionen folgende theoretische Forderungen stellen können:

a. Die vorkommenden algebraischen Formen und Functionen sollen, wie die der Klasse zu Grunde gelegte Gleichung $f(s, z) = 0$, nur in *homogenen* Veränderlichen betrachtet werden.

Dies geschieht, um die Dimensionen der Formen zum Ausdruck zu bringen, und um die Auszeichnung einzelner Werthe der Veränderlichen, wie $z = \infty$, zu vermeiden. Mindestens sollen die etwa herausgehobenen Stellen $z = \infty$ nicht für $f = 0$ singuläre Stellen sein.

b. Sämmtliche sowohl im Ansatz als im Verlauf der Rechnung vorkommenden ganzen oder gebrochenen Formen sollen sich »zu $f=0$ *adjungirt*» (bei gewöhnlichen Singularitäten von $f=0$ für die Doppelpunkte von $f=0$ verschwindend) verhalten, und die Functionen als Quotienten solcher Formen gebildet werden.

Denn es ist nötig, bei gegebenen Polen je die allgemeinsten Formen und Functionen zu betrachten, nicht solche, welche specielle, an die aus der Klasse herausgenommene Grundgleichung $f = 0$ geknüpfte, Eigenschaften besitzen. Nur die für jene Ausdrücke gebildeten Relationen sind invariant für die ganze algebraische Klasse, unabhängig von der Wahl der Gleichung $f = 0$.

c. In den Methoden sollen *keine Umwege* vorkommen, d. h. es soll nicht erst eine Reihe von Unstetigkeitsstellen eingeführt, hintennach wieder weggeschafft werden. Insbesondere sollen in die erstere Aufgabe, oder bei Absonderung der logarithmisch unstetigen Teile — der Integrale »dritter Art» — der zweiten Aufgabe, überhaupt keine anderen oder höheren Unstetigkeitspunkte, als die gegebenen, eingeführt werden.

d. Der Gang soll so sein, dass sich die ganze *Mannigfaltigkeit* der Reductionsmöglichkeiten übersehen lässt.

Zu diesen nothwendigen Forderungen kann man theoretisch eine weitere gesellen:

e. Die Trennung in Integrale dritter und zweiter Art, und die Zurückführung der letzteren auf $2p$ algebraisch-unabhängige, soll durch *rationale* Operationen bewirkt werden, d. h. ohne Auflösung von höheren, als linearen Gleichungen.

Schon die Forderungen a.—d. sind in den bisherigen Methoden nur teilweise beachtet. CLEBSCH und GORDAN [1] entsprechen keiner derselben, am wenigstens der Forderung c., indem sie in die erste Aufgabe algebraisch-logarithmische Functionen einführen; sie beabsichtigen auch mehr eine Klassificirung der Integrale in Typen, als eine Reduction. Die modificirte Methode von CLEBSCH-LINDEMANN [2] erfüllt, neben a., auch c., bis auf den Umstand, dass von vornherein *ein* Punkt von $f = 0$ ausgezeichnet wird. Auch für die zweite Aufgabe entsprechen die von Partialbruchzerlegung ausgehenden — praktisch bequemsten — Methoden, so die von Herrn

[1] *Theorie der Abel'schen Functionen* (1866), § 2.

[2] *Vorlesungen über Geometrie,* Bd. 1, p. 777 ff.

PICARD,[1] vor Allem der Forderung c. nicht. Dagegen hat WEIERSTRASS[2] eine Methode entwickelt, welche im Wesentlichen bereits allen Forderungen a.—d. gerecht wird, wie es auch die analoge Methode des Verfassers[3] thut; es werden dabei für die Integrale dritter Gattung ein Punkt, für die neueinzuführenden p Integrale 2ter Gattung p, nicht durch eine Curve φ verknüpfte, Punkte von $f = 0$ ausgezeichnet.

Die Möglichkeit der Durchführung von e. wird, vorausgesetzt dass man auf die Rücksichten a.—d. verzichtet, einleuchtend, wenn man beachtet, dass man die in der Theorie der algebraischen Functionen vorkommenden Operationen auf rationalem Wege erledigen kann, insbesondere die Aufstellung der zu $f = 0$ gehörigen »adjungirten» Formen.[4] Auch hat in solcher Weise HERMITE die zweite Aufgabe für den hyperelliptischen Fall behandelt;[5] und für den allgemeinen Fall haben die Herren PICARD und SIMART eine Andeutung gegeben.[6]

Zweck des vorliegenden Aufsatzes ist nun, die Forderung e. durchzuführen und insbesondere den Nachweis zu erbringen, dass sie sich mit den Forderungen a.—d. vereinigen lässt.

Nicht nur das Reductionsproblem, sondern die Theorie der algebraischen Functionen selbst, der es sich einordnet, führt bekanntlich auf ABEL zurück. Zusammenfassend verdankt man ihm hier den allgemeinsten

---

[1] *Traité d'Analyse* (Paris 1891), Theil 1, Kap. 2.

[2] Vgl. den *Bericht über die Entwicklung der Theorie der algebraischen Functionen* von Herrn BRILL und dem Verf. (Jahresber. der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, III, 1894), Abschnitt VII.

[3] *Zur Theorie der Abel'schen Differentialausdrücke und Functionen* (Math. Annalen, Bd. 37, 1890), §§ 2—5.

[4] M. NOETHER, *Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen* (Math. Annalen, Bd. 23, 1883).

[5] *Sur la réduction des intégrales hyperelliptiques aux fonctions de première, de seconde et de troisième espèce* (Bull. des sc. math. et astr., 2 sér., t. 7, 1883).

[6] *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes* (Paris 1897), t. 1, p. 162. In der Einleitung zu Herrn FIELD's Aufsatz *On the reduction of the general Abelian integral* (Transact. of the Am. Math. Soc., vol. 2, 1901) wird zwar derselbe Zweck angegeben; es werden aber ausschliesslich in den Coefficienten irrationale Operationen vorgenommen.

Begriff der algebraischen Function und der zugehörigen algebraischen Integrale,[1] sowie die Grundlage der ganzen Theorie: sein Theorem über diese Integrale;[2] vor Allem die mit letzterem verbundene Entdeckung der Zahl p in ihrem verschiedenen Auftreten: einmal im Theorem selbst mit transcendenter und algebraischer Bedeutung,[1] sodann bei der Reduction der Integrale erster Gattung auf die linear-unabhängigen,[3] endlich bei dem ABEL'schen Reductionsproblem dieses Aufsatzes.

Dieses specielle Problem hat überhaupt den Ausgangspunkt von ABEL's hierhergehörigen Arbeiten gebildet. An LEGENDRE anschliessend entwickelt er schon vor 1825 am elliptischen Integral alle wesentlichen Reductionsbegriffe.[4] In seinem generalisirenden Geiste erhob sich das Problem nach und nach zu der Frage nach der allgemeinsten Relation zwischen irgend welchen Integralen verschiedener algebraischer Functionen überhaupt,[5] und damit zu sehr umfassenden Theorien. Wir entnehmen diesen Betrachtungen, dass die zur Reduction eines Integrals zu benutzenden algebraischen Functionen derselben algebraischen Klasse anzugehören haben, wie das Integral selbst.

Auf Grund dieses Satzes hat sich ABEL[6] mit allen Reductionen der Integrale der allgemeinsten algebraischen Differentialausdrücke beschäftigt, die sich mit Hülfe von algebraischen und logarithmischen Functionen ausführen lassen; und zwar »auf die kleinstmögliche Anzahl von Integralen, welche notwendig seien, um alle derselben Klasse angehörenden Integrale unter endlicher Form darzustellen».[7] Auch hat er selbst noch die Aus-

---

[1] *Sur la comparaison des fonctions transcendantes*, Werke (2[te] Ausg.), t. 2, X (vor der Reise von 1825) geschrieben; und die Pariser Preisschrift (Oct. 1826), ibid. t. 1, XII.

[2] Ausser den beiden in 1. citirten Arbeiten noch Werke, t. 1, XXI (1828) und XXVII (1829).

[3] In der Preisschrift.

[4] *Théorie des transcendantes elliptiques*, Werke (2[te] Ausg.), t. 2, XIII.

[5] *Précis d'une théorie des fonctions elliptiques*, ibid. t. 1, XXVIII (1829); Brief an LEGENDRE vom 25. Nov. 1828, ibid. t. 2, XXIII; und das erst in der 2[ten] Ausgabe der Werke publicirte Fragment, t. 2, XVII.

[6] Nach einer Anmerkung im *Précis*, l. c. p. 550.

[7] Dieser Ausspruch ABEL's kann nicht so aufgefasst werden, als ob man die logarithmischen Unstetigkeiten eines beliebigen Integrals der Klasse mit Hülfe des Logarithmus einer algebraischen Function auf eine bestimmte Anzahl von Integralen mit im

führung, wenigstens für die binomischen Integrale, begonnen;[1] und das analoge Verfahren von WEIERSTRASS[2] gibt die algebraische Durchführung der ABEL'schen Aufgabe im hyperelliptischen Fall.

I.

Bezeichnungen.

An meinen oben citirten Aufsatz in Math. Ann. 37[3] anschliessend, benutze ich die dort entwickelten Begriffe und Beweise, wie auch die folgenden Bezeichnungen.

Die zu Grunde gelegte Gleichung

$$f(x_1, x_2, x_3) = 0 \qquad [\text{oder } f(x) = 0, \text{ oder } f = 0]$$

sei die einer Curve f, m^{ter} Ordnung, vom Geschlecht p. Der Integrand sei

$$du = \frac{M(x)}{N(x)} \cdot d\omega_x = \frac{M(x)}{N(x)} \cdot \frac{(cx\,dx)}{\sum\limits_{i=1}^{3} c_i f_i(x)},$$

wo die »Differentialform« $d\omega_x = \frac{(cx\,dx)}{\Sigma c_i f_i(x)}$ für alle Integranden dieselbe bleibt, die »Differentialableitung« $\frac{M(x)}{N(x)}$ eine zu $f = 0$ adjungirte algebraische gebrochene Form $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension des Punktes x von $f(x) = 0$ bedeutet. Zur Bildung von solchen »adjungirten Formen« $\frac{M(x)}{N(x)}$ nimmt man für $N(x)$ irgend eine homogene ganze Function n^{ter} Dimension, für $M(x)$ irgend eine *zu f adjungirte* homogene ganze Function $(n + m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension von x_1, x_2, x_3. Bei der Zählung der 0- und ∞-Punkte der Form $\frac{M(x)}{N(x)}$

Voraus gegebenen logarithmischen Unstetigkeiten worfen könne: eine solche Reduction existirt nicht. Eine bezügliche Bemerkung auf S. 133 von Herrn H. STAHL'S *Theorie der Abel'schen Functionen* (1896) ist nicht zutreffend.

[1] Siehe das in Anm. 5 der vorhergeh. Seite citirte Fragment.

[2] *Theorie der Abel'schen Functionen* (Journal f. r. u. a. Math., Bd. 52 oder Werke, I, p. 297 ff.), § 6, Formel (17).

[3] Cf. Anm. 3 der dritten Seite. Der Aufsatz wird weiterhin mit Math. Ann., 37, citirt.

[kürzer $\frac{M}{N}$] sieht man von den durch die Adjunction zu $f = 0$ bewirkten 0-Punkten von M ab, rechnet also nur die übrigen $2p - 2 + nm$ Schnittpunkte von $M = 0$ mit $f = 0$ als 0-Punkte b von M, dagegen alle nm Schnittpunkte von $N = 0$ mit $f = 0$ als 0-Punkte a von N. Diejenigen der Punkte a, welche nicht zugleich Punkte b sind, sind die ∞-Punkte der Form $\frac{M}{N}$; und zwar ist eine solche Stelle für $\frac{M}{N}$ ∞-Punkt von der Ordnung $\alpha - \beta$, für $\alpha > \beta$, wenn sie α-fach unter den a, β-fach unter den b vorkommt. Für das Integral u wird diese Stelle logarithmische Unstetigkeitsstelle, wenn $\alpha - \beta = 1$; algebraische Unstetigkeitsstelle von der Ordnung $\alpha - \beta - 1$, im Allgemeinen verbunden mit logarithmischer Unstetigkeit, wenn $\alpha - \beta > 1$.

Diese Definitionen gelten für jede beliebige Lage der Stelle, da von unserem invarianten Standpunkt aus eine specielle Lage überhaupt nicht existirt. Unter G_l wird eine Gruppe von l getrennten Stellen von $f = 0$ verstanden.

Um die Bezeichnungen: »Integrale 2^{ter}, 3^{ter} Gattung» auf die bekannten Normalformen zu beschränken, sei noch eine andere Bezeichnung benutzt.

Ein Integral u mit *nur* logarithmischen Unstetigkeiten (an mindestens zwei Stellen) werde als »Integral dritter Art», die zugehörige Differentialableitung $\frac{M(x)}{N(x)}$ als »Form dritter Art» bezeichnet. Hat das Integral *nur* algebraische Unstetigkeiten, so sei es als »Integral zweiter Art», seine Form $\frac{M(x)}{N(x)}$ als »Form zweiter Art» bezeichnet. Für die allenthalben endlichen Integrale ist die Bezeichnung »erster Art» mit »erster Gattung» gleichbedeutend; ihre Formen $\frac{M(x)}{N(x)}$ sind die adjungirten ganzen Formen φ, deren Fundamentalsysteme von je p Formen sich auf rationalem Wege bestimmen lassen.[1]

---

[1] Cf. die in Anm. 4 der dritten Seite citirte Arbeit, auf die mit Math. Ann., 23, Bezug genommen wird.

II.

Rationale Zerlegung der Formen.

Es sind hier die direkten rationalen Zerlegungen zu behandeln, welche eine zu f adjungirte Form $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension mit Hülfe von $f=0$ zulässt, wenn dieselbe in verschiedenen Punktgruppen von f in *verschiedenen* Ordnungen unendlich wird.

Zu diesem Zwecke beweisen wir zuerst, dass ein gebrochener Ausdruck $(m-3+k)^{\text{ter}}$ Dimension $\frac{P}{Q\,.\,R}$ *für* $k>0$, nicht aber im Allgemeinen für $k \leqq 0$, mit Hülfe von $f=0$ die Zerlegung zulässt:

$$(1)\qquad \frac{P}{Q\,.\,R}=\frac{A}{Q}+\frac{B}{R},$$

d. h. dass eine Relation existirt:

$$(1')\qquad P=AR+BQ+Cf,$$

wo auch A, B, C ganze homogene Functionen von x_1, x_2, x_3 werden, und wo A und B adjungirt zu f werden, im Falle P es war. Vorausgesetzt ist, dass für gemeinsame Nullpunkte von R, Q, f auch P verschwindet.

Seien Q, R, P von den Graden q, r, $q+r+k+m-3$. Man nehme zunächst, wenn P adjungirt war, für A das allgemeinste adjungirte Polynom vom Grade $q+k+m-3$, mit

$$\alpha=\frac{1}{2}(q+k+m-2)(q+k+m-1)-d$$

$$\left[\text{wo } d=\frac{1}{2}(m-1)(m-2)-p\right]$$

willkürlichen Constanten. In einem Ausdruck

$$DQ+Ef\equiv(D+Ff)\,Q+(E-FQ)f,$$

wo D adjungirt, von der Ordnung $k+m-3$, E nicht-adjungirt, von der Ordnung $q+k-3$, F nicht-adjungirt, von der Ordnung $k-3$, stehen aber noch

$$\beta=\frac{1}{2}(k+m-2)(k+m-1)+\frac{1}{2}(q+k-2)(q+k-1)-\frac{1}{2}(k-2)(k-1)-d$$

willkürliche Parameter zur Verfügung. Ersetzt man daher A durch

$$A + (DQ + EF)$$

und benutzt die β Parameter zur Reduction der Constanten von A, so verbleiben in A, vermöge $Q = 0$, $f = 0$, noch

$$\alpha - \beta = qm$$

Constanten, linear und homogen eingehend.

Für $k = 0$ würden nur $qm - 1$ Constanten verbleiben.

Für $k > 0$ kann man also mit Hülfe der qm Constanten von A dem Ausdruck $P - AR$ vorschreiben, für sämmtliche qm Schnittpunkte von $Q = 0$ mit $f = 0$ zu verschwinden. Man hat dann eine Identität [1]

$$P - AR = BQ + Cf,$$

in der, wenn es P und A waren, auch B adjungirt zu f wird. Hatten Q, R und f gemeinsame Nullpunkte, so sagen die entsprechenden Bedingungen für $P - AR$ aus, dass auch P an diesen Stellen verschwinden muss. Daher ist (1'), und damit (1), bewiesen.

Dieselbe Gleichung (1') gilt für $k > 0$, wenn P nicht-adjungirt zu f war; man braucht dann nur A, D, B nicht-adjungirt anzunehmen.

Aus der Gleichung (1) sollen nun Folgerungen für die zu f adjungirten Formen $(m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension gezogen werden (die übrigens auch für nicht-adjungirte Formen gültig wären).

Die adjungirte Form $(m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension

$$\frac{M(x)}{N(x)}$$

werde in den s getrennten Gruppen

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}$$

von je

$$l_1, l_2, \ldots, l_s$$

getrennten Punkten von f bezw. zu

$$\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s},$$

[1] Nach dem algebraischen Satze meiner Note in Math. Ann., 6.

wobei $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_s$ s ganze positive von einander verschiedene Zahlen seien. Wegen des letzteren Umstandes kann man diese s Gruppen rational von einander trennen.[1]

Nun mögen zunächst s Polynome in x_1, x_2, x_3

$$N_1, N_2, \ldots, N_s$$

von irgend welchen Dimensionen

$$n_1, n_2, \ldots, n_s$$

bestimmt werden, nur mit der Eigenschaft, dass N_h die Curve f in den l_h Punkten von G_{l_h} je in *erster* Ordnung, in den übrigen $s - 1$ Gruppen gar nicht treffe. Nach dem »Restsatz«[2] hat man dann vermöge $f = 0$ eine Identität

$$\frac{M}{N} = \frac{\mathfrak{M}}{N_1^{\nu_1} N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s}}, \tag{2}$$

wo $\mathfrak{M}$ ein zu f adjungirtes Polynom der Ordnung $\sum_{h=1}^{s} \nu_h n_h + m - 3$ vorstellt.

Sei $\nu_1 > 1$, so nehme man in Formel (1):

$$P = \mathfrak{M}, \qquad Q = N_1^{\nu_1 - 1}, \qquad R = N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s};$$

es sind dann die Bedingungen des Satzes erfüllt, und man hat, vermöge $f = 0$:

$$\frac{\mathfrak{M}}{N_1^{\nu_1 - 1} N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s}} = \frac{A}{N_1^{\nu_1 - 1}} + \frac{B}{N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s}},$$

d. h.

$$\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1^{\nu_1}} + \frac{B}{N_1 N_2^{\nu_2} \ldots N_s^{\nu_s}}.$$

Indem man nun denselben Schluss auf das zweite Glied dieser Zerlegung bezüglich N_2 anwendet, und so fortfährt, ergibt sich eine Zerlegung von (2), vermöge $f = 0$:

$$\frac{M}{N} = \frac{M_1}{N_1^{\nu_1}} + \frac{M_2}{N_2^{\nu_2}} + \ldots + \frac{M_s}{N_s^{\nu_s}} + \frac{M'}{N_1 N_2 \ldots N_s}, \tag{3}$$

in der jedes Glied eine zu f adjungirte Form $(m - 3)^{\text{ter}}$ Dimension vorstellt.

---

[1] Nach Math. Ann., 23.

[2] Cf. Brill und Noether, Math. Ann., 7.

Nach derselben Formel (1) zerlegt sich das Schlussglied von (3) weiter in Formen, die nur je zwei Factoren im Nenner haben; z. B., vermöge $f = 0$, in

$$\frac{M'}{N_1 N_2 \dots N_s} = \frac{M'_1}{N_1 N_s} + \frac{M'_2}{N_2 N_s} + \dots + \frac{M'_{s-1}}{N_{s-1} N_s}, \tag{4}$$

wo wieder jedes Glied zu f adjungirt wird. Auch könnten alle einzelnen Glieder von (3) und (4) nach dem »Restsatz» wieder vielfach umgestaltet werden.

Eine andere rationale Zerlegung von $\frac{M}{N}$ würde sich aus (1) ergeben, wenn man $\frac{M}{N}$ zuvor mit einem beliebigen Polynom, etwa mit einer linearen Function $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i x_i$, multiplicirte. Dann würde für $f = 0$:

$$\frac{M}{N} = \frac{1}{\Sigma \alpha_i x_i} \cdot \sum_{h=1}^{l} \frac{P_h}{N_h^{\nu_h}}. \tag{5}$$

Dies wären die Zerlegungen, wie sie in den direkt mit Partialbruchzerlegung arbeitenden Methoden gebraucht werden, wobei nur $\Sigma \alpha_i x_i$ durch die homogen machende Veränderliche ersetzt zu denken ist. Die hierbei neu eingeführten Unstetigkeiten in $\Sigma \alpha_i x_i = 0$, $f = 0$ könnte man übrigens, wenn man weiterhin Irrationales benutzen wollte, noch verringern. Denn die in (1) noch unbestimmten Coefficienten von A, B liessen sich, indem man A, B durch $A + DQ$, $B - DR$ ersetzte, durch Annahme von D so bestimmen, dass sämmtliche P_h von (5) für die nämlichen $m - 1$ der m Schnittpunkte von $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ mit $f = 0$ verschwinden; so dass dann für alle Glieder von (5) nur *ein* neuer Unstetigkeitspunkt aufträte.

III.

Rationale Trennung der Formen in solche zweiter und dritter Art.

Während der Teil (4) von (3) nur aus Formen dritter (und erster) Art besteht, sind die übrigen Glieder von (3) noch aus allen drei Arten gemischte Formen. Und dies ändert sich auch nicht, wenn man vermöge $f = 0$ direkte Umformungen vornimmt:

$$\frac{M_h}{N_h^{\nu_h}} = \frac{M_{h_1}}{N_h^{\nu_h}} + \frac{M_{h_2}}{N_h^{\nu_h - 1}} + \ldots + \frac{M_{h,\nu_h}}{N_h} + \varphi,$$

wo φ eine Form erster Art. Denn nur das letzte Glied vor φ wird eine Form 3^{ter} Art, die man mit (4) vereinigen mag; die übrigen Teile bleiben gemischte Formen.

Es handelt sich nun um die rationale Scheidung irgend eines solchen Gliedes, oder von $\frac{M}{N}$ selbst, in Formen 2^{ter} und in Formen 3^{ter} Art. Wir deuten zu diesem Zwecke mehrere Methoden an, die zuerst an $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ von (3) ausgesprochen werden mögen.

Ein erster Weg benutzt die gewöhnliche Methode der Reihenentwicklung und möge desshalb bei nicht-homogenen Coordinaten dargelegt werden.

Für die Grundcurve $f(s, z) = 0$ werde die Form $\frac{M_1(s, z)}{N_1^{\nu_1}(s, z)}$ in den l_1 Punkten der Gruppe G_{l_1} je zu ∞^{ν_1}. Wenn für irgend einen dieser l_1 Punkte:

$$s = \sigma, \qquad z = \zeta,$$

so ergibt sich die Gruppe G_{l_1} aus

$$f(\sigma, \zeta) = 0, \qquad N_1(\sigma, \zeta) = 0$$

rational, mittelst Gleichungen

$$\sigma = \frac{P(\lambda)}{S(\lambda)}, \qquad \zeta = \frac{Q(\lambda)}{S(\lambda)}, \qquad R(\lambda) = 0,$$

wo $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$, $S(\lambda)$, $R(\lambda)$ rationale ganze Functionen eines Parameters λ, letztere irreductibel vom Grade l_1, sind. Für λ konnte etwa ζ selbst gewählt werden.[1]

Entwickelt man nun mittelst der Taylor'schen Reihe für $s - \sigma$ den Integranden

$$\frac{M_1(s, z)}{N_1^{\nu_1}(s, z)} \frac{1}{\frac{\partial f(s, z)}{\partial s}}$$

[1] Auch für eine solche Elimination hat Abel eine ihm eigentümliche Methode gegeben; s. Werke, 2^{te} Ausg., t. I, XIII.

in der Umgebung von $s=\sigma$, $z=\zeta$ von $f(s,z)=0$ nach aufsteigenden Potenzen von $z-\zeta$, so wird der Coefficient von $(z-\zeta)^{-1}$ eine rationale Function von σ, ζ, die durch Einsetzen der obigen Ausdrücke in eine rationale Function $\frac{U(\lambda)}{V(\lambda)}$ von λ übergeht. Um die Terme dritter Art aus der betrachteten Form zu entfernen, hat man diese Function für alle der Gleichung $R(\lambda)=0$ genügenden Werte von λ gleich 0 zu setzen, d. h. man hat eine Identität zu erfüllen:

$$U(\lambda) \equiv A(\lambda) \,.\, R(\lambda).$$

Diese liefert l_1 Gleichungen, welche für die Coefficienten von $U(\lambda)$, d. h. für die von M_1, rational, linear und homogen, sind. Es sind die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen, dass $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ eine Form 2^{ter} Art sei. Dieselben stellen bekanntlich (nach dem Residuensatze)[1] höchstens l_1-1 linear-unabhängige Bedingungen vor. Nach Erfüllung dieser Bedingungen bleiben in M_1, bei gegebener Gruppe G_{l_1}, d. h. $N_1^{\nu_1}$, noch

$$(\nu_1-1)l_1+p$$

willkürliche Constanten, linear und homogen eingehend.

In einer etwas mehr algebraischen Modification dieses Wegs könnte man von der in $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ steckenden, auf *einen* der l_1 Punkte (σ, ζ) von G_{l_1} bezüglichen Summe von ν_1-1 »Formen 2^{ter} Gattung» (nämlich von dem $\sum_{k=1}^{\nu_1-1} g_{1,k} A^{(\nu_1-k)}(\sigma,\zeta)$ von Math. Ann. 37, § 3) ausgehen, deren Coefficienten wieder rationale Functionen von σ, ζ werden. Schreibt man der Differenz zwischen $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ und dieser Summe vor, im Punkte (σ, ζ) nicht mehr unendlich zu werden, so liefert dies zunächst wieder eine Gleichung in σ, ζ, die, wie oben, in eine Identität in λ und damit in die l_1-1 Gleichungen für die Coefficienten von M_1 übergeht.

Ein unseren Operationen an Formen mehr entsprechender rational-algebraischer Weg besteht darin, dass man eine Form $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ an jeder Stelle bezüglich ihrer Unstetigkeit vergleicht mit der Differentialableitung

[1] Cf. auch Math. Ann., 37, § 6, n° 8.

$$D_x \frac{\chi}{\psi} = \frac{d\frac{\chi}{\psi}}{d\omega_x} = \frac{1}{r}\frac{(f\psi\chi)}{\psi^2}$$

einer rationalen Function 0^{ter} Dimension einer Stelle x_1, x_2, x_3 von $f(x)=0$.[1] Ein solcher Ausdruck ist eine zu f adjungirte gebrochene Form $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension, sowohl wenn die beiden Polynome r^{ter} Dimension, χ und ψ, beide zu f adjungirt sind, als wenn beide, oder ψ allein, nicht-adjungirt wären.

Sei ψ irgend eine zu f adjungirte Curve, vom Grad r, welche f an jeder Stelle von G_{l_1} genau $(\nu_1 - 1)$-fach trifft; und zwar sei r so hoch gewählt, dass die l' Restschnittpunkte $G_{l'}$ von $\psi = 0$ mit $f = 0$ auf keiner Curve φ liegen. Für χ sei die Gesamtheit der adjungirten Curven r^{ter} Ordnung genommen; so dass $\frac{\chi}{\psi}$ die Gesamtheit der algebraischen Functionen der Klasse vorstellt, welche in G_{l_1} zu ∞^{ν_1-1}, in $G_{l'}$ zu ∞^1 werden sollen. Schreibt man diesen χ weiter vor, in jedem Punkt von G_{l_1} die Curve f k-mal zu treffen ($k = 1, 2, \ldots, \nu_1 - 2$), so erhält man, wenn keine weitere Bedingung gegeben ist, eine Function $\frac{\chi_k}{\psi}$, welche in $G_{l'}$ zu ∞^1 werden kann und in G_{l_1} *wirklich* zu ∞^{ν_1-k-1} wird (vermöge der Annahme über die Gruppe $G_{l'}$; vgl. den »Satz für feste Punkte»[2]). Diese Curve χ_k hat, vermöge $f=0$, noch

$$(\nu_1 - k - 1)l_1 + l' - p + 1$$

linear und homogen eingehende willkürliche Constanten. Da eine der χ_k die Curve ψ selbst ist, so hat $D_x \frac{\chi_k}{\psi}$ *eine* Constante weniger.

In

$$\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}} - D_x \frac{\chi}{\psi} = \frac{P}{Q}$$

kann man daher nun $(\nu_1 - 1)l_1$ der willkürlichen Constanten von χ so bestimmen, dass die Form $\frac{P}{Q}$ in den l_1 Punkten von G_{l_1} höchstens je zu

---

[1] Cf. Math. Ann., 37, § 5, und das Anm. 6 der dritten Seite citirte Werk von PICARD und SIMART, t. 2, p. 161.

[2] Als *Reductionssatz für algebraische Functionen* in Math. Ann., 37, S. 424 Anm. angeführt.

∞^1 werde. Alsdann kann man die l_1 Gleichungen hinschreiben, welche aussagen, dass die Form $\frac{P}{Q}$ auch in G_{l_1} überhaupt nicht mehr unendlich werden soll. Diese Gleichungen werden, da $D_x \frac{\chi}{\psi}$ Glieder dieser Art gar nicht enthält, unabhängig von den $l' - p$ noch unbestimmt gebliebenen Coefficienten von χ; es sind die mit $l_1 - 1$ unabhängigen Gleichungen äquivalenten l_1 linearen homogenen Gleichungen für die Coefficienten von M_1, nach deren Erfüllung $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ eine Form 2^{ter} Art wird.

Trennt man den so bestimmten Teil 2^{ter} Art, $\frac{M_1^{(2)}}{N_1^{\nu_1}}$, von $\frac{M_1}{N_1^{\nu_1}}$ (für $\nu \geqq 2$), so ist der Rest $\frac{M_1 - M_1^{(2)}}{N_1^{\nu_1}}$ der Teil 3^{ter} Art $\frac{M_1^{(3)}}{N_1^{\nu_1}}$, ohne andere Unstetigkeiten, als solche erster Ordnung in der Gruppe G_{l_1}, also eine Form $\frac{\mathfrak{M}_1}{N_1}$. Natürlich kann nachträglich zu einem der beiden Teile eine beliebige Form φ addirt, vom anderen subtrahirt werden.

Wendet man endlich dasselbe Verfahren auf alle Gruppen $G_{l_1}, \ldots, G_{l_s}$ an, so könnten die erhaltenen Formen 3^{ter} Art, $\frac{\mathfrak{M}_h}{N_h}$, noch mit dem Schlussglied (4) von (3) zu einem Gliede zusammengefasst werden.

Hätte man dasselbe Verfahren unmittelbar auf $\frac{M}{N}$ angewandt, so würden sich für M im Ganzen

$$\sum_{h=1}^{s} l_h - 1$$

unabhängige lineare homogene Bedingungsgleichungen ergeben haben, durch deren Erfüllung $\frac{M}{N}$ in eine Form 2^{ter} Art übergeht.

IV.

System von algebraisch-unabhängigen Formen 2ter Art, bei gegebenen Gruppen von Unstetigkeitspunkten gegebener Ordnung.

Unter einem »System von algebraisch-unabhängigen Formen 2ter Art, welche in Gruppen

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}$$

von je $l_1, l_2, \ldots, l_s$ Punkten von f bezüglich zu

$$\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s}$$

werden», wird ein derartiges System von Formen 2ter Art

$$\frac{M_1^{(2)}}{N}, \frac{M_2^{(2)}}{N}, \quad \ldots, \quad \frac{M_t^{(2)}}{N}$$

verstanden, dass jede adjungirte Form mit denselben Unstetigkeiten sich in die Gestalt setzen lässt:

$$\frac{M^{(2)}}{N} = \sum_{j=1}^{t} c_j \frac{M_j^{(2)}}{N} + D_x \frac{\chi}{\psi},$$

wo die c_j Constanten sind und $\frac{\chi}{\psi}$ eine algebraische Function der Klasse wird.

Es handelt sich um die Aufstellung solcher Systeme, insbesondere um Bestimmung der Zahl t.

Zu diesem Zwecke sei N eine zu f nicht-adjungirte Curve der Ordnung n, welche jeden der l_h Punkte von G_{l_h} zum ν_h-fachen Punkt habe ($h = 1, 2, \ldots, s$). Durch den Restschnitt von $N = 0$ mit $f = 0$ lege man alle zu f adjungirten Curven M, der Ordnung $n + m - 3$. Man erhält dann eine Gesamtheit von Formen $\frac{M}{N}$, mit (vermöge $f = 0$)

$$\sum_{h=1}^{s} \nu_h l_h + p - 1$$

linear und homogen eingehenden willkürlichen Constanten. Nach Abtrennung der $\sum_h l_h - 1$ Formen dritter Art (Abschn. III) bleibt noch die Gesamtheit der zu betrachtenden adjungirten Formen 2^{ter} Art, $\frac{M^{(2)}}{N}$, übrig, mit

$$\alpha = \sum_{h=1}^{s} (\nu_h - 1) l_h + p$$

in $M^{(2)}$ linear und homogen eingehenden willkürlichen Constanten. p linear-unabhängige dieser Formen sind als adjungirte Formen φ darstellbar.

Um ein System von algebraisch-unabhängigen Formen unter den α linear-unabhängigen Formen $\frac{M^{(2)}}{N}$ zu bestimmen, sei angenommen, dass es k linear-unabhängige Formen φ gibt, welche $f = 0$ in den Gruppen

$$G_{l_1},\ G_{l_2},\ \ldots,\ G_{l_s}$$

bezw.

$$(\nu_1 - 1)\text{-},\ (\nu_2 - 1)\text{-},\ \ldots,\ (\nu_s - 1)\text{-fach}$$

treffen. Existirt keine solche φ, so ist $k = 0$ zu setzen.

Man bilde nun alle algebraischen Functionen $\frac{\chi}{\psi}$ der Klasse, welche in diesen Gruppen bezw. zu

$$\infty^{\nu_1 - 1},\ \infty^{\nu_2 - 1},\ \ldots,\ \infty^{\nu_s - 1}$$

werden sollen. Nach dem »Riemann-Roch'schen Satze«[1] gibt es

$$\beta = \sum_{h=1}^{s} (\nu_h - 1) l_h - p + 1 + k$$

linear-unabhängige solche Functionen. Da einer der β Ausdrücke χ mit ψ zusammenfällt, so bleiben in $D_x \frac{\chi}{\psi}$ noch $\beta - 1$ willkürliche Constanten, linear und homogen eingehend. Jede dieser $\beta - 1$ Formen $D_x \frac{\chi}{\psi}$ gehört aber zu den betrachteten Formen $\frac{M^{(2)}}{N}$; und ausser linearen Verbindungen der $\beta - 1$ Formen gibt es auch keine andere Form der Gestalt $D_x \frac{\chi'}{\psi'}$,

[1] Brill und Noether, Math. Ann., 7.

welche die für die $\frac{M^{(2)}}{N}$ angegebenen Eigenschaften hat. Daher hat man den *Satz:*

»In dem System von α linear-unabhängigen Formen 2^{ter} Art, $\frac{M^{(2)}}{N}$, gibt es

$$t = \alpha - (\beta - 1) = 2p - k$$

algebraisch-unabhängige; wobei k die Anzahl der linear-unabhängigen φ bedeutet, welche $f = 0$ in G_{l_h} bezw. $(\nu_h - 1)$-fach treffen $(h = 1, \ldots, s)$. Solche $2p - k$ Formen kann man aus einem System von p Formen 1^{ter} Art, φ, und aus $p - k$ eigentlichen Formen 2^{ter} Art zusammensetzen.»

Wollte man, wenn $k > 0$, für die gegebenen Gruppen G_{l_h} von Unstetigkeitspunkten auf ein System von $2p$ algebraisch-unabhängigen Formen 2^{ter} Art kommen, ohne ausserhalb dieser Gruppen liegende Punkte und ohne Irrationalitäten zu benutzen, so hätte man die Ordnungszahlen ν_h, alle oder teilweise, soweit zu erhöhen, dass alsdann $k = 0$ würde. Auf ein solches System von $2p$ Formen 2^{ter} Art sind dann aber, mittelst der Differentialableitungen algebraischer Functionen der Klasse, zugleich sämtliche Formen 2^{ter} Art, welche in den gegebenen Gruppen $G_{l_1} \ldots G_{l_s}$ in *irgend* welchen Ordnungen ∞ werden, zurückzuführen.

Übrigens hätte es für diese Betrachtungen, wie den Satz, genügt, sie für l Punkte von f auszusprechen, in denen die Formen 2^{ter} Art je zu ∞^2 werden sollen und welche zusammen 0^1-Punkte von k linear-unabhängigen Curven φ sind; wenn man hierbei nur »∞^2, bezw. 0^1, in jedem von $\nu - 1$ consecutiven Punkten» als äquivalent betrachtet mit »∞^ν, bezw. $0^{\nu-1}$, an *einer* Stelle von $f = 0$».

V.

Rationale Reduction der Formen $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension mittelst Differentialableitungen algebraischer Functionen auf $2p$ festgewählte Formen 2^{ter} Art und auf Formen dritter Art.

Die rationale Durchführung des ABEL'schen Reductionsproblems, unter den in der Einleitung gestellten Anforderungen, ist nun eine einfache Anwendung des Abschn. IV.

Es liege irgend eine zu f adjungirte Form $(m-3)^{\text{ter}}$ Dimension, $\frac{M}{N}$, vor, die in den Gruppen

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_r}$$

bezw. zu

$$\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_r}$$

werde.

Entweder mag man nun $\frac{M}{N}$ zuerst, nach Abschn. II, III, in Formen 2^{ter} und 3^{ter} Art spalten und jeden der Teile 2^{ter} Art nach dem im Folgenden anzugebenden Verfahren weiter behandeln. Oder man wird dieses Verfahren unmittelbar auf $\frac{M}{N}$ selbst anwenden; alsdann ergibt sich die Spaltung von $\frac{M}{N}$ in Teile 2^{ter} und 3^{ter} Art von selbst mit.

Man nehme als Hülfsgruppe irgend eine rational bekannte Gruppe G_L von L Punkten auf $f=0$, welche keiner anderen Bedingung unterliegt, als der, dass ihre L Punkte nicht durch eine Curve φ verknüpft sind.

Zunächst wird man die Gesamtheit der Formen $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, welche nur in den L Punkten der festen Gruppe G_L je zu ∞^2 werden sollen, nach Abschn. III sondern in solche, $\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}}$, von der zweiten Art, und in solche, $\frac{\mathfrak{M}^{(3)}}{\mathfrak{N}}$, von der dritten Art.

Die Formen $\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}}$ lassen sich — nach Abschn. IV, wobei $k = 0$ wird — auf ein algebraisch-unabhängiges System von $2p$ Formen 2^{ter} Art

$$(6) \qquad \begin{cases} \psi_1 = \frac{\mathfrak{M}_1^{(2)}}{\mathfrak{N}}, \quad \psi_2 = \frac{\mathfrak{M}_2^{(2)}}{\mathfrak{N}}, \quad \ldots, \quad \psi_p = \frac{\mathfrak{M}_p^{(2)}}{\mathfrak{N}}, \\ \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p \end{cases}$$

zurückführen.

Nach demselben Abschnitt IV lassen sich alle Formen 2^{ter} Art, die in

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}, G_L$$

bezw. zu

$$\infty^{\nu_1}, \infty^{\nu_2}, \ldots, \infty^{\nu_s}, \infty^2$$

werden, algebraisch zurückführen auf das System (6); daher auch derjenige Teil, welcher in G_L gar nicht mehr ∞ wird. Dies sind aber gerade diejenigen Formen 2^{ter} Art, $\frac{M^{(2)}}{N}$, welche in der vorgelegten Form $\frac{M}{N}$ enthalten sind.

Damit ist die verlangte Reduction für den Fall geleistet, dass die vorgelegte Form selbst eine solche zweiter Art war.

War aber $\frac{M}{N}$ eine aus Formen 2^{ter} und 3^{ter} Art gemischte Form, so bleibt die algebraische Reduction von Abschn. IV noch immer anwendbar. In der That, man bilde zunächst die allgemeinste algebraische Function $\frac{\chi}{\psi}$, welche in den Gruppen

$$G_{l_1}, G_{l_2}, \ldots, G_{l_s}, G_L$$

bezw. zu

$$\infty^{\nu_1-1}, \infty^{\nu_2-2}, \ldots, \infty^{\nu_s-1}, \infty^1$$

werden kann. Der Ausdruck χ hat, vermöge $f = 0$, noch

$$\alpha = \sum_{h=1}^{s} (\nu_h - 1) l_h + L - p + 1,$$

die Form $D_x \frac{\chi}{\psi}$ noch $\alpha - 1$ willkürliche Constanten. Die Anzahl $\Sigma(\nu_h - 1)l_h$ dieser Constanten kann man nun auch hier so bestimmen, dass

$$\frac{M}{N} - D_x \frac{\chi}{\psi}$$

in allen Punkten der s Gruppen G_{l_h} nur höchstens zu ∞^1 werde. Denn denkt man sich die Form $\frac{M}{N}$ in ihre beiden Teile 2[ter] und 3[ter] Art

$$\frac{M}{N} = \frac{M^{(2)}}{N} + \frac{M^{(3)}}{N}$$

zerlegt, so könnte man, da die L Punkte durch keine φ verknüpft sind, je einen Teil $\frac{\chi'}{\psi}$ der Functionen $\frac{\chi}{\psi}$ bilden, welcher zwar in G_L noch je zu ∞^1 werden kann, aber in sämtlichen Gruppen G_{l_h} nicht mehr unendlich wird, mit Ausnahme irgend *eines* der Punkte irgend *einer* dieser s Gruppen, in welchen $\frac{\chi'}{\psi}$ wirklich zu $\infty^{\nu_h - j}$ wird, wo j irgend eine beliebig gegebene der Zahlen $1, 2, \ldots, \nu_h - 1$ vorstellt;[1] daher lässt sich durch $D_x \frac{\chi}{\psi}$ *jedes* auf $G_{l_1}, \ldots, G_{l_s}$ bezügliche Glied von $\frac{M^{(2)}}{N}$ vernichten.

Nach dieser Bestimmung wird $\frac{M}{N} - D_x \frac{\chi}{\psi}$ in den Gruppen $G_{l_1}, \ldots, G_{l_s}$ höchstens zu ∞^1, in G_L zu ∞^2, und verhält sich zugleich *bezüglich der Punkte von* G_L wie eine Form 2[ter] Art.

Daher hat man, nach Abschn. II, eine rationale Zerlegung

$$\frac{M}{N} - D_x \frac{\chi}{\varphi} = \frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}} + \frac{M^{(3)}}{N},$$

wo $\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}}$ eine Form 2[ter] Art ist, welche nur in den L Punkten von G_L höchstens zu ∞^2 wird, $\frac{M^{(3)}}{N}$ eine auf $G_{l_1}, \ldots, G_{l_s}$ bezügliche Form 3[ter] Art. Da nun $\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}}$ auf das System (6) zurückführt, vermöge einer Beziehung

$$\frac{\mathfrak{M}^{(2)}}{\mathfrak{N}} = D_x \frac{\chi_1}{\psi_1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Psi_i + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i,$$

[1] Nach dem o. c. *Reductionssatz für algebraische Functionen*, Math. Ann., 37, § 2.

so hat man die gesuchte Reduction:

$$\frac{M}{N} = D_x \frac{\chi}{\psi} + D_x \frac{\chi_1}{\psi_1} + \sum_{i=1}^{p} \beta_i \Psi_i + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i + \frac{M^{(3)}}{N}.$$

Der hier auftretende Teil dritter Art, $\frac{M^{(3)}}{N}$, von $\frac{M}{N}$ lässt sich alsdann nach Abschn. II auf rationalem Wege noch in mannigfache Gestalt bringen.

In diese rationale Reduction tritt nur *eine* rational bekannte Gruppe G_L von L nicht durch eine Curve φ verknüpften Punkten von f *einfach* ein (oder, statt dessen, eine mehrfach zu nehmende Gruppe von durch eine φ verknüpften Punkten). Sie hat zur Festlegung von $2p$ algebraisch-unabhängigen im Voraus fest anzunehmenden Formen (Integralen) 2^{ter} Art zu dienen. Dagegen war für die Abschn. II—IV eine Einführung von weiteren Unstetigkeitspunkten, oder von solchen höherer Ordnung als gegeben, überhaupt nicht erforderlich; und ebensowenig, wie am Anfang dieses Abschnittes bemerkt ist, zur Absonderung des Teiles dritter Art in der zuletzt angeführten Reductionsformel.

Erlangen, im Januar 1902.