# SUR L'APPLICATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL D'ABEL RELATIF AUX INTÉGRALES ALGÉBRIQUES À LA RECHERCHE DE SYSTÈMES COMPLÈTEMENT ORTHOGONAUX DANS UN ESPACE À $n$ DIMENSIONS

PAR

GASTON DARBOUX
à PARIS.

Parmi les différentes méthodes que JACOBI a fait connaitre pour l'intégration des équations différentielles abéliennes, s'en trouve une qui repose sur une transformation analytique des plus remarquables, découverte et employée d'abord par LAMÉ dans le cas de trois variables indépendantes.

Si l'on désigne par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les $n$ valeurs de $\lambda$ qui sont racines de l'équation

$$\sum_1^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1, \tag{1}$$

où $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des constantes, on peut substituer aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, que l'on envisagera comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace à $n$ dimensions, les $n$ variables $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, qui deviendront ainsi des coordonnées curvilignes du même point. Nous les désignerons dans la suite sous le nom de *coordonnées elliptiques*, parce que les surfaces sur lesquelles chaque coordonnée demeure constante sont du second degré. JACOBI a donné les formules qui permettent de passer des coordonnées cartésiennes aux coordonnées elliptiques. Si l'on pose, pour abréger,

$$f(u) = (u - a_1)(u - a_2) \ldots (u - a_n), \tag{2}$$

$$\varphi(u) = (u - \rho_1)(u - \rho_2) \ldots (u - \rho_n), \tag{3}$$

*Acta mathematica.* 26. Imprimé le 30 juin 1902.

on aura

$$x_i^2 = \frac{\varphi(a_i)}{f'(a_i)}, \tag{4}$$

et l'élément linéaire de l'espace, donné par la formule

$$ds^2 = dx_1^2 + \ldots + dx_n^2,$$

aura pour expression, en coordonnées elliptiques,

$$ds^2 = -\frac{1}{4}\sum_1^n \frac{\varphi'(\rho_k)}{f(\rho_k)} d\rho_k^2. \tag{5}$$

Cette expression apparait comme la généralisation naturelle de celle que l'on doit à LAMÉ pour l'espace à 3 dimensions.

Dans mes premiers travaux sur les *cyclides homofocales* j'ai été conduit à définir et à étudier un nouveau système de coordonnées curvilignes orthogonales qui, lui aussi, peut s'étendre à un nombre quelconque de dimensions. On le détermine de la manière suivante.

Désignons par la notation $b_{ik}$ les $(n + 2)^2$ éléments d'une substitution linéaire orthogonale à $n + 2$ variables. Ils sont liés comme on sait par les relations

$$\left\{\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{k=n+2} b_{ik}^2 = 1, \qquad &&\sum_{i=1}^{i=n+2} b_{ik}^2 = 1, \\ &\sum_{k=1}^{k=n+2} b_{ki}b_{kh} = 0, \qquad &&\sum_{k=1}^{k=n+2} b_{ik}b_{hk} = 0. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Supposons que tous ces éléments soient des constantes, et introduisons à la place des $n$ variables $x_i$ les $n + 2$ variables $y_i$ dont les rapports mutuels sont déterminés par les équations suivantes

$$\begin{aligned} \lambda y_k = b_{k1}x_1 + b_{k2}x_2 + \ldots + b_{kn}x_n + b_{k,n+1}\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 - R^2}{2R} \\ + b_{k,n+2}\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + R^2}{2R\sqrt{-1}}, \end{aligned} \tag{7}$$

où $R$ désigne une nouvelle constante et $\lambda$ un facteur de proportionnalité.

Un point de l'espace à $n$ dimensions sera déterminé par les rapports mutuels des variables $y_i$. Mais ces variables sont des *coordonnées homo-*

*gènes surabondantes* liées, comme il est facile de le vérifier, par la relation identique

$$\sum_1^{n+2} y_k^2 = 0. \tag{8}$$

Nous les appellerons *coordonnées sphériques* du point. Réciproquement, toutes les fois que $n+2$ variables $y_i$ vérifient la relation identique précédente, elles sont les coordonnées sphériques d'un point, et les formules (7) permettent d'en déduire les coordonnées cartésiennes $x_i$. On trouve en effet, par des calculs faciles,

$$\left\{\begin{aligned} x_i &= \lambda \sum_{k=2}^{k=n+2} b_{ki} y_k, \\ \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 - R^2}{2R} &= \lambda \sum_{k=1}^{k=n+2} b_{k,n+1} y_k, \\ \frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + R^2}{2R\sqrt{-1}} &= \lambda \sum_{k=1}^{k=n+2} b_{k,n+2} y_k; \end{aligned}\right. \tag{9}$$

et des deux dernières de ces relations on déduira les suivantes:

$$\frac{x_1^2 + \ldots + x_n^2}{R} = \lambda \sum_{k=1}^{k=n+2} (b_{k,n+1} + \sqrt{-1}\, b_{k,n+2}) y_k, \tag{10}$$

$$\frac{R}{\lambda} = \sum_{k=1}^{k=n+2} (\sqrt{-1}\, b_{k,n+2} - b_{k,n+1}) y_k. \tag{11}$$

Cette dernière équation fera connaitre l'expression de $\lambda$ en fonction des coordonnées $y_k$ et permettra, en particulier, d'obtenir les expressions suivantes des $x_i$

$$x_i = \frac{R \sum_{k=1}^{k=n+2} b_{ki} y_k}{\sum_{k=1}^{k=n+2} (\sqrt{-1}\, b_{k,n+2} - b_{k,n+1}) y_k}. \tag{12}$$

Il est d'ailleurs très aisé de former l'expression de l'élément linéaire de l'espace en fonction des quantités $y_k$ et de leurs différentielles.

Si l'on différentie en effet l'équation (7) et si on ajoute, après les avoir élevées au carré, toutes les équations ainsi obtenues, en donnant à $k$ toutes les valeurs possibles, on trouvera, en tenant compte de l'identité (8),

$$\lambda^2 \sum_1^{n+2} dy_k^2 = \sum_1^n dx_i^2;$$

et, par suite, l'élément linéaire de l'espace à $n$ dimensions sera fourni par la formule

$$(13) \qquad ds^2 = \frac{R^2 \sum\limits_1^{n+2} dy_k^2}{\left[\sum\limits_1^{n+2} (\sqrt{-1}\, b_{k,n+2} - b_{k,n+1}) y_k\right]^2},$$

où ne figurent que les coordonnées sphériques $y_k$.

## II.

L'emploi des coordonnées sphériques permet de montrer que, dans tout espace à $n$ dimensions, il existe un système triple orthogonal algébrique, plus général que celui des coordonnées elliptiques.

Si l'on pose en effet

$$(14) \qquad y_k^2 = \frac{(a_k - \rho_1)(a_k - \rho_2)\ldots(a_k - \rho_n)}{f'(a_k)},$$

$f(u)$ désignant le polynome à racines constantes

$$(15) \qquad f(u) = (u - a_1)(u - a_2)\ldots(u - a_{n+2}),$$

les quantités $y_k$ satisferont à la relation identique

$$\sum_1^{n+2} y_k^2 = 0$$

et pourront être considérées, par conséquent, comme les coordonnées sphériques d'un point dans l'espace à $n$ dimensions.

Les quantités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ seront les $n$ racines de l'équation en $\lambda$

$$(16) \qquad \sum_1^{n+2} \frac{y_k^2}{a_k - \lambda} = 0.$$

Par un calcul analogue à celui de JACOBI, on trouvera

$$\sum_1^{n+2} dy_k^2 = -\frac{1}{4} \sum_1^n \frac{\varphi'(\rho_i)}{f(\rho_i)} d\rho_i^2, \tag{17}$$

$\varphi(u)$ désignant, pour abréger, le polynome

$$\varphi(u) = (u - \rho_1)(u - \rho_2) \ldots (u - \rho_n). \tag{18}$$

On aura donc, pour l'élément de l'espace à $n$ dimensions, l'expression suivante, déduite des formules (13) et (17),

$$ds^2 = M^2 \sum_1^n \frac{\varphi'(\rho_i) d\rho_i^2}{f(\rho_i)}, \tag{19}$$

où $M$ aura pour expression

$$M = \frac{R\sqrt{-1}}{2 \sum\limits_{k=1}^{k=n+2} y_k(\sqrt{-1}\, b_{k,n+2} - b_{k,n+1})}. \tag{20}$$

On voit ainsi que, dans un espace quelconque, les $n$ variables $\rho_i$ définies par l'équation (16) forment un système de coordonnées curvilignes orthogonales.

Ce système est plus général que celui de LAMÉ et de JACOBI, puisque les surfaces qui le composent et pour lesquelles une des coordonnées est constante sont définies par l'équation (16), et il résulte de l'expression (7) des coordonnées $y_k$ que ces surfaces sont du quatrième ordre et qu'elles admettent pour ligne double le cercle de l'infini.

## III.

Des calculs qui ont été développés dans l'article précédent, il résulte que, dans tout espace à $n$ dimensions, on peut définir deux systèmes orthogonaux algébriques pour lesquels l'élément linéaire est compris dans la forme générale

$$ds^2 = M^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varphi'(\rho_i) d\rho_i^2}{f(\rho_i)}, \tag{21}$$

où l'on a

$$\varphi(u) = (u - \rho_1) \ldots . (u - \rho_n) \tag{22}$$

et où $f(u)$ désigne un polynome algébrique à coefficients constants. Pour l'un de ces systèmes, formé des surfaces homofocales du second degré, $M$ se réduit à une constante et le polynome $f(u)$ est du degré $n$. Pour l'autre, formé de surfaces du quatrième ordre analogues aux cyclides, $f(u)$ est un polynome du degré $n+2$. Nous allons voir comment l'application du théorème fondamental d'Abel permet de rattacher à ces systèmes une suite illimitée de nouveaux systèmes orthogonaux algébriques.

$\theta$ et $\theta_1$ désignant des fonctions quelconques des variables $\rho_i$, désignons par $\Delta\theta$, $\Delta(\theta, \theta_1)$ les symboles opératoires suivants:

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} \Delta\theta &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}\right)^2, \\ \Delta(\theta, \theta_1) &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{f(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho_i}. \end{aligned}\right.$$

L'équation

$$\Delta(\theta, \theta_1) = 0$$

est évidemment la condition nécessaire et suffisante pour que les deux familles de surfaces

$$\theta = \text{const.}, \qquad \theta_1 = \text{const.}$$

se coupent mutuellement à angle droit.

Cela posé, introduisons la fonction $\theta$ définie par la formule

$$(24)\qquad \theta = \sum_{i=1}^{i=n} \int \sqrt{\frac{\varpi(\rho_i)}{f(\rho_i)}}\, d\rho_i,$$

où l'on a

$$(25)\qquad \varpi(u) = (u-\alpha_1)(u-\alpha_2)\ldots(u-\alpha_n),$$

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ désignant $n$ constantes arbitraires.

Il est facile de voir que la fonction $\theta$, considérée comme dépendante des quantités $\alpha_i$, satisfait identiquement aux équations aux dérivées partielles suivantes:

$$(26)\qquad 2(\alpha_i-\alpha_k)\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k} + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k} = 0,$$

qui sont au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$.

Considérée comme fonction des variables $\rho_i$, elle satisfera également à une équation aux dérivées partielles que nous allons former.

On a

$$\Delta\theta = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\varpi(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)}. \tag{27}$$

La somme qui figure dans le second membre est précisément une de celles qu'Abel nous a appris à évaluer. C'est le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans le développement de $\frac{\varpi(u)}{\varphi(u)}$ suivant les puissances descendantes de $u$.

On a donc généralement

$$\Delta\theta = \sum_1^n (\rho_i - \alpha_i) \tag{28}$$

Ce point étant admis, reprenons la formule générale

$$\Delta\theta = \sum \frac{f(\rho_i)}{\varphi'(\rho_i)} \left(\frac{\partial\theta}{\partial\rho_i}\right)^2 \tag{29}$$

et différentions par rapport à une des constantes $\alpha$. On sera évidemment conduit à l'identité

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Delta\theta}{\partial\alpha_i} = \Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}\right). \tag{30}$$

En faisant usage de cette relation on voit que si l'on différentie par rapport à $\alpha_i$ l'équation (28) on aura

$$\Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}\right) = -\frac{1}{2}. \tag{31}$$

Différentions à son tour l'équation (31) par rapport à une autre des constantes $\alpha_i$; nous aurons

$$\Delta\left(\theta, \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k}\right) + \Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k}\right) = 0. \tag{32}$$

Or d'après les équations (26) auxquelles satisfait $\theta$, on a identiquement

$$(33)\qquad 2(\alpha_i - \alpha_k)\Delta\left(\theta, \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k}\right) + \Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}\right) - \Delta\left(\theta, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k}\right) = 0,$$

ce qui donne, en tenant compte de l'équation (31),

$$(34)\qquad \Delta\left(\theta, \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k}\right) = 0.$$

On aura donc, dans tous les cas, en vertu de l'équation (32)

$$(35)\qquad \Delta\left(\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k}\right) = 0.$$

Le lecteur pourra d'ailleurs calculer directement $\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i}, \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_k}$ et vérifier sans peine la relation, fondamentale pour notre objet, que nous venons d'obtenir.

Ces formules préliminaires une fois établies, considérons une fonction $F$ des *seules* variables $\alpha_i$, assujettie à vérifier les équations aux dérivées partielles

$$(36)\qquad 2(\alpha_i - \alpha_k)\frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k} + \frac{\partial F}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial F}{\partial\alpha_k} = 0,$$

et écrivons les $n$ équations

$$(37)\qquad \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i} = \frac{\partial F}{\partial\alpha_i}, \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

qui déterminent $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ en fonction de $\rho_1, \ldots, \rho_n$. Nous allons montrer que les fonctions $\alpha_i$ ainsi définies forment un système complètement orthogonal.

Remarquons à cet effet qu'en vertu des équations (26) et (36) on a identiquement

$$2(\alpha_i - \alpha_k)\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k} - \frac{d^2F}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k}\right) + \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i} - \frac{\partial F}{\partial\alpha_k} - \frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i} + \frac{\partial F}{\partial\alpha_k} = 0.$$

Par conséquent toutes les équations

$$(38)\qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k} = \frac{\partial^2 F}{\partial\alpha_i\partial\alpha_k},$$

où $i$ est différent de $k$, s'obtiennent par la combinaison linéaire des équations (37), dont elles sont de simples conséquences.

D'après cela, si nous différentions totalement les équations (37), nous aurons, en tenant compte des formules (38),

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_i \partial \rho_k} d\rho_k = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_i^2}\right) d\alpha_i. \tag{39}$$

Si donc l'on pose, pour abréger,

$$p_i = \frac{\partial^2 F}{\partial \alpha_i^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_i^2}, \tag{40}$$

on voit que l'on aura

$$\Delta(\alpha_i, \alpha_k) = \frac{1}{p_i p_k} \Delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial \theta}{\partial \alpha_k}\right) = 0. \tag{41}$$

Donc les fonctions $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ forment bien un système orthogonal.

On peut démontrer ce résultat d'une autre manière. La relation (41) montre que les $n^2$ éléments définis par la formule

$$c_{ik} = \sqrt{\frac{f(\rho_k)}{\varphi'(\rho_k)}} \frac{\frac{\partial^2 \theta}{\partial \alpha_i \partial \rho_k}}{\sqrt{\Delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_i}\right)}}$$

sont ceux d'une substitution linéaire orthogonale. Car, en vertu de l'équation (41), ils satisfont identiquement à la relation

$$\sum_{l=1}^{l=n} c_{il} c_{kl} = 0$$

et, d'après la définition du symbole $\Delta$, on a évidemment

$$\sum_{l=1}^{l=n} c_{il}^2 = 1.$$

Or on trouvera aisément que l'on a

$$\Delta\left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha_i}\right) = -\frac{1}{4} \frac{\varpi'(\alpha_i)}{\varphi(\alpha_i)},$$

ce qui donne, pour l'expression des coefficients $c_{ik}$,

$$c_{ik} = 2\sqrt{\frac{f(\rho_k)}{\varphi'(\rho_k)}}\sqrt{-\frac{\varphi(\alpha_i)}{\varpi'(\alpha_i)}}\frac{\partial^2\theta}{\partial\alpha_i\partial\rho_k}.$$

En tenant compte de cette expression, l'équation (39) peut se mettre sous la forme

$$\sum_{k=1}^{k=n} c_{ik}\sqrt{\frac{\varphi'(\rho_k)}{f(\rho_k)}}\,d\rho_k = 2p_i\sqrt{\frac{-\varphi(\alpha_i)}{\varpi'(\alpha_i)}}\,d\alpha_i. \tag{42}$$

Si l'on élève les deux membres au carré et si l'on ajoute toutes les équations obtenues en donnant à $i$ toutes les valeurs possibles, on aura

$$\sum \frac{\varphi'(\rho_k)}{f(\rho_k)}\,d\rho_k^2 = -4\sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{\varpi'(\alpha_i)}\,p_i^2 d\alpha_i^2$$

ou encore, en utilisant l'équation (21),

$$ds^2 = -4M^2\sum \frac{\varphi(\alpha_i)}{\varpi'(\alpha_i)}\,p_i^2 d\alpha_i^2. \tag{43}$$

Cette expression de l'élément linéaire de l'espace à $n$ dimensions, étant débarrassée des rectangles, met en évidence que les fonctions $\alpha_i$ forment un système complètement orthogonal.

## IV.

Des propositions établies dans l'article précédent résulte l'existence d'une infinité de systèmes orthogonaux nouveaux. Il est aisé en effet de démontrer que les équations (36), quoique en nombre surabondant, admettent des solutions, algébriques ou transcendantes, en nombre illimité, et que leur intégrale générale contient dans son expression $n$ fonctions arbitraires d'une variable. Les systèmes orthogonaux définis par les formules (37)

$$\frac{\partial\theta}{\partial\alpha_i} = \frac{\partial F}{\partial\alpha_i} \qquad (i=1,2,\ldots,n)$$

ont donc un degré assez grand de généralité.

Les équations précédentes se présentent sous forme transcendante, puisque $\theta$ a pour expression

$$\theta = \sum_{i=1}^{i=n} \int \sqrt{\frac{\varpi(\rho_i)}{f(\rho_i)}}\, d\rho_i;$$

mais nous allons voir qu'en s'appuyant sur la découverte fondamentale d'Abel relative aux intégrales algébriques, on peut, dans un nombre illimité de cas, les remplacer par des relations entièrement algébriques.

Considérons en effet l'équation

$$P^2 - Q^2 f(x)\varpi(x) = 0 \tag{44}$$

où $P$ et $Q$ désignent deux polynomes algébriques en $x$ dont nous regardons les coefficients comme variables. Le théorème d'Abel nous apprend que, si on désigne par $x_1, x_2, \ldots,$ les racines de cette équation et si l'on suppose pour chacune d'elles le signe du radical défini par l'équation

$$\sqrt{f(x)\varpi(x)} = \frac{P}{Q}, \tag{45}$$

on aura, en supposant que les polynomes $P$ et $Q$ varient de $\partial P$ et de $\partial Q$ et en désignant par $\partial x_i$ la variation correspondante de $x_i$,

$$\sum_i \frac{R(x_i)\partial x_i}{\sqrt{f(x_i)\varpi(x_i)}} = \prod \frac{2R(x)(P\partial Q - Q\partial P)}{P^2 - Q^2 f(x)\varpi(x)}; \tag{46}$$

$R(x)$ désignant un polynome quelconque et $\Pi$ étant le signe qui exprime le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de l'expression soumise à ce signe suivant les puissances descendantes de $x$.

Supposons maintenant que les coefficients des polynomes $P$ et $Q$ varient d'un système de valeurs désigné par l'indice 0 à un autre système désigné par l'indice 1. Chacune des racines $x_i$ passera d'une valeur $x_i^0$ à une valeur $x_i^1$; l'équation précédente, intégrée entre ces deux états, nous donnera la suivante

$$\sum_i \int_{x_i^0}^{x_i^1} \frac{R(x_i)dx_i}{\sqrt{f(x_i)\varpi(x_i)}} = \prod \frac{R(x)}{\sqrt{f(x)\varpi(x)}} \left[\log \frac{P + Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}{P - Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}\right]_0^1 \tag{47}$$

qui est due également à Abel.

Nous allons l'appliquer successivement à nos deux systèmes orthogonaux en prenant pour $\varpi(x)$ le polynome défini par l'équation (25) et pour $f(x)$ le polynome qui figure dans l'expression de l'élément linéaire.

Pour le premier des deux systèmes orthogonaux, ce polynome est du degré $n$. Choisissons $P$ du degré $p+n$ et $Q$ du degré $p-1$ et prenons pour système de valeurs initiales celui pour lequel $P$ se réduit à son premier terme, tous les coefficients de $Q$ étant nuls. Alors toutes les valeurs initiales $x_i^0$ seront nulles et il en sera de même de la valeur initiale de

$$\log \frac{P + Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}{P - Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}.$$

Choisissons maintenant pour l'état final celui dans lequel $n$ des $2p+2n$ racines $x_i$ sont égales à $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$, les $2p+n$ autres se réduisant toutes à des constantes $h_1, h_2, \ldots, h_{2p+n}$. En exprimant que l'équation (44) admet toutes ces racines, nous aurons $2p+2n$ équations qui, par l'élimination des $2p+n$ coefficients de $P$ et de $Q$, donneront $n$ relations algébriques entre les quantités $\rho_i, \alpha_k, h_l$. Ces relations algébriques donneront naissance, d'après la formule (47), aux relations transcendantes comprises dans la formule générale

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\rho_i} \frac{R(\rho_i)d\rho_i}{\sqrt{f(\rho_i)\varpi(\rho_i)}} + \sum_{i=1}^{i=n+2p} \int_0^{h_i} \frac{R(h_i)dh_i}{\sqrt{f(h_i)\varpi(h_i)}} \tag{48}$$

$$= \prod \frac{R(x)}{\sqrt{f(x)\varpi(x)}} \log \frac{P + Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}}{P - Q\sqrt{f(x)\varpi(x)}},$$

$P$ et $Q$ ayant les valeurs qui correspondent à l'état final, parce que, pour l'état initial, le logarithme qui figure dans la formule (47) se réduit à zéro. Ainsi les coefficients de $P$ et $Q$ sont déterminés par les conditions

$$P(\rho_i) - Q(\rho_i)\sqrt{f(\rho_i)\varpi(\rho_i)} = 0, \tag{49}$$

$$P(h_i) - Q(h_i)\sqrt{f(h_i)\varpi(h_i)} = 0, \tag{50}$$

qui permettraient évidemment d'écrire les expressions développées de ces polynomes.

Dans la formule (48), le second membre sera nul toutes les fois que $R(x)$ sera de degré inférieur à $n$. On aura donc

$$\sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\rho_i} \frac{R(\rho_i)d\rho_i}{\sqrt{f(\rho_i)\varpi(\rho_i)}} = - \sum_{i=1}^{i=n+2p} \int_0^{h_i} \frac{R(h_i)dh_i}{\sqrt{f(h_i)\varpi(h_i)}},$$

pour tout polynome $R(x)$ de degré inférieur ou égal à $n-1$.

D'après cela, prenons pour $R(x)$ successivement les différents quotients $\frac{\varpi(x)}{x-a_k}$ que l'on obtient en supprimant un des facteurs de $\varpi(x)$. On aura les $n$ équations

$$(51) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\rho_i} \frac{\sqrt{\varpi(\rho_i)}\,d\rho_i}{(\rho_i - a_k)\sqrt{f(\rho_i)}} = - \sum_{i=1}^{i=n+2p} \int_0^{h_i} \frac{\sqrt{\varpi(h_i)}\,dh_i}{(h_i - a_k)\sqrt{f(h_i)}}$$

auxquelles on peut donner la forme suivante.

Posons

$$(52) \qquad \theta = \sum_{i=1}^{i=n} \int_0^{\rho_i} \sqrt{\frac{\varpi(\rho_i)}{f(\rho_i)}}\,d\rho_i,$$

$$(53) \qquad F = - \sum_{i=1}^{i=n+2p} \int_0^{h_i} \sqrt{\frac{\varpi(h_i)}{f(h_i)}}\,dh_i.$$

Les équations (51) pourront s'écrire sous la forme abrégée

$$(54) \qquad \frac{\partial \theta}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial a_i}.$$

Et comme la fonction $F$ satisfait évidemment aux équations aux dérivées partielles (36), nous voyons que les équations (54) rentrent dans le type (37) donné plus haut et que les variables $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ déterminées par ces équations en fonction de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ sont les paramètres d'un système orthogonal. Comme les relations transcendantes (54) peuvent être remplacées par les équations algébriques que l'on obtient en éliminant entre les équations (49) et (50), les coefficients de $P$ et de $Q$, on reconnait que tous les systèmes orthogonaux ainsi définis sont algébriques.

Les raisonnements précédents se rattachent au premier des deux systèmes orthogonaux définis aux articles I et II. Si nous envisageons le second, pour lequel $f(x)$ est du degré $n+2$, on pourra constituer une théorie analogue.

On prendra l'équation algébrique

$$P^2 - Q^2 f(x) \varpi(x) = 0 \tag{55}$$

où $P$ sera maintenant un polynome de degré $n+p+1$ et $Q$ un polynome de degré $p$. On exprimera qu'elle admet pour racines $\rho_1, \ldots, \rho_n$ et $n+2p+2$ constantes $h_i$. L'élimination des $n+2p+2$ coefficients de $P$ et de $Q$ entre les $2n+2p+2$ équations ainsi obtenues laissera $n$ relations entre les variables $\rho_i$ et les variables $\alpha_i$ qui définiront également un système orthogonal. Le raisonnement est le même que pour le cas précédent.