EINIGE ANWENDUNGEN DER EULER-MACLAURIN'SCHEN SUMMENFORMEL, INSBESONDERE AUF EINE AUFGABE VON ABEL

VON

WILHELM WIRTINGER

in INNSBRUCK.

ABEL hat der Summation endlicher und unendlicher Reihen an vielen Stellen Interesse entgegengebracht und die EULER'sche Summenformel selbst in bemerkenswerther Weise umgeformt.[1] KRONECKER[2] ist hierauf in seinen Vorlesungen über bestimmte Integrale zurückgekommen.

Man hat aber diese Formel bis jetzt nicht, so viel mir bekannt, für functionentheoretische Zwecke verwendet. Wenn im folgenden die Formel zunächst einfach abgeleitet und dann in dieser Richtung verwendet wird, so mag es vielleicht zur Jahrhundertfeier ABEL's nicht unpassend erscheinen, sie zum Schlusse auf eine Aufgabe anzuwenden, welche ABEL[3] selbst gestellt hat, und welche verlangt, die Werthe einer durch eine Potenzreihe mit endlichem Convergenzkreis gegebenen Function auf dem Convergenzkreis aus dieser Reihe selbst zu finden.

Es ist natürlich, dass dieses Problem in seiner ganzen Allgemeinheit nicht erledigt werden kann. Es gelingt aber doch, den Fall, in welchem die Reihe unter die von GAUSS und WEIERSTRASS betrachteten gehört, wenn nämlich der Quotient zweier aufeinanderfolgender Coefficienten nach ganzen negativen Potenzen des Index entwickelt werden kann, vollständig durchzuarbeiten. Eine dieser Reihen, die Binomialreihe, ist von ABEL selbst erledigt worden.

---

[1] Oeuvres ed. SYLOW et LIE, I, p. 34, II, p. 1, 14.

[2] *Vorlesungen über die Theorie der einf. und vielf. Integrale*, herausgegeben von E. NETTO. Leipzig 1894. Vorlesung 8, 9.

[3] Oeuvres ed. SYLOW et LIE, I, p. 618.

Dass dabei auch auf die STIRLING'sche Formel und auf die neuerdings viel behandelte Function $\zeta(s)$ von RIEMANN eingegangen wird, sowie das GAUSS-WEIERSTRASS'sche Convergenzcriterium für solche Reihen eine neue Begründung erfährt, welche seinen eigentlichen Charakter darzuthun scheint, möge damit gerechtfertigt werden, dass eine vielseitigere Verwendung der EULER'schen Formel in diesem Sinne vielleicht nicht ohne Interesse ist.

I.

Wir bezeichnen mit x eine reelle positive Zahl und mit $[x]$ die grösste in x enthaltene ganze Zahl. Wir setzen dann mit STIELTJES [1]

$$P_1(x) = [x] - x + \frac{1}{2}. \tag{1}$$

Es ist dann $P_1(x+1) = P_1(x)$ und, wie man aus der Reihenentwicklung

$$l(1 - re^{-i\varphi}) = -\sum_0^\infty \frac{r^n e^{-n\varphi i}}{n}$$

für $r = 1$ leicht herleitet,

$$P_1(x) = \sum_0^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{n\pi} \tag{2}$$

für alle nicht ganzzahligen Werthe von x.

Aus dieser Function $P_1(x)$ leiten wir eine Kette von Functionen ab durch die Recursionsformeln

$$\left\{\begin{aligned} & P_k(x) = (-1)^k \frac{dP_{k+1}(x)}{dx}, \qquad 0 < x < 1, \\ & \int_0^1 P_{k+1}(x)dx = 0, \\ & P_{k+1}(x+1) = P_{k+1}(x). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Dadurch sind sämmtliche Functionen $P(x)$ durch die erste bestimmt.

Es ergiebt sich unmittelbar aus der Definition, dass

1) $P_k(x)$ eine ganze rationale Function von $x - [x]$ mit rationalen Coefficienten ist und daher die Werthe $P_k(x)$ für ganzzahliges x selbst rationale Zahlen werden.

[1] Journal des mathématiques (sér. IV) V. 1889.

2) Dass die Functionen $P_k(x)$ für k grösser als 1 stetig sind für alle Werthe von x, auch die ganzzahligen, da nach (3)

$$P_{k+1}(1) - P_{k+1}(0) = (-1)^k \int_0^1 P_k(x)dx = 0.$$

3) Folgt aus der Entwicklung 2)

$$(4) \qquad \begin{cases} P_{2k}(x) = \sum_1^\infty \frac{\cos 2n\pi x}{2^{2k-1} n^{2k} \pi^{2k}}, \\ P_{2k+1}(x) = \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi x}{2^{2k} n^{2k+1} \pi^{2k+1}}. \end{cases}$$

Hieraus folgt unmittelbar die Identität unserer Functionen mit den gewöhnlich als BERNOULLI'sche bezeichneten, sowie die bekannten Sätze, dass die Functionen $P_{2k+1}(x)$ für ganzzahliges x verschwinden. Die Functionen $P_{2k}(x)$ nehmen aber für solche x rationale Werthe an. Es ist dann nach (4)

$$(5) \qquad P_{2k}(r) = 2^{-2k+1}\pi^{-2k}\zeta(2k)$$

wo, wie üblich

$$\zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s}$$

gesetzt ist.

Aus den Formeln (3) kann man leicht Recursionsformeln für die $P_{2k}(0)$ erhalten, doch gehe ich hierauf nicht weiter ein, weil es sich um längst bekannte Dinge handelt, welche für unsern Zweck nicht nöthig sind.

II.

Sei nun $F(x)$ eine reelle oder complexe Function der reellen Veränderlichen x, welche im Intervall von a bis $a + Nb$ überall eine stetige Derivirte hat. Dabei sei b positiv und N eine positive ganze Zahl. Dann gilt die Gleichung

$$(6) \qquad F(a + Nb) - F(a + nb) = b \int_n^N F'(a + zb)dz.$$

Setzt man hier $n = 0, 1, 2, 3, \ldots, N$ und summiert die so erhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$(7) \qquad (N+1)F(a+Nb) - \sum_0^N F(a+nb) = b \sum_0^N \int_n^N F'(a+zb)\,dz.$$

Denkt man sich auf der rechten Seite jedes Integral zerlegt in die Integrale zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen k und $k+1$, so sieht man, dass jedes Theilintegral genau $k+1$ mal vorkommt. Man kann daher schreiben

$$(8) \qquad \sum_0^N \int_n^N F'(a+zb)\,dz = b \int_0^N ([z]+1) F'(a+zb)\,dz.$$

Nun ist nach (1)

$$1 + [z] = P_1(z) + z + \frac{1}{2}.$$

Führt man diesen Ausdruck in (8) ein, so erhält man für die rechte Seite nach Ausführung der Integration des von $\frac{1}{2}$ stammenden und partieller Integration des mit z multiplizierten Gliedes:

$$b \int_0^N P_1(z) F'(a+zb)\,dz + \frac{1}{2}(F(a+Nb) - F(a))$$
$$+ NF(a+Nb) - \int_0^N F(a+zb)\,dz.$$

Nach Einführung in (7) und gehöriger Reduction kommt so

$$(9) \qquad \sum_0^N F(a+nb) = \int_0^N F(a+zb)\,dz + \frac{1}{2}(F(a+Nb) + F(a))$$
$$- b \int_0^N P_1(z) F'(a+zb)\,dz.$$

Dies ist bereits der Hauptsache nach die Euler'sche Summenformel, welche also wesentlich eine identische Umformung ist.

Hat die Function $F(x)$ in dem betrachteten Intervall noch weitere stetige Derivirte, so kann das letzte Glied in (9) durch partielle Integration weiter entwickelt werden. Man erhält so mit Rücksicht auf die

Periodicität der Functionen $P_k(x)$ und das Verschwinden der Functionen $P_{2k+1}(x)$ für ganzzahliges x aus (9):

$$(10)\qquad \sum_0^N F(a+nb) = \int_0^N F(a+zb)dz + \frac{1}{2}(F(a+Nb)+F(a))$$
$$+\sum_{h=0}^{k}(-1)^h P_{2h+2}(0)(F^{(2h+1)}(a+Nb)-F^{(2h+1)}(a))b^{2h+1}+\theta_k,$$
$$\theta_k = (-1)^{k+2}b^{2k+3}\int_0^N P_{2k+3}(z)F^{(2k+3)}(a+bz)dz$$
$$= (-1)^{k+1}b^{2k+2}\int_0^N P_{2k+2}(z)F^{(2k+2)}(a+bz)dz$$

also gerade die EULER'sche oder auch EULER-MACLAURIN'sche Summenformel.

III.

Als erste Anwendung zeigen wir, wie diese Formel gleichzeitig zum GAUSS'schen Product für die Function $\Gamma(y)$ als auch zur STIRLING'schen Formel, und zwar für alle nicht negativen Werthe von y führt.

Wir setzen in (9) $F(x) = l(y+x)$, wo y irgend eine reelle oder complexe Zahl, ausgenommen die reellen negativen Zahlen bedeuten kann. Wir nehmen ferner $a = 0$, $b = 1$ und geben dem Logarithmus seinen Hauptwerth. Dann folgt aus (9)

$$(11)\quad \sum_0^N l(y+n) = \int_0^N l(y+z)dz + \frac{1}{2}(l(y+N)+l(y)) - \int_0^N \frac{P_1(z)}{y+z}dz$$
$$= \left(y+N+\frac{1}{2}\right)l(y+N) - \left(y-\frac{1}{2}\right)l(y) - N - \int_0^N \frac{P_1(z)}{y+z}dz.$$

Setzt man in (11) $y = 1$ und subtrahirt, so kommt nach beiderseitiger Subtraction von $(y-1)lN$:

$$(12)\qquad \sum_0^N l\frac{y+n}{1+n} - (y-1)lN = (y-1)l\left(1+\frac{y}{N}\right)$$
$$+\left(1+N+\frac{1}{2}\right)l\left(1+\frac{y-1}{1+N}\right) - \left(y-\frac{1}{2}\right)l(y) - \int_0^N \frac{P_1(z)}{y+z}dz + \int_0^N \frac{P_1(z)}{1+z}dz.$$

Die rechte Seite in (12) convergirt zu einem bestimmten Grenzwerth für unendliches N, wie man an den Integralen entweder direct oder einfacher nach einmaliger partieller Integration sieht, daher convergirt auch die linke Seite, und man hat für jedes nicht reell negative y die Gleichung:

$$\lim_{N=\infty} l \frac{y(y+1)(y+2)(y+3)\ldots(y+N)}{1.2.3.4\ldots(N+1)} N^{-y+1}$$

$$= \left(-y+\frac{1}{2}\right) ly + y - 1 - \int_0^\infty \frac{P(z)}{y+z} dz + \int_0^\infty \frac{P(z)}{1+z} dz.$$

Kehrt man hier die Zeichen um, subtrahirt auf beiden Seiten ly und lässt in der Grenze den irrelevanten Factor $\frac{N}{N+1}$ weg. so erhält man

(13) $$\lim_{N=\infty} l \frac{(y+1)(y+2)\ldots(y+N)}{1.2.3\ldots N} N^{-y}$$

$$= \left(y+\frac{1}{2}\right) ly - y + 1 - \int_0^\infty \frac{P_1(z)}{1+z} dz + \int_0^\infty \frac{P_1(z)}{y+z} dz.$$

Hier steht links genau dass GAUSS'sche Product und rechts die STIRLING-sche Formel, wie sie STIELTJES dargestellt und weiter entwickelt hat. Die weiteren Glieder der Formel können wie bei STIELTJES durch partielle Integration gefunden und eingeschätzt werden.

Die EULER'sche Formel hat also hier unmittelbar auf die beiden wichtigsten Ausdrücke in der Theorie der Gammafunction geführt und deren Gleichheit dargethan.

IV.

Eine weitere Anwendung machen wir auf die harmonische Reihe und die Function $\zeta(s)$. Setzen wir in Formel (9) $F(x) = x^{-s}$, $a = 1$, $b = 1$ so erhalten wir:

(14) $$\sum_0^N (1+n)^{-s}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + \frac{(1+N)^{-s+1}}{1-s} + \frac{1}{2}(1+N)^{-s} + s\int_0^N P_1(z)(1+z)^{-s-1} dz.$$

So lange der reelle Theil von s grösser ist als 1, kann man auf beiden Seiten zur Grenze für unendliches N übergehen und erhält

$$(15) \qquad \zeta(s) = \sum_1^\infty n^{-s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + s \int_0^\infty P_1(z)(1+z)^{-s-1}dz.$$

Hier ist die linke Seite zunächst nur definirt, so lange der reelle Theil von s grösser ist als eins, dagegen aber stellt die rechte Seite eine analytische Function von s dar, so lange der reelle Theil von s positiv bleibt, da ja das Integral so lange gleichmässig convergirt. Daher haben wir in (15) in ganz unmittelbarer und elementarer Weise die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ für das Gebiet der s-Werthe mit positiven reellen Theil vor uns.

Die Anwendung der Formel (10) würde ergehen:

$$(16) \quad \zeta(s) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + \sum_0^k (-1)^h P_{2h+2}(0) s(s+1)(s+2)(s+3)\ldots(s+2h)$$
$$+ s(s+1)(s+2)(s+3)\ldots(s+2k+1)\int_0^\infty P_{2k+2}(z)(1+z)^{-s-2k-2}dz.$$

Da das Integral wegen der Endlichkeit von $P(z)$ endlich und gleichmässig convergent bleibt, so lange der reelle Theil von (s) grösser als $-2k-1$, so erhalten wir durch diese Formel unmittelbar die analytische Fortsetzung von $\zeta(s)$ für dieses Gebiet, und weil k beliebig gross genommen werden kann, sehen wir, dass die Function $\zeta(s)$ sich über die ganze Ebene fortsetzen lässt, ohne andere Singularitäten als den Pol bei $s = 1$ aufzuweisen. Dies ist wohl der einfachste und directeste Beweis des grundlegenden Satzes aus der Theorie dieser Function. Für $s = 0$ finden wir unmittelbar $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$.

Aus (15) folgt noch

$$|\zeta(s)| \leq |s| \left(\frac{1}{2|s|} + \frac{1}{|3(s-1)|} + \frac{1}{2\alpha} \right),$$

wenn $s = \alpha + \beta i$ gesetzt wird, so lange α positiv ist. Hieraus aber fliessen sofort die Sätze, welche Hadamard über das Verhalten der Function $\xi(t)$ gegeben hat für grosse Werthe von t, insbesondere erhält man durch Anwendung der Hadamard'schen Sätze über ganze Functionen, dass $\xi(t)$

vom Range Null ist, und durch Anwendung des Satzes von SCHOU den Näherungsausdruck für die Anzahl der Wurzeln von $\xi(t)$.

Zerlegt man in (15) das Integral rechts in Theilintegrale zwischen je zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen n und $n+1$, so ist in einem Intervall $P(z) = n - z + \frac{1}{2}$ und man kann die Integration ausführen. Man erhält so bei gehöriger Reduction

$$(17) \qquad \zeta(s) =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{1-s} + \frac{1}{1-s} \sum_{1}^{\infty} \left((1+n)^{-s}\left(n + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}s\right) - (2+n)^{-s}\left(n + \frac{3}{2} + \frac{1}{2}s\right) \right)$$

wo nun die Reihe unter dem Summenzeichen zu Folge ihrer Herleitung convergirt, so lange der reelle Theil von s positiv ist. Für ein s dessen reeller Theil grösser als 1 ist, reducirt sich diese Reihe identisch auf die ursprüngliche Reihe für $\zeta(s)$. Auch die Formel (18) kann in dieser Weise behandelt werden, liefert aber mit steigendem k erheblich complicirtere Resultate. Man kann bemerken, dass die Formel (17) sich für ein s mit positiven reellen Theil auf die bekannte

$$\zeta(s) = \lim_{N=\infty} \left(\sum_{0}^{N} (1+n)^{-s} - \frac{(1+N)^{-s}}{1-s} \right)$$

reducirt, und analog die aus (16) hergeleiteten Formeln auf die bekannten Grenzausdrücke.[1] Man erhält diese auch leicht unmittelbar aus der EULER'-schen Formel.

Entwickelt man (14) durch partielle Integration und subtrahirt davon (16) so erhält man die ebenfalls bekannte Formel

$$(18) \qquad \sum_{0}^{N} (1+n)^{-s} = \zeta(s) + \frac{(1+N)^{-s+1}}{1-s} + \frac{1}{2}(1+N)^{-s}$$

$$- \sum_{0}^{k} (-1)^{h} P_{2h}(0) s(s+1)(s+2)\ldots(s+2h)(N+1)^{-s-2h-1}$$

$$- s(s+1)(s+2)\ldots(s+2k+1) \int_{N}^{\infty} P_{2k+2}(z)(1+z)^{-s-2k-2}\, dz.$$

[1] vgl. STOLZ, *Allgem. Arithmetik*, II, p. 224 ff.

Für $s = 1$ dagegen erhält man durch unmittebare Anwendung von (9)

$$(19)\quad \sum_0^N (1+n)^{-1} = \frac{1}{2} + l(1+N) + \frac{1}{2}(1+N)^{-1} + \int_0^N P_1(z)(1+z)^{-2}dz$$

und durch Grenzübergang zu unendlichem N

$$(20)\qquad \lim_{N=\infty}\left(\sum_0^N (1+n)^{-1} - l(N+1)\right) = \int_0^\infty P_1(z)(1+z)^{-2}dz = E$$

wo E die EULER'sche Constante bedeutet.

Subtrahiert man (20) von (19) so erhält man noch

$$(21)\quad \sum_0^N (1+n)^{-1} = l(1+N) + E + \frac{1}{2}(1+N)^{-1} - \int_N^\infty P_1(z)(1+z)^{-2}dz$$

wo das Integral wieder durch partielle Integration entwickelt werden kann, und so die bekannte Summenformel liefert.

Wenn auch viele von den Formeln dieses Paragraphen bekannt sind, scheint mir doch die Einfachheit und der geringe Aufwand an Rechnung durch welchen sie aus der EULER'schen Summenformel hervorgehen, bemerkenswerth.

V.

Als eine weitere Anwendung von (9) setzen wir $F(z) = e^{-z^\lambda \pi x}$ und $a = 0$, $b = 1$; x werde reell und positiv angenommen.

Man hat dann

$$(22)\quad \sum_0^N e^{-n^\lambda \pi x} = \int_0^N e^{-z^\lambda \pi x}dz + \frac{1}{2}(e^{-N^\lambda \pi x} + 1) + \lambda\pi x\int_0^N P_1(z)e^{-z^\lambda \pi x}z^{\lambda-1}dz.$$

Ist λ reell und positiv, so kann man auf beiden Seiten zu unendlich grossem N übergehen und erhält

$$(23)\qquad \sum_0^\infty e^{-n^\lambda \pi x} = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\pi^{-\frac{1}{\lambda}}x^{-\frac{1}{\lambda}} + \frac{1}{2} + \lambda\pi x\int_0^\infty P_1(z)e^{-z^\lambda \pi x}z^{\lambda-1}dz.$$

Setzt man in dem letzten Integral $z^\lambda \pi x = q$, so kommt

$$(24)\qquad x^{\frac{1}{\lambda}}\sum_0^\infty e^{-n^\lambda \pi x} = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\pi^{-\frac{1}{\lambda}} + x^{\frac{1}{\lambda}}\left(\frac{1}{2} + \int_0^\infty P_1\left(q^{\frac{1}{\lambda}}\pi^{-\frac{1}{\lambda}}x^{-\frac{1}{\lambda}}\right)e^{-q}dq\right)$$

Da $|P_1(z)|$ immer kleiner oder gleich $\frac{1}{2}$ ist, so ist das noch vorkommende Integral ebenfalls absolut kleiner oder höchstens gleich $\frac{1}{2}$ und man erhält

$$(25)\qquad x^{\frac{1}{\lambda}}\sum_0^\infty e^{-n^\lambda \pi x} = \frac{1}{\lambda}\Gamma\left(\frac{1}{\lambda}\right)\pi^{-\frac{1}{\lambda}} + \theta x^{\frac{1}{\lambda}}$$

wo θ zwischen Null und Eins liegt.

Für $\lambda = 1$ bestätigt man diese Formel leicht direct, für $\lambda = 2$ erhält man sie auch aus der bekannten JACOBI'schen Formel

$$x^{\frac{1}{4}}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2\pi x} = x^{-\frac{1}{4}}\sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{x}}$$

VI.

Die unter IV. entwickelten Formeln geben zugleich vollständigen Aufschluss über die Convergenz und Divergenz der harmonischen Reihe, welche aus (14) für unendlich grosses N hervorgeht. Insbesondere zeigt (14) auch die Divergenz für solche Werthe von s, deren reeller Theil grösser als Null, dagegen kleiner als eins ist, und ausserdem noch für den Fall in welchem der imaginäre Theil von s von Null verschieden der reelle aber gleich eins ist. Die Divergenz für $s = 1$ ist aber durch (21) erledigt, und für ein s dessen reeller Theil gleich Null ist, unmittelbar ersichtlich.

Dagegen convergiren die Reihen

$$(26)\qquad \sum_0^\infty e^{in\varphi}(1+n)^{-s}$$

für jedes s dessen reeller Theil grösser ist als eins und beliebiges reelles φ, und für ein s dessen reeller Theil von Null verschieden und kleiner oder gleich eins ist für alle reellen Werthe von φ ausgenommen Null und ganze vielfache von 2π, divergiren aber in allen andern Fällen.

Die Behauptungen über das Verhalten der Reihe für $\varphi = 0$ oder ganze vielfache von 2π sind im vorigen enthalten, für die übrigen Werthe von φ gehen sie unmittelbar aus der ABEL'schen Umformung[1] der Reihe (26) hervor. Es ist danach identisch

$$(27)\quad \sum_0^N e^{ni\varphi}(1+n)^{-s} = \sum_0^N \frac{1-e^{i(n+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}(n^{-s}-(n+1)^{-s}) + \frac{1-e^{i(N+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}(N+1)^{-s}$$

und hieraus folgt unmittelbar die Behauptung, da für jedes s

$$\lim_{n=\infty} \frac{(n^{-s}-(n+1)^{-s})}{n^{-s-1}} = s$$

ist, und die Factoren $\frac{1-e^{i(n+1)\varphi}}{1-e^{i\varphi}}$ endliche Grenzen nicht überschreiten. Diese Bemerkungen genügen um den Beweis der GAUSS-WEIERSTRASS'schen Convergenzcriterien in sehr einfacher Weise zu führen, wobei der eigentliche Charakter derselben scharf hervortritt. Darüber hinaus aber gestattet die EULER'sche Formel auch über das Verhalten der durch solche Reihen definirten Functionen auf dem Convergenzkreis auch in dem Falle bestimmte Angaben zu machen, wo die Reihen auf dem Convergenzkreis divergiren.

Sei eine Zahlenfolge c_n $(n = 1, 2, 3, 4, \ldots)$ gegeben, so dass sich der Quotient zweier aufeinanderfolgender c_n von einem bestimmten n an in eine nach fallenden ganzen Potenzen von n fortschreitende Reihe entwickeln lässt

$$(28)\qquad \frac{c_{n+1}}{c_n} = 1 + \frac{\alpha + i\beta}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \frac{a_3}{n^3} + \ldots,$$

dann besagen diese Criterien, dass die Reihe $\sum_0^\infty c_n x^n$ divergirt für $|x| = 1$, wenn α positiv oder Null ist, dass sie für alle diese Werthe ausgenommen $x = 1$ convergirt, wenn α negativ aber grösser oder gleich -1 ist, dagegen absolut convergirt, wenn α kleiner als -1 ist. Zum Beweis nehme man in (28) die Logarithmen und entwickle rechts nach negativen ganzen Potenzen von n. Diese Entwicklung muss zufolge der

[1] Oeuvres, ed. SYLOW et LIE, I. p. 222.

gemachten Voraussetzung über die Grössen c_n wenigstens von einem bestimmten n an convergiren. Man erhält so

$$(29)\qquad lc_{n+1}-lc_n=\frac{\alpha+i\beta}{n}+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{b_\nu}{n^{1+\nu}}.$$

Es sei nun n_1 die kleinste ganze Zahl für welche (29) gilt. Setzt man nun der Reihe nach für n, n_1+1, n_1+2, n_1+3, ..., n_1+k und addirt, so kommt

$$(30)\qquad lc_{n_1+k+1}=lc_{n_1+1}+(\alpha+i\beta)\sum_1^k\frac{1}{n_1+h}+\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu\sum_1^k\frac{1}{(n_1+h)^{1+\nu}}.$$

Ersetzt man hier die Summen nach n durch die aus (21) resp. (18) sich ergebenden Formeln

$$\sum_1^k(n_1+h)^{-1}=l(n_1+k)-ln_1+\frac{1}{2}(n_1+k)^{-1}-\frac{1}{2}n_1^{-1}$$
$$-\int_{n_1+k-1}^{\infty}P_1(z)(1+z)^{-2}dz+\int_{n_1}^{\infty}P_1(z)(1+z)^{-2}dz,$$

$$\sum_1^k(n_1+h)^{-1-\nu}=\frac{n_1^{-\nu}-(n_1+k)^{-\nu}}{\nu}-\frac{1}{2}(n_1^{-\nu-1}-(n_1+k)^{-\nu-1})$$
$$+(1+\nu)\int_{n_1}^{\infty}P_1(z(1+z)^{-2-\nu}dz-(1+\nu)\int_{n_1+k-1}^{\infty}P_1(z)(1+z)^{-2-\nu}dz$$

so erhält man auf der rechten Seite den von k unabhängigen Theil

$$C=lc_{n_1}-(\alpha+i\beta)ln_1-\frac{1}{2}n_1^{-1}+(\alpha+\beta i)\int_{n_1}^{\infty}P_1(z)(z+1)^{-2}dz$$
$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu\left(\frac{n_1^{-\nu}}{\nu}-\frac{1}{2}n_1^{-\nu-1}+(1+\nu)\int_{n_1}^{\infty}P_1(z)(1+z)^{-2-\nu}dz\right)$$

und den von k abhängigen Theil

$$(31)\qquad (\alpha+i\beta)l(n_1+k)+\frac{1}{2}(n_1+k)^{-1}-(\alpha+i\beta)\int_{n_1+k-1}^{\infty}P_1(z)(1+z)^{-2}dz$$
$$-\sum_{\nu=1}^{\infty}b_\nu\left(\frac{(n_1+k)^{-\nu}}{\nu}-\frac{1}{2}(n_1+k)^{-\nu-1}+(1+\nu)\int_{n_1+k-1}^{\infty}P_1(z)(1+z)^{-2-\nu}dz\right).$$

Man sieht sogleich, dass die auftretenden unendlichen Reihen in der That convergiren, sowie dass die von $(\alpha + i\beta)l(n_1 + k)$ verschiedenen Glieder sich in die Form setzen lassen

$$\frac{\eta}{n_1 + k}$$

wo $|\eta|$ unter einer von k unabhängigen Grenze bleibt.

Damit erhält man

$$c_{n_1+k+1} = C(n_1 + k)^{\alpha+i\beta}\left(1 + \frac{\eta}{n_1 + k}\right) \tag{32}$$

und die Beurtheilung der Convergenz oder Divergenz der Reihe S ist also auf die der harmonischen Reihe zurückgeführt, und zwar nach den an Formel (27) geknüpften Bemerkungen auch für den Fall $|x| = 1$. Damit ergeben sich unmittelbar die angeführten Criterien von Gauss und Weierstrass, und zugleich die Einsicht in das Gesetz der Abnahme der c, also den eigentlich massgebenden Umstand.

Im Falle der hypergeometrischen Reihe, für welchen ja Gauss ursprünglich seine Untersuchungen angestellt hat, kann man die Gleichung (31) unmittelbar bestätigen. Es ist hier

$$c_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,\frac{\Gamma(\alpha + n)\Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\gamma + n)\Gamma(n + 1)}.$$

Benützt man hier für die Gammafunctionen, welche n enthalten, die Stirling'sche Formel, so erhält man nach leichter Umrechnung für genügend grosses n

$$c_n = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,n^{\alpha+\beta-\gamma-1}\left(1 + \frac{\theta}{n}\right)$$

wo $|\theta|$ eine von n unabhängige Grösse nicht überschreitet. Hieraus entnimmt man unmittelbar die für das Verhalten der hypergeometrischen Reihe auf dem Einheitskreis geltenden Regeln.

VII.

Entwickelt man in der Formel (31) die Integrale durch partielle Integration soweit, dass in dem Restintegral

$$(1+\nu)(2+\nu)\ldots(r+\nu)\int\limits_{n_1+k-1}^{\infty} P_r(z)(1+z)^{-r-1-\nu}dz$$

der Exponent $-\nu-1-r<-3-\alpha$, so werden diese selbst absolut kleiner als

$$2^{-r+1}\pi^{-r+1}\zeta(r)(1+\nu)(2+\nu)\ldots(r+\nu-1)(n_1+k-1)^{-\nu-r}$$

und man erhält dann aus Formel (31) durch Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen

$$(33)\quad c_{n_1+k+1}=C(n_1+k)^{\alpha+i\beta}\left(1+\frac{d_1}{(n_1+k)}+\frac{d_2}{(n_1+k)^2}+\cdots+\frac{d_{r-1}}{(n_1+k)^{r-1}}+\frac{\omega_r}{(n_1+k)^r}\right)$$

wo ω_r wieder unter einer von k unabhängigen Grenze bleibt. Dabei ist dann zu Folge der Wahl von r die Differenz $r-\alpha>1$.

Die so erhaltene Entwicklung kann möglicherweise ins unendliche fortgesetzt convergiren und c_{n_1+k+1} darstellen. Im Allgemeinen wird dies jedoch nicht der Fall sein, sondern man wird so nur asymptotische Formeln für c_{n_1+k+1} erhalten.

Auf alle Fälle aber liefert die Entwicklung (33) das Mittel, das Verhalten der durch die Reihe $\sum\limits_0^{\infty} c_n x^n$ dargestellten Function auf dem Convergenzkreis vollständig anzugeben, und so für diese Reihen das von Abel gestellte und in der Einleitung erwähnte Problem vollständig zu lösen.

Betrachten wir nämlich zuerst der Binomialreihe, welche Abel selbst der Anlass zur Entwicklung grundlegender Sätze über Potenzreihen war, und setzen

$$(1-x)^s=\sum_0^{\infty}(-1)^n\binom{s}{n}x^n$$

so können wir die Coefficienten schreiben

$$(-1)^n\binom{s}{n} = \frac{\Gamma(-s+n)}{\Gamma(-s)\Gamma(n+1)}$$

ausser wenn s eine ganze positive Zahl oder Null ist.

Für genügend grosses n erhalten wir dann durch Anwendung der STIRLING'schen Formel und Übergang von den Logarithmen zu den Zahlen

$$\frac{\Gamma(-s+n)}{\Gamma(-s)\Gamma(n+1)}$$

$$= \frac{1}{\Gamma(-s)}(n-1)^{-s-1}\left(1 + \frac{a_{s,1}}{n-1} + \frac{a_{s,2}}{(n-1)^2} + \frac{a_{s,3}}{(n-1)^3} + \ldots + \frac{\theta_{s,r}}{(n-1)^r}\right)$$

wo $|\theta_{s,r}|$ eine von n unabhängige Schranke nicht überschreitet. Ferner steht uns noch die Formel zur Verfügung

$$l(1-x) = -\sum_1^\infty \frac{x^n}{n}.$$

Sei nun

$$f(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$$

und die Coefficienten c_n für jedes n grösser als N darstellbar nach (33) in der Gestalt

$$c_n = C(n-1)^{\alpha+i\beta}\left(1 + \frac{d_1}{n-1} + \frac{d_2}{(n-1)^2} + \ldots + \frac{d_{r-1}}{(n-1)^{r-1}} + \frac{\omega_r}{(n-1)^r}\right)$$

und wird $\alpha + i\beta = -s - 1$ gesetzt, r aber so gewählt, dass $r - \alpha > 1$, wobei das Ungleichheitszeichen im strengen Sinn zu nehmen ist, bilden wir ferner die Function

$$(34) \qquad \phi(x) = f(x) - \sum_{m=0}^{r-1} g_m(1-x)^{s+m}\Gamma(-s-m) = \sum_0^\infty q_n x^n$$

in welcher die g_m bestimmt sind durch die Gleichungen

$$(35) \qquad \begin{cases} g = C, \\ g_1 + g_0\alpha_{s,1} = Cd_1, \\ g_2 + g_1\alpha_{s+1,1} + g_0\alpha_{s,2} = Cd_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ g_{r-1} + g_{r-2}\alpha_{s+r-1,1} + g_{r-3}\alpha_{s+r-2,2} + \ldots + g_0\alpha_{s,r-1} = Cd_{r-1} \end{cases}$$

so sieht man sogleich, dass von einem bestimmten n angefangen die Formel gilt

$$q_n = \frac{\Omega_r}{(n-1)^{r-\alpha-i\beta}}$$

wobei Ω_r sich linear aus Grössen zusammenzetzt, welche von n unabhängige Schranken nicht überschreiten, und daher dieselbe Eigenschaft hat.

Die Potenzreihe für $\psi(x)$ convergirt daher wegen $r-\alpha > 1$ am ganzen Convergenzkreis und kann unmittelbar zur Berechnung des Werthes unserer Reihe dienen. Wenn aber, was bisher ausgeschlossen war, s gleich einer positiven ganzen Zahl ist, so ist die ursprüngliche Reihe unmittelbar zur Berechnung von $f(x)$ brauchbar, ausgenommen für $s = 0$, $\alpha = -1$. Dann aber liefert die Addition der Reihe für $Cl(1-x)$ zu $f(x)$ eine convergente Reihe.

Mann kann daher folgenden Satz aussprechen:

Ist eine Function durch eine Potenzreihe definirt, und haben die Coefficienten die in (28) *beschriebene Beschaffenheit, so lassen sich immer r Zahlen* $g_0, g_1, g_2, \ldots$ *und erforderlichen falls eine Grösse h so bestimmen, dass*

$$(36)\quad f(x) = hl(1-x) + \sum_{m=0}^{r-1} g_m \Gamma(\alpha + i\beta - m + 1)(1-x)^{-\alpha-i\beta+m-1} + \sum_0^\infty q_n x^n$$

wo die letzte Potenzreihe rechts am ganzen Convergenzkreis der ersten Reihe convergirt und ebenfalls zu dem hier betrachteten Typus gehört. Dabei ist r eine beliebige ganze Zahl, welche grösser ist als $1+\alpha$. *Das logarithmische Glied tritt niemals auf, wenn nicht* $\beta = 0$ *und* α *eine ganze Zahl ist, welche grösser oder gleich* -1 *ist.*

Die Function $f(x)$ *hat daher höchstens für* $x = 1$ *keinen endlichen Werth.*

Es sei noch bemerkt, dass man dieselben Methoden auch dann anwenden kann, wenn eine Entwicklung des Quotienten zweier aufeinanderfolgender Coefficienten statt nach ganzen Potenzen von n^{-1} nach solchen von $n^{-\rho}$ möglich ist, wo ρ eine Zahl mit positiven reellem Theil bedeutet.

Doch werden die Resultate sehr complicirt und die Fallunterscheidungen sehr zahlreich. Ich begnüge mich daher mit dem blossen Hinweis, um somehr als mir keine für die Analysis wichtigere Reihe mit dieser Eigenschaft bekannt ist. Dagegen ist das hier aufgestellte Theorem aus dem Grunde bemerkenswerth, weil die Beschaffenheit der Function auf dem Convergenzkreis aus den Coefficienten gefolgert wird, und zwar auch dann, wenn die Reihe dort divergirt.

Da ferner r beliebig gross gewählt werden kann, so wäre es von Interesse zu untersuchen, unter welchen Bedingungen man auf diesem Wege zu einer Entwicklung um die Stelle $x = 1$ gelangen kann. Schon die hypergeometrischen Reihe zeigt, dass das im allgemeinen nicht der Fall ist. Es wäre ferner interessant zu untersuchen, unter welchen Umständen die erste Summe rechts in (36) überhaupt für $r = \infty$ convergirt, und welche Bedeutung sie dann für die Function $f(x)$ hat. Ferner könnte man die Frage aufwerfen unter welchen Bedingungen die hier betrachteten Reihen über den Convergenzkreis hinaus analytisch fortsetzbar sind, und was für Functionen so entstehen. Es ist zu erwarten, dass auch für diese Fragen die Euler'sche Summenformel ein werthvolles Hilfsmittel bieten wird.