SUR UNE IDENTITÉ D'ABEL ET SUR D'AUTRES FORMULES ANALOGUES

PAR

J. L. W. V. JENSEN

à COPENHAGUE.

ABEL[1] à démontré l'extension suivante de la formule du binôme

$$(1) \qquad (x+\alpha)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \alpha(\alpha-\nu\beta)^{\nu-1}(x+\nu\beta)^{n-\nu}.$$

Dans une note à la mémoire d'ABEL, LIE[2] a dit que la formule (1) n'est qu'un cas spécial d'une formule donnée autérieurement par CAUCHY.[3] Voici la formule à laquelle se rapporte l'observation de LIE

$$(2) \qquad \frac{(x+\alpha+n)^n-(x+n)^n}{\alpha} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \binom{n}{\nu}(\alpha+n-\nu)^{n-\nu-1}(x+\nu)^{\nu},$$

où nous avons seulement changé les noms des variables. On voit aisément que la formule de CAUCHY se déduit de celle d'ABEL en prenant dans la dernière $\beta = -1$ et en remplaçant x par $x+n$. L'assertion de LIE n'est donc pas bien fondée, car c'est la formule (1) qui a la forme la plus générale. Du reste on peut déduire celle-ci de la formule (2) en faisant dans la dernière les substitutions

$$x \,\Big|\, -\frac{x}{\beta}-n\,,\quad \alpha\,\Big|\, -\frac{\alpha}{\beta}.$$

[1] *Démonstration d'une expression de laquelle la formule binôme est un cas particulier.* Journal für die Mathematik, t. 1, p. 159 (1826) = Oeuvres complètes (l'édition de SYLOW et LIE), t. I, p. 102.

[2] Oeuvres d'ABEL, l'édition citée, t. II, p. 294.

[3] Exercices de Mathématiques, 1ère année, p. 53, formule (36), (1826).

La démonstration d'ABEL qui se réduit à une induction complète [1] ne laisse pas entrevoir la méthode qu'a suivi l'illustre géomètre pour trouver sa formule. C'est dans une mémoire posthume [2] que l'on trouve l'origine de la formule (1). Le problème qu'ABEL se pose est de développer la fonction $\varphi(x + \alpha)$ en termes de la forme $\frac{d^n}{dx^n}\varphi(x + n\beta)$ et il le réduit, par des méthodes d'une grande portée, à celui de »développer $e^{\alpha v}$ suivant les puissances de $ve^{\beta v}$». Il trouve ainsi la formule

$$(3) \qquad \varphi(x + \alpha) = \varphi(x) + \frac{\alpha}{\underline{|1}} \frac{d\varphi(x + \beta)}{dx} + \frac{\alpha(\alpha - 2\beta)}{\underline{|2}} \frac{d^2\varphi(x + 2\beta)}{dx^2} + \dots$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha - \nu\beta)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} \varphi^{(\nu)}(x + \nu\beta),$$

de laquelle la formule (1) est un cas spécial. La méthode d'ABEL est loin d'être rigoureuse, et c'est sans donte pour cette raison qu'il n'a pas publié le mémoire cité,[2] en donnant seulement un des résultats sûrs qu'il avait trouvé.

Quant à la formule (3) HALPHEN [3] a donné les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'elle soit exacte, en montrant en même temps qu'elle peut souvent conduire à des résultats inexacts.

Nous étudierons, dans cette note, quelques séries qui sont intimement liées à la formule d'ABEL (1) et à d'autres formules analogues, qui seront établies dans la suite.

1. Soit d'abord z une variable complexe, et soient $\Phi(z)$ et $(1 : f(z))$ des fonctions holomorphes dans les environs de $z = 0$, on sait par la théorie de l'inversion des séries qu'on peut développer $\Phi(z)$ en série entière de $(z : f(z))$ pour *z suffisamment petite*. En se servant de la série de LAGRANGE on trouve, comme il est bien connu,

$$(4) \qquad \Phi(z) = \Phi(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} \left[\frac{d^{\nu-1}}{dz^{\nu-1}} (f(z))^\nu \Phi'(z)\right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)}\right)^\nu.$$

[1] Pour une autre démonstration du même genre, mais plus élémentaire, voir: M. E. NETTO, Lehrbuch der Combinatorik, p. 52 (1901).

[2] *Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.* Oeuvres, t. II, p. 72, probl. IV.

[3] *Sur une série d'Abel.* Bulletin de la société mathématique, t. X, p. 67, et Comptes Rendus, t. 93, p. 1003 (1881).

L'autre forme de la série de LAGRANGE[1] nous donne de même

$$\frac{\Phi(z)}{1 - z\dfrac{f'(z)}{f(z)}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|\nu}} \left[\frac{d^\nu}{dz^\nu}(f(z))^\nu \Phi(z)\right]_{z=0} \left(\frac{z}{f(z)}\right)^\nu. \tag{5}$$

Prenons maintenant $\Phi(z) = e^{\alpha z}$, $f(z) = e^{\beta z}$, $u = ze^{-\beta z}$, α et β étant des constantes quelconques, nous aurons les développements suivants

$$e^{\alpha z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha + \nu\beta)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} u^\nu = 1 + \frac{\alpha}{\underline{|1}} ze^{-\beta z} + \frac{\alpha(\alpha + 2\beta)^1}{\underline{|2}} z^2 e^{-2\beta z} + \ldots \tag{6}$$

et

$$\frac{e^{\alpha z}}{1 - \beta z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha + \nu\beta)^\nu}{\underline{|\nu}} u^\nu = 1 + \frac{(\alpha + \beta)^1}{\underline{|1}} ze^{-\beta z} + \frac{(\alpha + 2\beta)^2}{\underline{|2}} z^2 e^{-2\beta z} + \ldots \tag{7}$$

valables pour z et u suffisamment petites. De ces formules la premiere (6) est bien connue, et on sait que la série au deuxième membre converge pour $|\beta u| < e^{-1}$, ou $|\beta z| e^{1-R(\beta z)} < 1$. On sait aussi que l'égalité entre les deux membres n'est assurée que si la condition supplémentaire $|\beta z| < 1$ est satisfaite. La formule (7) est moins connue[2]; ses conditions d'existence sont les mêmes que celles pour la formule (6).

Signalons incidemment les deux autres formules que voici:

$$\left.\begin{aligned} &z^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n(n + \nu)^{\nu-1}\beta^\nu}{\underline{|\nu}} u^{n+\nu}, \qquad n > 0, && (8)\\ &\text{et}\\ &\frac{z^n}{1 - \beta z} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(n + \nu)^\nu \beta^\nu}{\underline{|\nu}} u^{n+\nu}, \qquad n \geqq 0, && (9) \end{aligned}\right\} u = ze^{-\beta z}.$$

On les déduit des formules (6) et (7) en prenant dans celles-ci $\alpha = n\beta$ et en multipliant les deux membres par u^n, n étant un entier.

Revenons maintenant à la formule (6). En posant respectivement $\alpha = a$ et $\alpha = b$ et en multipliant les deux formules qui en résultent membre par membre on trouve

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} (a + b)(a + b + \nu\beta)^{\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} a(a + \nu\beta)^{\nu-1} \cdot \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{u^\nu}{\underline{|\nu}} b(b + \nu\beta)^{\nu-1}.$$

---

[1] Voir C. HERMITE. Cours professé pendant le 2e sémestre, 1881—82, 19ème leçon.

[2] Elle est peut-être nouvelle, quoique il me semble peu probable qu'une formule aussi élégante soit échappée à l'attention des géomètres.

En comparant les coefficients de u^n dans les deux membres, nous aurons

$$(10)\quad (a+b)(a+b+n\beta)^{n-1} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a(a+\nu\beta)^{\nu-1} b(b+(n-\nu)\beta)^{n-\nu-1},$$

qui est une nouvelle forme symétrique de l'identité d'Abel. Il est même aisé d'en déduire la formule (1) par un calcul facile.

De l'identité

$$\frac{e^{(a+b)z}}{1-\beta z} = e^{az}\frac{e^{bz}}{1-\beta z}$$

on deduit de la même manière en employant les formules (6) et (7),

$$(a+b+n\beta)^n = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} a(a+\nu\beta)^{\nu-1}(b+(n-\nu)\beta)^{n-\nu},$$

qui se réduit à la formule (1) quand on prend $a=\alpha$, $b+n\beta=x$ et puis échange β en $-\beta$.

2. Ces résultats nous engagent de faire d'autres substitutions dans les formules (4) et (5). Posons $\Phi(z)=(1+z)^\alpha$ et $f(z)=(1+z)^\beta$, α et β étant des constantes quelconques et les puissances ayant toujours leurs valeurs principales, nous aurons les formules

$$(11)\quad (1+z)^\alpha = 1+\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\alpha}{\nu}\binom{\alpha-1+\nu\beta}{\nu-1}v^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\alpha}{\alpha+\nu\beta}\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu}v^\nu,$$

et

$$(12)\quad \frac{(1+z)^\alpha}{1-\beta\dfrac{z}{1+z}} = \frac{(1+z)^{\alpha+1}}{1-(\beta-1)z} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu}v^\nu,$$

$$v = z(1+z)^{-\beta},$$

qui sont valables pour z suffisamment petit. Pour le moment ce fait nous suffit. Les conditions de convergence seront données dans un appendice à la fin de cette note. En prenant, dans les deux formules que nous venons de démontrer, $\beta=0$ l'une et l'autre se reduit à la formule binôme

$$(1+z)^\alpha = \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{\alpha}{\nu}z^\nu$$

à exposant quelconque, et elles constituent ainsi des généralisations de la dernière formule. Aussi pour $\beta=1$ on retrouve cette formule.

On peut de la même manière généraliser le développement de la valeur principale du logarithme

$$l(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu} z^\nu.$$

Posons dans (4) $\Phi(z) = l(1+z)$ et $f(z) = (1+z)^\beta$, nous aurons la formule

$$(13) \qquad l(1+z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\binom{\nu\beta - 1}{\nu - 1} v^\nu, \qquad v = z(1+z)^{-\beta},$$

z ayant toujours une valeur absolue suffisamment petite.

Remarquons encore deux autres formules qui se déduisent de (11) et (12), en prenant $\alpha = n\beta$ et en multipliant les deux membres par v^n:

$$(14) \qquad z^n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{n}{n+\nu}\binom{(n+\nu)\beta}{\nu} v^{n+\nu}, \qquad n > 0,$$

et

$$(15) \qquad \frac{z^n}{1 - \beta\dfrac{z}{1+z}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{(n+\nu)\beta}{\nu} v^{n+\nu}, \qquad n \geqq 0,$$

$$\left.\begin{matrix}(14)\\(15)\end{matrix}\right\} \; v = z(1+z)^{-\beta},$$

n étant un entier.

On remarquera l'analogie parfaite qui existe entre les formules (6) et (11), (7) et (12), (8) et (14), (9) et (15). Cette analogie s'étend aux identités algébriques qu'on peut en déduire.

Développons des deux membres de l'identité $(1+z)^{a+b} = (1+z)^a(1+z)^b$ en séries entières de v d'après la formule (11), on trouve en égalant les coefficients de v^n dans les deux membres,

$$(16) \quad \frac{a+b}{a+b+n\beta}\binom{a+b+n\beta}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu} \frac{b}{b+(n-\nu)\beta}\binom{b+(n-\nu)\beta}{n-\nu},$$

ou en remplaçant b par $b - n\beta$

$$(16 \text{ bis}) \qquad \frac{a+b-n\beta}{a+b}\binom{a+b}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu} \frac{b-n\beta}{b-\nu\beta}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu},$$

ce qui constitue une relation entre les coefficients du binôme. La formule symétrique (16) peut être regardée comme étant une généralisation du »binôme de Vandermonde» exactement de la même manière que la formule symétrique (10) constitue une généralisation du binôme de NEWTON à exposant positif et entier.

De l'identité

$$\frac{(1+z)^{a+b}}{1-\beta\frac{z}{1+z}} = (1+z)^a \frac{(1+z)^b}{1-\beta\frac{z}{1+z}}$$

et des formules (11) et (12) on déduit pareillement l'identité algébrique

$$\binom{a+b+n\beta}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b+(n-\nu)\beta}{n-\nu},$$

ou

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}, \tag{17}$$

formule qui est analogue à l'identité d'ABEL (1).

Les formules (16 bis) et (17) sont dues à M. I. G. HAGEN en ce sens qu'elles sont comprises dans la formule

$$\frac{a(p+q-nd)+bnq}{(p+q)(p-nd)q}\binom{p+q}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a+b\nu}{(q+d\nu)(p-d\nu)}\binom{q+d\nu}{\nu}\binom{p-d\nu}{n-\nu},$$

qu'il donne sans démonstration.[1] D'autre part la formule ci-dessus peut être déduite des deux formules (16 bis) et (17), qui sont très générales. Presque toutes les relations connues entre les coefficients du binôme s'en déduisent.

3. De la formule (17) nous allons déduire une formule très curieuse. Il s'agit de développer la somme

$$(a\,,\,b\,,\,n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}$$

[1] Synopsis der höheren Mathematik, t. I, p. 67, formule C. 17 (1891).

d'après les puissances entières de β. Voici comment nous procédons. La formule (17) peut s'écrire

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu} - \beta\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\nu}{a+\nu\beta}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}$$

$$= (a\,,\,b\,,\,n) - \beta\sum_{\nu=1}^{n}\binom{a-1+\nu\beta}{\nu-1}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu}$$

$$= (a\,,\,b\,,\,n) - \beta\sum_{\nu=0}^{n-1}\binom{a-1+\beta+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\beta-\nu\beta}{n-1-\nu}$$

ou

$$(a\,,\,b\,,\,n) \qquad -\beta(a-1+\beta,\, b-\beta,\, n-1) = \binom{a+b}{n},$$

et par suite

$$\beta(a-1+\beta, b-\beta, n-1) \quad -\beta^2(a-2+2\beta, b-2\beta, n-2) = \beta\binom{a+b-1}{n-1},$$

$$\beta^2(a-2+2\beta, b-2\beta, n-2) - \beta^3(a-3+3\beta, b-3\beta, n-3) = \beta^2\binom{a+b-2}{n-2},$$

. . . .

$$\beta^{n-1}\big(a-(n-1)(1-\beta),\, b-(n-1)\beta,\, 1\big) - \beta^n = \beta^{n-1}\binom{a+b-n+1}{1},$$

$$\beta^n \qquad\qquad = \beta^n \binom{a+b-n}{0}.$$

En sommant on trouve la formule nouvelle et élégante

$$(18) \qquad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{b-\nu\beta}{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{n}\binom{a+b-\nu}{n-\nu}\beta^\nu,$$

qui exprime le résultat cherché.

Dans le cas où $a+b=p$, p étant un entier positif ou nul et plus petit que n, on peut trouver la somme dans le deuxième membre. On a en effet

$$\binom{p-\nu}{n-\nu} = \frac{(p-\nu)(p-\nu-1)\ldots(p-n+1)}{\lfloor n-\nu} = (-1)^{n-\nu}\binom{n-p-1}{n-\nu}$$

et par suite

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{p-\nu}{n-\nu}\beta^\nu = (-1)^n\sum_{\nu=0}^{n}(-\beta)^\nu\binom{n-p-1}{n-\nu}$$

$$= (-1)^n\sum_{\nu=0}^{n}(-\beta)^{n-\nu}\binom{n-p-1}{\nu} = \beta^{p+1}(\beta-1)^{n-p-1},$$

d'où la formule

$$(19)\qquad \sum_{\nu=0}^{n}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{p-a-\nu\beta}{n-\nu} = \beta^{p+1}(\beta-1)^{n-p-1},\qquad 0\leq p<n.$$

Dans le cas où $p=n$ on trouve directement

$$\sum_{\nu=0}^{n}\binom{a+\nu\beta}{\nu}\binom{n-a-\nu\beta}{n-\nu} = \frac{1-\beta^{n+1}}{1-\beta}.$$

4. Les identités (1), (10), (16), (17), (18) et (19) que nous avons démontré plus haut ne sont que des cas particuliers des relations plus générales que nous allons maintenant développer.

Remarquons d'abord que les formules (6), (7), (11) et (12) doivent se réduire à des identités quand on développe leurs deux membres suivant les puissances de z.

Cela posé, soit Ω une opération fonctionnelle, *distributive* et *commutative avec une constante* ou, en d'autres termes, soit

$$\Omega\,.\,(aA+bB) = a\Omega A + b\Omega B,$$

où a, b désignent des constantes, A, B des fonctions de la variable x par rapport a laquelle l'opération est effectuée. On sait qu'on peut effectuer des calculs avec des polynômes en Ω, ayant des coefficients constants, exactement comme si les symboles Ω étaient des véritables quantités, pourvu que ces polynômes portent sur des fonctions de x.

Or on peut faire de plus. Soit A une fonction entière et rationnelle de x et soit Ω telle que ΩA est d'un degré moins élevée que A, et $\Omega a = 0$. Sous ces conditions on peut substituer Ω dans des séries entières et effectuer tous les calculs avec ces *opérateurs* comme si Ω était une quantité (suffisamment petite), les opérations portant sur une fonction A. Car dans ce cas on peut regarder les séries entières comme des polynômes de degrés fixes mais suffisamment élevés.

L'opération Δ, définie par l'équation $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+1) - \varphi(x)$ est une telle Ω, $\frac{d}{dx} = D_x$ est une autre.

De l'identité symbolique

$$\varphi(x+1) = (1+\Delta)\,.\,\varphi(x)$$

on déduit cette autre

$$\varphi(x+n) = (1+\Delta)^n\,.\,\varphi(x)$$

ou, en développant, l'identité ordinaire

$$\varphi(x+n) = \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x).$$

Dans le cas où $\varphi(x)$ est une fonction entière et rationnelle, ce que nous supposons dans la suite, nous pouvons écrire l'identité ci-dessus de la manière suivante

$$\varphi(x+n) = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{n}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x),$$

p étant le degré de $\varphi(x)$. Comme les deux membres sont des polynômes en n qui sont égaux pour $n = 1, 2, \ldots$, nous pourrons remplacer n par une quantité quelconque α. De cette manière nous avons démontré la formule connue

$$\varphi(x+\alpha) = \sum_{\nu=0}^{p} \binom{\alpha}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{\alpha}{\nu} \Delta^\nu \varphi(x)$$

ou en forme symbolique

$$\varphi(x+\alpha) = (1+\Delta)^\alpha\,.\,\varphi(x).$$

En développant les deux membres d'après les puissances entières de α et en comparant les coefficients de α, ce qui est parfaitement rigoureux, on aura la formule symbolique

$$\varphi'(x) = D\varphi(x) = l(1+\Delta)\,.\,\varphi(x).$$

Après ces préliminaires nous allons développer les relations mentionnées plus haut.

Substituons $l(1 + \Delta)$ à z dans la formule (6), en laissant les deux membres se porter sur $\varphi(x)$, on trouve la formule symbolique

$$(1 + \Delta)^{\alpha} . \varphi(x) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha(\alpha + \nu\beta)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} D^{\nu}(1 + \Delta)^{-\nu\beta} . \varphi(x)$$

ou en forme ordinaire

$$\varphi(x + \alpha) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha(\alpha + \nu\beta)^{\nu-1}}{\underline{|\nu}} \varphi^{(\nu)}(x - \nu\beta).$$

C'est la formule d'Abel dans un des cas où elle est rigoureuse. Remarquons que nous avons omis le ∞ au-dessus de la signe de sommation pour indiquer que la série est finie et doit être continuée jusqu'à ce que les termes deviennent zéro.

Faisons maintenant la même substitution dans la formule (7), nous aurons

$$\frac{(1 + \Delta)^{\alpha}}{1 - \beta D} . \varphi(x) = \left((1 + \Delta)^{\alpha} + \beta(1 + \Delta)^{\alpha} D + \beta^2(1 + \Delta)^{\alpha} D^2 + \ldots\right) . \varphi(x)$$

$$= \sum_{\nu=0} \frac{(\alpha + \nu\beta)^{\nu}}{\underline{|\nu}} D^{\nu}(1 + \Delta)^{-\nu\beta} . \varphi(x)$$

ou en forme ordinaire

(20) $$\varphi(x + \alpha) + \beta\varphi'(x + \alpha) + \beta^2\varphi''(x + \alpha) + \ldots = \sum_{\nu=0} \frac{(\alpha + \nu\beta)^{\nu}}{\underline{|\nu}} \varphi^{(\nu)}(x - \nu\beta).$$

La formule nouvelle que nous venons de démontrer peut du reste être déduite de la formule analogue d'Abel par un calcul facile.

Remplaçons, dans la formule (11), z par Δ, nous aurons

$$(1 + \Delta)^{\alpha} . \varphi(x) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha}{\alpha + \nu\beta} \binom{\alpha + \nu\beta}{\nu} \Delta^{\nu}(1 + \Delta)^{-\nu\beta} . \varphi(x)$$

ou

(21) $$\varphi(x + \alpha) = \sum_{\nu=0} \frac{\alpha}{\alpha + \nu\beta} \binom{\alpha + \nu\beta}{\nu} \Delta^{\nu}\varphi(x - \nu\beta)$$

formule d'interpolation très remarquable, qui n'a pas été signalée jusqu'ici que dans quelques cas très particuliers $\left(\beta = 1, \frac{1}{2}, \text{etc.}\right)$.

De la formule (12) on déduit de la même manière

$$\frac{(1+\Delta)^{\alpha}}{1-\beta\frac{\Delta}{1+\Delta}}\cdot\varphi(x)=\left((1+\Delta)^{\alpha}+\beta\Delta(1+\Delta)^{\alpha-1}+\beta^2\Delta^2(1+\Delta)^{\alpha-2}+\ldots\right)\cdot\varphi(x)$$

$$=\frac{(1+\Delta)^{\alpha+1}}{1-(\beta-1)\Delta}\cdot\varphi(x)$$

$$=\left((1+\Delta)^{\alpha+1}+(\beta-1)\Delta(1+\Delta)^{\alpha+1}+(\beta-1)^2\Delta^2(1+\Delta)^{\alpha+1}+\ldots\right)\cdot\varphi(x)$$

$$=\sum_{\nu=0}\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu}\Delta^{\nu}(1+\Delta)^{-\nu\beta}\cdot\varphi(x)$$

ou en forme ordinaire

$$(22)\quad\begin{cases}\varphi(x+\alpha)+\beta\Delta\varphi(x+\alpha-1)+\beta^2\Delta^2\varphi(x+\alpha-2)+\ldots\\ =\varphi(x+\alpha+1)+(\beta-1)\Delta\varphi(x+\alpha+1)+(\beta-1)^2\Delta^2\varphi(x+\alpha+1)+\ldots\\ =\sum\limits_{\nu=0}\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu}\Delta^{\nu}\varphi(x-\nu\beta).\end{cases}$$

Signalons encore la formule

$$(23)\qquad \varphi'(x)=\sum_{\nu=1}\frac{1}{\nu}\binom{\nu\beta-1}{\nu-1}\Delta^{\nu}\varphi(x-\nu\beta),$$

qui se déduit de même de (13).

Les formules ci-dessus me semblent aussi remarquables.

On voit immédiatement que les identités précédemment données ne sont que des cas particuliers des formules générales que nous venons de démontrer. Peut-être reviendrons-nous un jour sur ces formules en examinant sous quelles conditions elles sont valables pour d'autres fonctions $\varphi(x)$ que des polynômes.

Remarques sur la convergence de la série (12). La recherche du rayon de convergence de la série entière $\sum\binom{\alpha+\nu\beta}{\nu}v^{\nu}$ tombe un peu en dehors des cadres de cette note. Comme les démonstrations sont assez longues je me contente d'énoncer les résultats qui ne me semblent pas dépourvus d'interêt.

Soit pour plus de simplicité $A_\nu = \binom{\alpha + \nu\beta}{\nu}$, où α, β sont des quantités complexes quelconques. Nous omettons pourtant les cas $\beta = 0, 1$ qui sont banales.

1°. $\beta - 1$ *n'est pas réelle et négative.* Le quotient $A_n : A_{n+1}$ tend, pour n infinie, vers une limite définie $\frac{(\beta - 1)^{\beta-1}}{\beta^\beta}$, où les puissances ont leurs valeurs principales. Donc le rayon de convergence est égal à $\left|\frac{(\beta - 1)^{\beta-1}}{\beta^\beta}\right|$, et le point singulier de la série le plus proche de zéro est égal à $v = \frac{(\beta - 1)^{\beta-1}}{\beta^\beta}$ (d'après le théorème de M. Lecornu, précisé et démontré pour la première fois par M. Fabry).

2°. $\beta - 1$ *est réelle et négative.* Le quotient $A_n : A_{n+1}$ ne tend pas vers une limite. Si β est rationnelle le quotient oscille ente q limites différentes, q étant le dénominateur de β. Deux cas sont maintenant à distinguer.

a) β *est négative.* La limite de $\left|\frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}\right|$, pour n infinie, existe et a la valeur $\frac{(-\beta)^{-\beta}}{(1-\beta)^{1-\beta}}$, qui est le rayon de convergence.

b) β *est positive.* La limite ci-dessus n'existe pas. Le rayon de convergence est égal à $\underline{\lim}_{n=\infty} \left|\frac{1}{\sqrt[n]{A_n}}\right| = \frac{1}{\beta^\beta (1-\beta)^{1-\beta}}$, où nous avons employé la notation de M. Pringsheim pour indiquer »la limite inférieure pour n infinie».