ÜBER ZWEI NACHGELASSENE ARBEITEN ABEL'S UND DIE SICH DARAN ANSCHLIESSENDEN UNTERSUCHUNGEN IN DER THEORIE DER LINEAREN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

VON

L. FUCHS.[1]

I.

In zwei nachgelassenen Abhandlungen (t. II, N:o VIII und N:o IX der von SYLOW und LIE besorgten Ausgabe der ABEL'schen Werke von 1881) hat ABEL die Sätze LEGENDRE's über Vertauschung von Parameter und Argument bei den elliptischen Integralen dritter Gattung auf lineare Differentialgleichungen ausgedehnt.

Diese Arbeiten ABEL's sind alsdann von JACOBI (Crelle Journal, B. 32, p. 185) durch eine abweichende Darstellung derselben in ein helles Licht gestellt worden.

Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ ganze rationale Functionen von x, so betrachtet JACOBI neben dem Differentialausdrucke

$$[y]_1 = A_0 y + A_1 y' + \ldots + A_n y^{(n)},$$

[1] Die Abhandlung, welche wir hier veröffentlichen, ist die letzte, welche aus der Hand des verewigten Verfassers stammt. Als die Abhandlung schon im Druck war, wurde der Verfasser am 26. April plötzlich auf der Strasse von der Krankheit betroffen, welche nach wenigen Minuten seinem ruhmreichen, der mathematischen Wissenschaft mit so grosser Hingabe und so seltenem Erfolg geweihten Leben ein Ende machte. Die Zeit und der Platz fehlen uns augenblicklich um eine angemessene Schilderung zu geben von der Stellung, welche FUCHS in der mathematischen Wissenschaft einnimmt, sowie von dem gewaltigen Einflusse, welchen er auf die Entwickelung der Mathematik in den letzten 37 Jahren, seit dem Erscheinen seiner berühmten Abhandlung *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen* ausgeübt hat. Eine solche Schilderung wird jedoch, wie wir erfahren, nicht lange ausbleiben. *Die Redaktion.*

wo die oberen Accente Ableitungen nach x bedeuten, den Differentialausdruck

$$[y]_2 = -A_0 y + D_x(A_1 y) - D_x^2(A_2 y) + \dots \pm D_x^n(A_n y)$$
$$= B_0 y + B_1 y' + \dots + B_n y^{(n)}$$

welchen wir jetzt als den zu $[y]_1$ *adjungirten*[1] bezeichnen. Da nach LAGRANGE $z[y]_1 + y[z]_2$ für willkürliche Functionen y, z ein vollständiger Differentialquotient ist, so setzt JACOBI

$$\int \{z[y]_1 + y[z]_2\} \, dx = [y, z].$$

Wenn die unabhängige Variable x in $[y]_1, [y]_2, [y, z]$ mit einer unabhängigen Variablen α vertauscht wird, so sollen diese Ausdrücke mit $[y]_1^{(\alpha)}$, $[y]_2^{(\alpha)}$, $[y, z]^{(\alpha)}$, und im Gegensatze hierzu die ursprünglichen auf x bezüglichen Ausdrücke mit $[y]_1^{(x)}$, $[y]_2^{(x)}$, $[y, z]^{(x)}$ bezeichnet werden.

Sei $\mathfrak{A}_k$ dieselbe Function von α wie A_k von x und

$$\frac{A_k - \mathfrak{A}_k}{x - \alpha} = P_k,$$

so ist

$$U = -P_0 + \frac{\partial P_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} + \dots \pm \frac{\partial^n P_n}{\partial x^n}$$

eine ganze rationale Function von x und α,

$$U = \sum C_{mp} \alpha^m x^p, \tag{A}$$

wo C_{mp} den Coefficienten von x^p in $[x^{-m-1}]_2$ bedeutet. JACOBI findet nun die Beziehung

$$\left[\frac{1}{x - \alpha}\right]_1^{(\alpha)} + \left[\frac{1}{x - \alpha}\right]_2^{(x)} = U,$$

aus welcher er die andere ableitet:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[y, \frac{\mathfrak{z}}{x - \alpha}\right]^{(x)} - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{y}{\alpha - x}, \mathfrak{z}\right]^{(\alpha)} = U y \mathfrak{z}, \tag{B}$$

wo y eine Lösung der Gleichung $[y]_1^{(x)} = 0$, $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung $[\mathfrak{z}]_2^{(\alpha)} = 0$ bedeutet.

Ist $y_1, y_2, \dots, y_n$ ein linear unabhängiges System von Lösungen der Gleichung $[y]_1 = 0$, $z_1, z_2, \dots, z_n$ ebenso ein linear unabhängiges System

[1] Vergl. Crelle Journ. B. 76, p. 183.

von Lösungen der adjungirten Gleichung $[z]_2 = 0$, die beiden Systeme so gewählt, dass $[y_i, z_i] = 1$, $[y_i, z_k] = 0$ für $i \neq k$, so folgt aus den Gleichungen

$$[y_k, z] = r_k \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

für eine beliebige Function z

$$(1) \qquad z^{(\lambda)} = z_1^{(\lambda)} r_1 + z_2^{(\lambda)} r_2 + \ldots + z_n^{(\lambda)} r_n \qquad (\lambda=0,1,\ldots,n-1)$$

und ebenso aus den Gleichungen

$$[y, z_k] = s_k \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

für eine beliebige Function y

$$(2) \qquad y^{(\lambda)} = y_1^{(\lambda)} s_1 + y_2^{(\lambda)} s_2 + \ldots + y_n^{(\lambda)} s_n.$$

Setzt man mit JACOBI in r_i für z

$$z = \int \frac{\mathfrak{z}\, d\alpha}{x - \alpha},$$

wo $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung $[\mathfrak{z}]_2^{(\alpha)} = 0$ bedeutet, so folgt unter Anwendung der Gleichungen (B), (1), (2) das Resultat:

$$(\mathrm{C}) \qquad \Pi(k) . \sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\, z_\lambda^{(i)} \int \frac{y_\lambda\, dx}{(x-\alpha)^{k+1}} - \Pi(i) \sum_{1}^{n}{}_{\lambda}\, \mathfrak{y}_\lambda^{(k)} \int \frac{\mathfrak{z}_\lambda\, d\alpha}{(\alpha - x)^{i+1}}$$

$$= \sum C_{mp}\, \mathfrak{y}_g^{(k)} z_h^{(i)} \int \alpha^m \mathfrak{z}_g\, d\alpha \int x^p y_h\, dx,$$

wo $\mathfrak{y}_\lambda$, $\mathfrak{z}_\lambda$ resp. dieselben Functionen von α sind wie y_λ, z_λ von x, und wo die Summation auf der rechten Seite sich auf $g = 1, 2, \ldots, n$; $h = 1, 2, \ldots, n$ und auf dieselben Combinationen von m, p wie in Gleichung (A) bezieht.

Für $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ stellt (C) n^2 Gleichungen dar, welche gestatten die n^2 Grössen $\int \frac{y_i\, dx}{(x-\alpha)^{k+1}}$ linear durch die n^2 Grössen $\int \frac{\mathfrak{z}_i\, d\alpha}{(\alpha - x)^{k+1}}$ und umgekehrt auszudrücken.

Sie liefern die vollständige Lösung des Problems, welches sich ABEL in der N:o IX der bezeichneten Abhandlungen gestellt hatte.

II.

N:o 1.

Am Schlusse seiner Abhandlung (Crelle Journal, B. 32, p. 196) sagt JACOBI: »Um das aufgestellte Theorem in ein vollständiges Licht zu setzen, und insbesondere die Anfangsgrenzen der Integrale zu bestimmen, und die nothwendigen Beschränkungen des Theorems anzugeben, ist es nöthig, den Character der Lösungen der linearen Differentialgleichungen, deren Coefficienten ganze rationale Functionen der Variablen sind, näher zu ergründen, wofür, wenn man die zweite Ordnung überschreitet, noch wenig von den Mathematikern geschehen ist.»

Nachdem mir die Resultate meiner Untersuchungen über die Natur dieser Functionen die Mittel hierzu gewährt hatten, unternahm ich es die ABEL-JACOBI'schen Theoreme zu präcisiren. Es gelang mir gleichzeitig, auf diese präcisirte Formulirung mich stützend, Consequenzen dieser Theoreme von wie es scheint weittragender Bedeutung zu ziehen. Die Resultate dieser Untersuchung habe ich im Crelleschen Journal, B. 76, p. 177, ff. unter dem Titel »über Relationen, welche für die zwischen je zwei singulären Punkten erstreckten Integrale der Lösungen linearer Differentialgleichungen stattfinden» veröffentlicht.

In dieser Arbeit beschränken wir uns auf Differentialgleichungen der Klasse, welche ich in meiner Arbeit (Crelle Journal, B. 66, p. 146, Gl. 12) dahin characterisirt hatte, dass in den zur Umgebung jedes der singulären Punkte gehörigen Entwickelungen nicht unendlich viele negative Potenzen auftreten, welche also für jeden singulären Punkt eine determinirende Fundamentalgleichung aufweisen.

Nachdem nachgewiesen ist, dass die adjungirte Differentialgleichung jeder Gleichung dieser Klasse ebenfalls zu derselben Klasse gehört und dieselben singulären Punkte besitzt, werden die Beziehungen erörtert, welche zwischen den zu demselben singulären Punkte gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen der Differentialgleichungen und ihrer adjungirten stattfinden.

Es wird die Differentialgleichung jener besonderen Klasse in die Form gesetzt:

$$\text{(D)} \qquad [y]_1^{(x)} = \sum_0^n{}_\alpha F_{(n-\alpha)(\rho-1)}(x) \,.\, F(x)^\alpha \,.\, y^{(\alpha)} = 0\,,$$

wo $F_k(x)$ eine ganze rationale Function k^{ten} Grades bedeutet, und

$$F(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_\rho)$$

ist.

Nun wird nachgewiesen, dass bei vorgeschriebenen singulären Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ die Coefficienten der Functionen $F_{(n-\alpha)(\rho-1)}(x)$ so gewählt werden können, dass die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Gleichung (D) von einander verschieden und ihre realen Theile negativ und absolut kleiner als Eins sind; was zur Folge hat, dass auch für die zu (D) adjungirte Differentialgleichung

$$\text{(E)} \qquad [z]_2^{(x)} = \sum_0^n{}_\alpha(-1)^{\alpha-1} D_x^{(\alpha)}[F_{(n-\alpha)(\rho-1)}(x) F(x)^\alpha z] = 0$$

die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung die nämliche Eigenschaft haben. Die Coefficienten können aber so gewählt werden, dass gleichzeitig die Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung für jede der Gleichungen (D) und (E) von einander verschieden und in ihren realen Theilen positiv und grösser als Eins werden.

Von der Differentialgleichung (D) wird in der Fortsetzung der Arbeit vorausgesetzt, dass die Wurzeln der zu jedem a_k gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung von einander verschieden, und in ihren realen Theilen negativ und absolut kleiner als Eins sind, während für $x = \infty$ nur gefordert wird, dass die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichung von einander verschieden seien. Nach den daselbst angestellten Erörterungen hat alsdann die zu (D) adjungirte Gleichung (E) dieselbe Eigenschaft.

N:o 2.

Wir setzen (p. 178 der Arbeit), um die durch die Integration in $[y, z]$ eingeführte Constante zu fixiren,

$$[y,z] = \sum_0^n {}_\lambda H_\lambda, \tag{1}$$

$$H_\lambda = \sum_0^{\lambda-1} {}_\alpha (-1)^\alpha y^{(\lambda-\alpha-1)} D_x^\alpha (A_\lambda z) = \sum_0^{\lambda-1} {}_\alpha (-1)^\alpha z^{(\lambda-\alpha-1)} D_x^\alpha (B_\lambda y). \tag{2}$$

Wenn nun nach Gleichung (D)

$$A_k = F_{(n-k)(\rho-1)}(x) \,.\, F(x)^k \tag{3}$$

gewählt wird, so wird unter den am Schlusse der N:o 1. erwähnten Voraussetzungen nachgewiesen, dass:

$$\left[y, \frac{1}{x-\alpha}\right]_{x=a}^{(x)} = 0, \tag{4}$$

wenn y eine Lösung der Gleichung (D), a einer der singulären Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$, und α von a verschieden ist.

Setzt man in Gleichung (E) α an die Stelle der Variablen x, und bezeichnet dann eine Lösung derselben mit $\mathfrak{z}$, so folgt ebenso

$$\left[\frac{1}{x-\alpha}, \mathfrak{z}\right]_{\alpha=a}^{(\alpha)} = 0, \tag{5}$$

wenn x von a verschieden ist.

Es werde nunmehr die x Ebene durch einen zusammenhangenden sich selbst nirgendwo schneidenden Linienzug $\mathfrak{S}$ zerschnitten, der die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ in sich aufnimmt, der aber auch durch $a_0 = \infty$ hindurchgeht, wenn die realen Theile der Wurzeln der zu $x = \infty$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung grösser als Eins sind. Es möge l_μ den Theil des Schnittes $\mathfrak{S}$ bezeichnen, welcher in einer ein für allemal festgesetzten Richtung von a_μ nach $a_{\mu+1}$ führt. Wenn α an die Stelle der

Variablen x gesetzt wird, so soll die α Ebene durch einen mit $\mathfrak{S}$ sich deckenden Linienzug zerschnitten werden.

Es wird jetzt, unter Beibehaltung der in (3) festgelegten Bedeutung von A_k, von der ABEL-JACOBI'schen Gleichung (B) ausgegangen, in welcher mit y eine Lösung der Gleichung (D), mit $\mathfrak{z}$ eine Lösung der Gleichung (E) (nach Vertauschung der Variablen x mit α) bezeichnet wird. Wird diese Gleichung in Bezug auf x längs l_μ von a_μ bis $a_{\mu+1}$, und in Bezug auf α längs l_ν von a_ν bis $a_{\nu+1}$ integrirt, wobei vorausgezetzt wird, dass die Theile l_μ und l_ν nicht zusammenstossen, so erhält die linke Seite nach den Gleichungen (4) und (5) den Werth Null, es ist also

$$\text{(F)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} d\alpha\, U y \mathfrak{z} = 0$$

(l. c. p. 188, Gl. 4; p. 206, Gl. T.).

Erheblichere Schwierigkeiten stellten sich in den Weg, als wir die Gleichung (B) in Bezug auf x und in Bezug auf α resp. längs zweier auf einander folgender Theile l_μ, $l_{\mu+1}$ zu integriren unternahmen. Es würde mich zu weit führen, wenn ich die Hülfsmittel, welche wir (l. c. p. 189 —206) aus einem tieferen Eindringen in die Natur der Lösungen der linearen Differentialgleichungen schöpfen mussten, hier skizziren wollte. Ich muss mich daher benügen, das l. c. p. 206 erhaltene Resultat hier nur zu beschreiben:

Wir bezeichnen mit $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ das zu $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem von Lösungen der Gleichung (D), mit $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ das zu $x = \infty$ gehörige kanonische Fundamentalsystem der adjungirten Gleichung (E), welche so gewählt sind, dass η_k, ζ_k adjungirte Elemente bedeuten (l. c. p. 183). Ferner bedeuten $\eta_{1\mu}, \eta_{2\mu}, \ldots, \eta_{n\mu}$ das zum singulären Punkte $a_{\mu+1}$ gehörige kanonische Fundamentalsystem der Gleichung (D), $\zeta_{1\mu}, \zeta_{2\mu}, \ldots, \zeta_{n\mu}$ das zu demselben singulären Punkte gehörige kanonische Fundamentalsystem von Lösungen der adjungirten Gleichung (E), welche wieder so gewählt sind, dass $\eta_{k\mu}$ und $\zeta_{k\mu}$ adjungirte Elemente bedeuten. (Vergleiche die Definition des zu einem singulären Punkte gehörigen Fundamentalsystems in meinen Arbeiten, Crelle Journal, B. 66, p. 139 und B. 68, p. 364).

Zwischen diesen Systemen finden die Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{cases} \eta_k = \sum\limits_1^n {}_\lambda b_{k\lambda} \eta_{\lambda\mu}, \\ \zeta_k = \sum\limits_1^n {}_\lambda c_{k\lambda} \zeta_{\lambda\mu} \end{cases}$$

statt, wo $b_{k\lambda}$, $c_{k\lambda}$ Constanten sind, für deren Berechnung in meiner Arbeit (Crelle Journal, B. 75, p. 210) ein Weg angegeben worden.

Sind $r_1, r_2, \ldots, r_n$ die Wurzeln der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Gleichung (D)

$$(7)\qquad D(r) = 0,$$

so ist

$$(8)\qquad \begin{cases} \eta_{\lambda\mu} = (x - a_{\mu+1})^{r_\lambda} . \varphi_\lambda(x), \\ \zeta_{\lambda\mu} = (x - a_{\mu+1})^{-1-r_\lambda} . \psi_\lambda(x) \end{cases}$$

wo $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$ in der Umgebung von $x = a_{\mu+1}$ holomorph und für $x = a_{\mu+1}$ von Null verschieden sind.

Es zeigt sich, dass

$$(9)\qquad [\eta_{\lambda\mu}, \zeta_{\lambda\mu}] = \varphi_\lambda(a_{\mu+1})\psi_\lambda(a_{\mu+1}) . D'(r_\lambda),$$

wo $D'(r)$ die Ableitung von $D(r)$ nach r bedeutet.

Die in $\varphi_\lambda(x)$, $\psi_\lambda(x)$ auftretenden willkürlichen Factoren werden nun so gewählt, dass die rechte Seite der Gleichung (9) den Werth Eins annimmt, so dass

$$(10)\qquad [\eta_{\lambda\mu}, \zeta_{\lambda\mu}] = 1 .$$

In gleicher Weise lassen sich die unbestimmten Factoren von η_k, ζ_k so bestimmen, dass

$$(10^a)\qquad [\eta_k, \zeta_k] = 1 .$$

Zwischen den Grössen c_{ik}, und b_{ik} finden die Gleichungen statt

$$(11)\qquad \begin{aligned} &\sum_1^n {}_i b_{\lambda i} c_{\mu i} = 0 \qquad \left.\begin{matrix}\lambda\\ \mu\end{matrix}\right\} = 1, 2, \ldots n, \quad \lambda \neq \mu, \\ &\sum_1^n {}_i b_{\lambda i} c_{\lambda i} = 1 . \end{aligned}$$

Nach diesen Erörterungen und Festsetzungen wird das folgende Resultat erschlossen:

$$\text{(G)} \qquad \int_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U \eta_k \mathfrak{z}_l = (-1)^n \pi \sum_{1}^{n} {}_{\mathfrak{a}} \frac{b_{k\mathfrak{a}} c_{l\mathfrak{a}} e^{-\pi i r_\mathfrak{a}}}{\sin \pi r_\mathfrak{a}}$$

wo $\mathfrak{z}_l$ dieselbe Function von α ist wie z_l von x, l. c. p. 206.

III.

N:o 1.

Der wahre Sinn und die Wichtigkeit der in den Gleichungen (F), (G) auftretenden Resultate wird in ein helleres Licht gesetzt durch eine Arbeit, welche ich später in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie (22 December 1892, p. 1113) veröffentlicht habe.

In dieser Arbeit wird auf die Rolle hingewiesen, welche die Coefficienten der Fundamentalsubstitutionen der Lösungen der Differentialgleichung in jenen Relationen (F), (G) spielen. Zu diesem Ende ist nur eine etwas veränderte Schreibweise der rechten Seite der Gleichung (G) erforderlich. Durch diese Schreibweise tritt der Umstand besonders hervor, dass die rechte Seite lediglich von den Coefficienten der auf $a_{\mu+1}$ bezüglichen Fundamentalsubstitution der Lösungen $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ abhängt. Dieser Umstand aber bringt es mit sich, dass die Relationen (F), (G) einen *invarianten* Character haben, in dem Sinne, dass sie für die gesammte Klasse von Differentialgleichungen, zu welcher eine vorgelegte Differentialgleichung gehört, die gleiche Form behalten. Diese Invarianz macht es möglich, gewisse beschränkende Voraussetzungen, welche in der Arbeit (Crelle Journ. B. 76, p. 177 ff.) über die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen gemacht worden sind, aufzuheben. Dieses wird in der in Rede stehenden Arbeit nachgewiesen; es wird nur, um Complicationen in der Darstellung zu vermeiden, die Voraussetzung gemacht, dass die Differenzen zweier jener Wurzeln, wenn sie nicht sämmtlich ganzzahlig sind aber zum Auftreten von Logarithmen keine Veranlassung geben, nicht zum Theil ganzzahlig sein sollen.

Sei

$$F(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_\rho)(x-b_1)(x-b_2)\dots(x-b_\sigma)$$

und

$$(1)\qquad (\overline{\mathrm{D}})\qquad [y]_1^{(x)} = \sum_0^n {}_{\mathfrak{a}} F_{(n-\mathfrak{a})(\tau-1)}(x) F(x)^{\mathfrak{a}} y^{(\mathfrak{a})} = 0,$$

$$(2)\qquad (\overline{\mathrm{E}})\qquad [z]_2^{(x)} = \sum_0^n {}_{\mathfrak{a}} (-1)^{\mathfrak{a}-1} D_x^{\mathfrak{a}}\left(F_{(n-\mathfrak{a})(\tau-1)}(x) F(x)^{\mathfrak{a}} z\right) = 0,$$

$$\tau = \rho + \sigma,$$

wo $b_1, b_2, \dots, b_\sigma$ diejenigen singulären Punkte bedeuten, bei deren Umkreisung sämmtliche Integralquotienten ungeändert bleiben, während mit $a_1, a_2, \dots, a_\rho$ diejenigen singulären Punkte bezeichnet werden, für welche die Differenzen der Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nicht ganze Zahlen sind.

Es werden nun vorläufig noch die Voraussetzungen der Abhandlung (Crelle Journ. B. 76) festgehalten, dass die Wurzeln der zu $a_1, a_2, \dots, a_\rho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen in ihren realen Theilen negativ und absolut kleiner als Eins sind, und, um die oben erwähnte veränderte Schreibweise der rechten Seite der Gl. (G) zu erzielen, die Substitution

$$(b_{ik}) \quad \text{(s. II, N:o 2, Gl. (6))}$$

mit B, die Substitution

$$\begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & \dots, & 0 \\ 0, & 0, & \dots, & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_{\mathfrak{a}} = e^{2\pi i r_{\mathfrak{a}}},$$

($r_1, r_2, \dots, r_n$ die Wurzeln der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung) mit L bezeichnet; dann ist

$$S_\mu = (g_{ik}) = B\,L\,B^{-1}$$

die dem Umlaufe um $a_{\mu+1}$ angehörige Fundamentalsubstitution. Setzt man die Determinante

$$|b_{ik}| = \Delta \text{ und } B_{kl} = \frac{\partial \Delta}{\partial b_{kl}},$$

so ist nach Gl. (11) in II, N:o 2.

$$c_{kl} = \frac{B_k}{\Delta}.$$

Alsdann ergiebt sich aus Gl. (G)

$$(\mathrm{G}') \qquad \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} dx \int\limits_{a_{\mu+1}}^{a_{\mu+2}} d\alpha\, U\eta_k\mathfrak{z}_l = (-1)^n \cdot 2\pi i \sum_{0}^{n}{}_{\alpha} \frac{A_\alpha^{(k,l)}}{\lambda_\alpha - 1},$$

wenn wir

$$A_\alpha^{(k,l)} = \frac{b_{k\alpha} B_{l\alpha}}{\Delta} \qquad \binom{k=1,2,\ldots,n}{l=1,2,\ldots,n}$$

setzen.

(Vergl. Sitzungsberichte l. c. p. 1117 Gl. (S').

Die rechten Seiten der Gleichungen (G') *sind lediglich durch die auf* $a_{\mu+1}$ *bezügliche Fundamentalsubstitution des Fundamentalsystems* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ *bestimmt. Diese Gleichungen repräsentiren* n^2 *Gleichungen für die* n^2 *Coefficienten* g_{ik} *dieser Fundamentalsubstitution.*

N:o 2.

Wir können zunächst durch eine Substitution

$$(1) \qquad y = (x - a_1)^{-\alpha_1}(x - a_2)^{-\alpha_2} \ldots (x - a_\rho)^{-\alpha_\rho} w,$$

wo die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ Null oder positive ganze Zahlen bedeuten, die Gleichung $(\overline{\mathrm{D}})$ in eine Gleichung

$$(2) \qquad B_0 w + B_1 w' + \ldots + B_n w^{(n)} = 0$$

verwandeln, für welche die zu $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ gehörigen determinirenden Fundamentalgleichungen in ihren realen Theilen positiv sind.

Ist $m_\alpha - 1$ die höchste ganze Zahl, welche in den realen Theilen der Wurzeln der zu a_α gehörigen determinirenden Fundamentalgleichung der Gleichung (2) enthalten ist, so werde

$$(3) \qquad \begin{cases} \Pi(x) = (x - a_1)^{m_1}(x - a_2)^{m_2} \ldots (x - a_\rho)^{m_\rho}, \\ \psi(x) = (x - a_1) \;\; (x - a_2) \;\; \ldots (x - a_\rho) \end{cases}$$

gesetzt. Wir beweisen nun, dass man n ganze rationale Functionen $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ derart bestimmen kann, dass, wenn

$$(4) \qquad P_k(x) = \frac{\varphi_k(x)\,\psi(x)^k}{\Pi(x)}$$

und

$$u = P_0(x)w + P_1(x)w' + \ldots + P_{n-1}(x)w^{(n-1)} \tag{5}$$

gesetzt wird, die Differentialgleichung, welcher u genügt,

$$C_0 u + C_1 u' + \ldots + C_n u^{(n)} = 0\,, \tag{6}$$

überhaupt dieselben singulären Punkte wie (2) besitzt, und dass die realen Theile der Wurzeln der auf $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ bezüglichen determinirenden Fundamentalgleichungen von (6) zwischen Null und der negativen Einheit sich befinden.

Die Gleichung (6) gehört zu derselben Klasse mit der Gleichung $(\overline{\mathrm{D}})$, daher sind die Fundamentalsubstitutionen zu je einem singulären Punkte für beide Gleichungen übereinstimmend.

Hieraus fliesst das folgende Resultat:

Wenn die Gleichung $(\overline{\mathrm{D}})$ in Bezug auf die Wurzeln der determinirenden Fundamentalgleichungen nicht den Voraussetzungen entspricht auf Grund deren die Gleichung (G′) aufgebaut worden ist, so kann durch rationale Rechnungsoperationen eine mit $(\overline{\mathrm{D}})$ zu derselben Klasse gehörige Differentialgleichung, wie Gleichung (6), hergeleitet werden, welche den genannten Voraussetzungen Genüge leistet. Man hat alsdann in der linken Seite der Gleichung (G′) nur für $\eta_k, \mathfrak{z}_k, U$ die auf die Gleichung (6) bezüglichen entsprechenden Functionen zu substituiren, während die rechten Seiten ungeändert bleiben. Die so erhaltenen n^2 Gleichungen (G′) liefern alsdann die Coefficienten g_{ik} der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsubstitution der Gleichung $(\overline{\mathrm{D}})$.

N:o **3.**

In derselben Arbeit werden alsdann noch die Relationen discutirt, welche durch die Gleichungen (F) und (G′) zwischen den bestimmten Integralen

$$I_{ki}^{(\mu)} = \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^i \eta_k dx\,, \qquad H_{ki}^{(\mu)} = \int\limits_{a_\mu}^{a_{\mu+1}} x^i \zeta_k dx$$

und den Coefficienten der zu $a_{\mu+1}$ gehörigen Fundamentalsubstitutionen festgestellt sind. Wir heben daraus das Ergebniss hervor: Sämmtliche

Grössen $I_{kl}^{(\mu)}$ lassen sich durch $I_{k0}^{(\mu)}, I_{k1}^{(\mu)}, \ldots, I_{k,n(\tau-1)-1}^{(\mu)}$ und sämmtliche Grössen $H_{kl}^{(\mu)}$ durch $H_{k0}^{(\mu)}, H_{k1}^{(\mu)}, \ldots, H_{k,n(\tau-1)-1}^{(\mu)}$ linear und homogen darstellen.

Zum Beschluss wird noch die Rechnung für $n = 1$ und $n = 2$ durchgeführt.

IV.

Wir erwähnen hier noch die sich an die vorhergehenden Untersuchungen anschliessenden Arbeiten der Herren SCHLESINGER und HIRSCH.

Auf den Zusammenhang, der zwischen dem Vertauschungssatze und der Integration linearer Differentialgleichungen durch Quadraturen (bestimmte Integrale) besteht, hat Herr SCHLESINGER (Crelle Journ. B. 116, p. 97 ff. und Handbuch B. II[1], 1897, p. 405 ff.) hingewiesen. Bedeutetet $D_x(y)$ einen linearen homogenen Differentialausdruck n^t-Ordnung mit der unabhängigen Variablen x und Coefficienten, die ganze rationale Functionen m^t-Grades sind, so zeigt sich, dass der ABEL'sche Vertauschungssatz als specieller Fall ($\xi = 0$) in der allgemeinen Identität (Gl. (C), l. c. p. 102).

$$D_x((z-x)^{\xi-1}) = \mathfrak{D}_z((z-x)^{\xi+m-1})$$

enthalten ist, wo $\mathfrak{D}_z$ einen linearen Differentialausdruck $(m+n)^t$-Ordnung mit der unabhängigen Variablen z darstellt, dessen Coefficienten sich aus denen von D_x (und umgekehrt) in einfacher Weise zusammensetzen lassen (Gl. (2), (3), l. c. p. 102, 103).

Die Lösungen von $D_x(y) = 0$ lassen sich auf Grund der angegebenen Identität, durch die Lösungen v der zu $\mathfrak{D}_z = 0$ adjungirten Differentialgleichung (der EULER'schen Transformirten von $D_x = 0$) in der Form

$$y = \int_L v(z-x)^{\xi-1}dz\,,$$

und umgekehrt die Lösungen von $\mathfrak{D}_z(u) = 0$ durch die Lösungen w der zu $D_x = 0$ adjungirten Differentialgleichung, in der Form

$$u = \int_\Lambda w(z-x)^{\xi-1}dx$$

darstellen, wo L, Λ geeignet gewählte geschlossene Integrationswege bedeuten.

Herr HIRSCH behandelt (Mathem. Annalen, B. 54, p. 202 ff.) die von mir in den obenerwähnten Arbeiten aufgestellten Relationen (Periodenrelationen), nachdem er (Mathem. Annalen, B. 52, p. 130 ff.) den Fall $n = 1$ vorweg genommen, indem er 1) mit Benutzung der erwähnten SCHLESINGER'schen Arbeit diese Relationen in der von mir gegebenen Form aus dem Vertauschungssatze herleitet (Math. Annalen, B. 54, II^{t} Abschnitt, p. 249—275), und dann 2) eine andere — der ersten algebraisch aequivalente — Form dieser Relationen angiebt, die, in Nachbildung der von RIEMANN für die analoge Frage der Theorie der ABEL'schen Integrale angewendeten Methode, durch die Auswerthung eines gewissen Randintegrals erzielt wird (l. c. § 15—17, p. 276—295). Unter der Voraussetzung, dass die Monodromiegruppe der betrachteten Differentialgleichung eine *definite* HERMITE'sche Form in sich selbst transformirt, liefert dieselbe Methode der Randintegration eine Ungleichung für die realen und imaginären Bestandtheile der gedachten Integrale (in dem eine aus diesen Integralen gebildete HERMITE'sche Form sich als stets positiv definit erweist), die der von RIEMANN für die Periodicitätsmoduln der ABEL'schen Integrale aufgestellten Ungleichung analog ist (l. c. § 18, p. 295—313; § 20, p. 316—322).

Berlin, 15. März 1902.